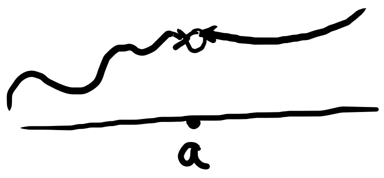
~ Непрекидност (наставак) ~

$f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, f непр. у $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\iff \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$



1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Испитати непрекидност.

$\boxed{x\neq 1}$ $x-1$ непр.

$\Rightarrow \frac{1}{x-1}$ непр.

$e^u, \frac{1}{x-1}, \circ$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}}$ непр.

$\Rightarrow 1+e^{\frac{1}{x-1}}$ непр.

$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ непр. ✓

$x=1$: $f(1)=1$ $\quad \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}}_{f(x)} \overset{?}{=} \underset{f(1)}{1}$

$x-1 \to 0 \quad \frac{1}{x-1} \to ?$

$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1+0} = \boxed{1}$ ✓

$x-1 \to 0_-$, $\frac{1}{x-1} \to -\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}} \to 0$

непр. слева у 1

$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \boxed{0} \neq f(1)$

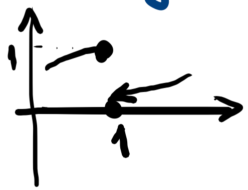
$x-1 \to 0_+$, $\frac{1}{x-1} \to +\infty$

„$\frac{1}{+\infty}$"

$\Rightarrow$ није непр. здесна у 1

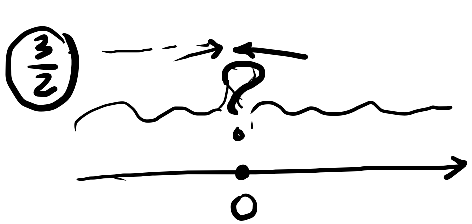
$\Rightarrow \boxed{f \text{ није непр. у } x=1}$

f непр. на $\mathbb{R}\setminus\{1\}$



2. За све $x>-1,\ x\neq 0$ дефинисана је $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

Да ли се може додефинисати у $x=0$ тако да f буде непр. у 0?



Ако може да се додефинише: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (тад буде непр.)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}}_{\to \frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{x}{(1+x)^{1/3}-1}}_{\to \frac{1}{1/3}=3}=\frac{3}{2}$$

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x>-1,\ x\neq 0\\ \frac{3}{2}, & x=0\end{cases}$$

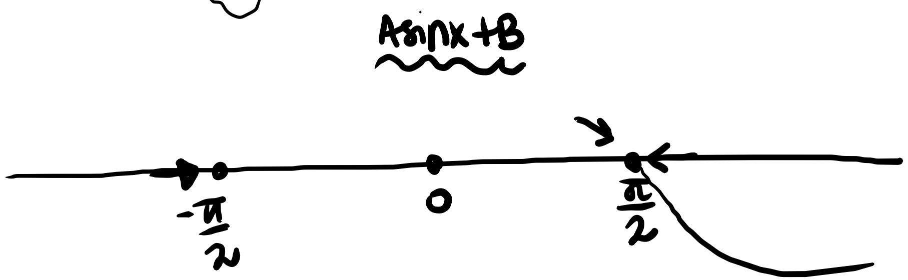
$\tilde{f}$ непр. на $(-1,+\infty)$ ✓

③

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$1 - \sin x$

$-2\sin x$



Дали $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$ т.ч. f непр. на $\mathbb{R}$?

$x \ne \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ f непр. в x ✓

$\boxed{x = -\frac{\pi}{2}}$ $-2\sin x$ непр. на $(-\infty, -\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ $f(x)$ непр. слева в $-\frac{\pi}{2}$ ✓

$x \to -\frac{\pi}{2}+$?

$$\underbrace{f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\| \\ -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x)$$

$$2 = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} (A\underbrace{\sin x}_{\to -1} + B) = -A + B$$

$\boxed{f \text{ непр. в } -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 = -A + B}$ (1)

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ f непр. отдясна в $\frac{\pi}{2}$ ✓

$x \to \frac{\pi}{2}-$?

$$\underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\| \\ \cos\frac{\pi}{2} = \boxed{0}}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (A\underbrace{\sin x}_{\sin\frac{\pi}{2} = 1} + B) = A + B$$

$\boxed{f \text{ непр. в } \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 = A + B}$ (2)

$$f \text{ непр. на } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -A + B \\ 0 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} B = 1 \\ A = -1 \end{matrix}}$$

4. Да ли су тачни искази:

а) f непр у x_0, g има прекид у x_0 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f+g$ има прекид у x_0 T

б) f има прекид у x_0, g има прекид у x_0 $\overset{?}{\not\Rightarrow}$ $f+g$ има прекид у x_0 ← $(\forall f)(\forall g)$ $\perp$

f пр. x_0, g пр у x_0 $\Rightarrow$ $f+g$ пр. у x_0

в) f има прекид у x_0, g има прекид у x_0 $\overset{?}{\not\Rightarrow}$ $f+g$ непрекидна у x_0 $\perp$

а) $\left.\begin{array}{l} f \text{ непр. у } x_0 \\ g \text{ прекид } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f+g$ има прекид x_0 T

ппс. $\exists f, g$ $f+g$ непр. у x_0

$g(x) = (f+g)(x) - f(x)$

непр. у x_0

разлика

$\Rightarrow g$ непр. у x_0 ↯

б) ∧ в)

$f(x) = g(x) = [x]$ прекид у 0

$f(x)+g(x) = 2[x]$ прекид у 0 ← збир може имати прекид

$f_1(x) = [x]$ прекид у 0

$f_2(x) = 1-[x]$ —||—

$f_1(x)+f_2(x) = 1$ непр. у 0 ← збир може бити непр.

5. $f(x)=\operatorname{sgn} x$
$g(x)=1+x-[x]$

$f\circ g$ и $g\circ f$ - испитати непр.

$$g\circ f(x)=g(\operatorname{sgn} x)=1+\underbrace{\underbrace{\operatorname{sgn} x}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{[\operatorname{sgn} x]}_{=\operatorname{sgn} x}}_{0}=1 \leftarrow \text{const} \quad \forall x \Rightarrow g\circ f \text{ непр. на } \mathbb{R}$$

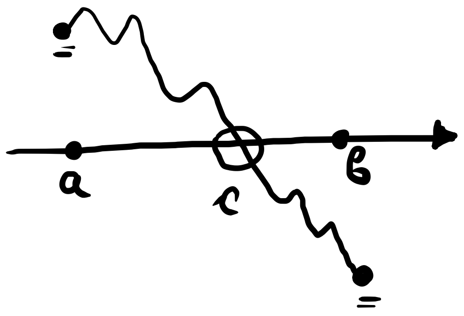
$$f\circ g(x)=f(1+x-[x])=\operatorname{sgn}(\underbrace{1+\underbrace{x-[x]}_{\geq 0}}_{\geq 1})=1 \quad \forall x \Rightarrow f\circ g \text{ непр. на } \mathbb{R}$$

Болцано-Коши: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр.

T1

$f(a)$ и $f(b)$ различитог знака $\quad (f(a)\cdot f(b)<0)$

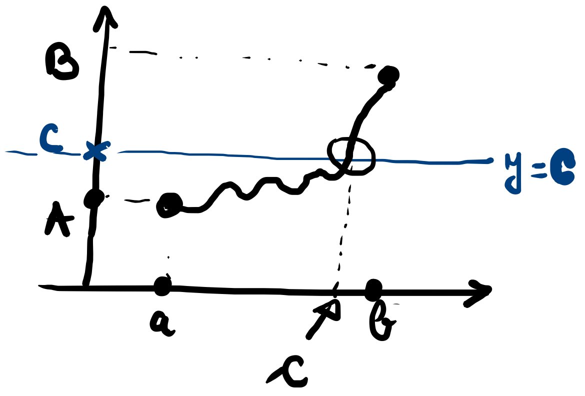
$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ тд. $f(c)=0$



такође

Б-К: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр. $f(a)=A$, $f(b)=B$ $\quad C$-између A и B $\quad (C\in(A,B)$ или $(B,A))$

T2 $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ тд. $f(c)=C$

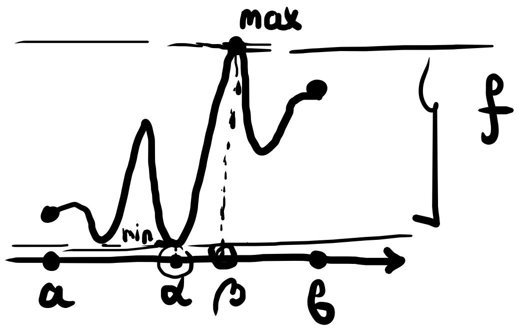


T3 (Вајерштрас) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

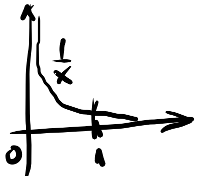
$\Rightarrow f$ достиже min и max на $[a,b]$

тј. $\exists \alpha,\beta\in[a,b]$ тд. $f(\alpha)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$f(\beta)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$



f ограничено на $[a,b]$

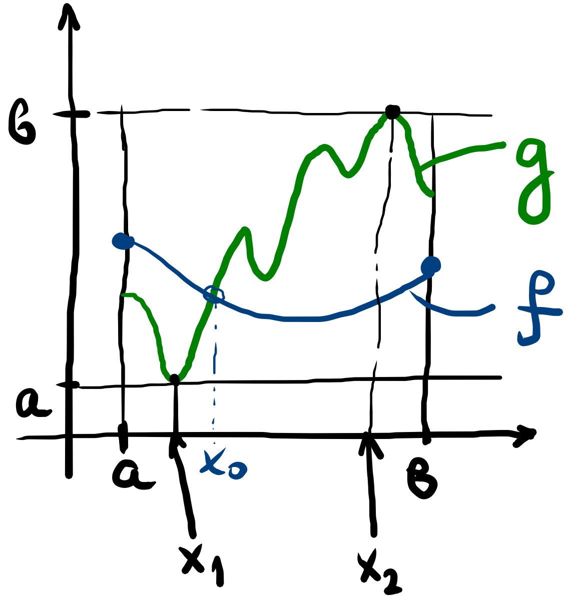


$(0,1]$

6) $f,g:[a,b]\to[a,b]$ непрекидне

g НА функција

$\Rightarrow \exists x_0\in[a,b]$ тд. $f(x_0)=g(x_0)$



Уочимо фју. $F(x)=f(x)-g(x)$

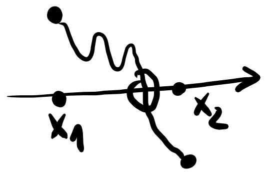
$F:[a,b]\to\mathbb{R}$

F је непр. на $[a,b]$ као разл. непр.

g је НА $\Rightarrow \exists x_1\in[a,b]\ g(x_1)=a$

$\exists x_2\in[a,b]\ g(x_2)=b$

F



$F(x_1)=\underbrace{f(x_1)}_{\geq a}-\underbrace{g(x_1)}_{a}\geq 0$

$F(x_2)=\underbrace{f(x_2)}_{\leq b}-\underbrace{g(x_2)}_{b}\leq 0$

$\overset{\text{Болцано-Коши}}{\Longrightarrow} \exists c$ из $[x_1,x_2]$

тд $\overset{f-g}{F}(c)=0$

$\Rightarrow \boxed{f(\underset{x_0}{c})=g(c)}$ □

Последица:

$f:[a,b]\to[a,b]$ непр.

$\Rightarrow \exists x_0\in[a,b]$ тд. $f(x_0)=x_0$

Д. $g(x)=x$

$g:[a,b]\to[a,b]$ непр. НА

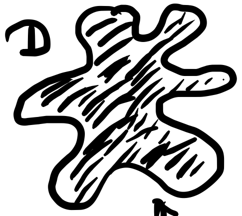
6) $\Rightarrow \exists x_0\in[a,b]$ тд.

$f(x_0)=g(x_0)$

$f(x_0)=x_0$ □

☺ теорема о фикс. тачки

D



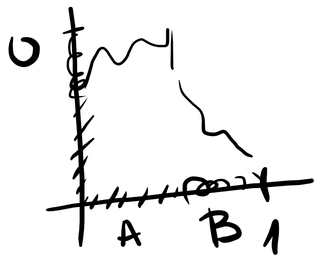
$f:D\to D$ непр.

$\exists x_0\in D$

тд $f(x_0)=x$

деф $D\approx$ диск

* за вежбу: да ли постоји подела дужи $[0,1] = A \sqcup B$ $(A\cup B=[0,1],\ A\cap B=\emptyset)$ и функција $f:[0,1]\to[0,1]$ непр. тако да $f(A)\subset B$ и $f(B)\subset A$?



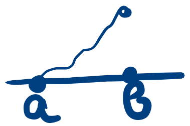
7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр. т.д. $\exists c\in\mathbb{R}$ $f(f(c))=c$

Док. да $\exists d\in\mathbb{R}$ т.д. $f(d)=d$.

$\underbrace{\text{разлика}}_{f(d)-d}=0$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\boxed{F(x)=f(x)-x}$ $(?\ \exists d\ F(d)=0)$

F непр. на $\mathbb{R}$ ✓



$\left.\begin{array}{l} F(a)\le 0 \\ F(b)\ge 0 \end{array}\right\}$ $F(a)\cdot F(b)\le 0$

F непр. на $[a,b]$

$\Rightarrow \exists c\in[a,b]\ F(c)=0$

$F(c)=f(c)-c$ — разл. знака / или 0

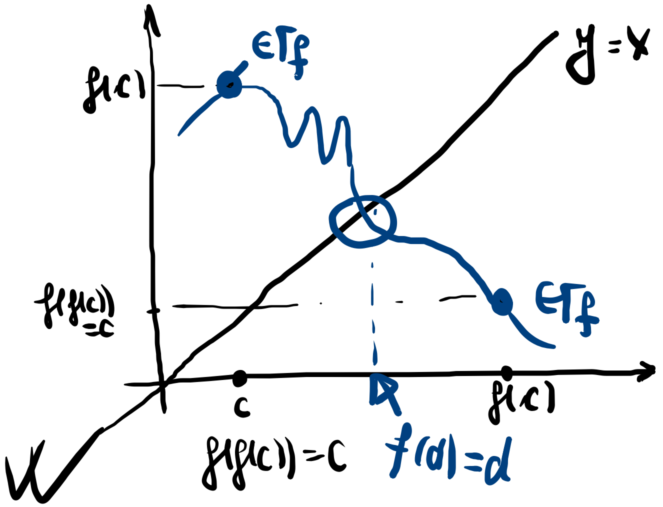
$F(f(c))=\underbrace{f(f(c))}_{=c}-f(c)=c-f(c)$

$\Rightarrow F(c)\cdot F(f(c))\le 0$

Б.К. теорема

$\Rightarrow \exists d$ између c и $f(c)$ $[c, f(c)]$

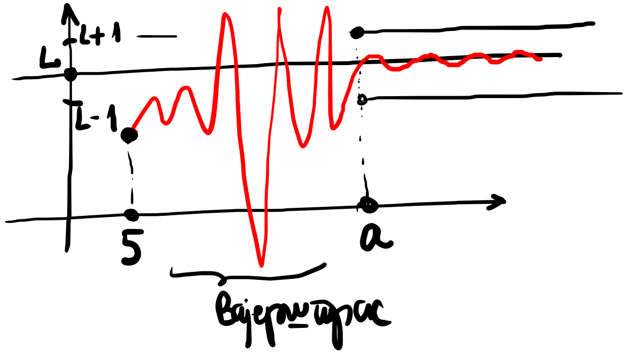
т.д. $F(d)=0$ тј. $\boxed{f(d)=d}$ ✓

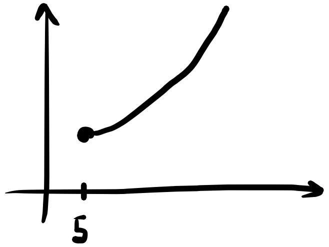


8. $f: [5,+\infty) \to \mathbb{R}$ непр.

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

док. да је f огр. на $[5,+\infty)$





$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \overset{\varepsilon=1}{\Longrightarrow} \exists a \in \mathbb{R} \ \ \forall x \geq a \ \ |f(x)-L| \leq 1$$

$(a>5)$ $$\boxed{\forall x \geq a \quad L-1 \leq f(x) \leq L+1} \quad (1)$$

$[5,a]$: f непр. на $[5,a]$ $\overset{\text{Вајерштрас}}{\Longrightarrow}$ f огр. на $[5,a]$

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \ \boxed{\forall x \in [5,a] \quad m \leq f(x) \leq M} \quad (2)$$

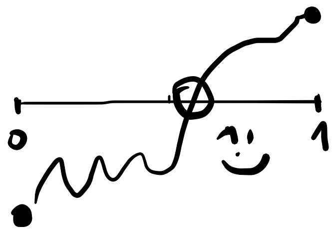
$\forall x \in [5,\infty)$

$$\min\{m, L-1\} \leq f(x) \leq \max\{M, L+1\}$$

$\Rightarrow$ f ограничена на $[5,+\infty)$.

9. $7x^5-5x^3+3x-2=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

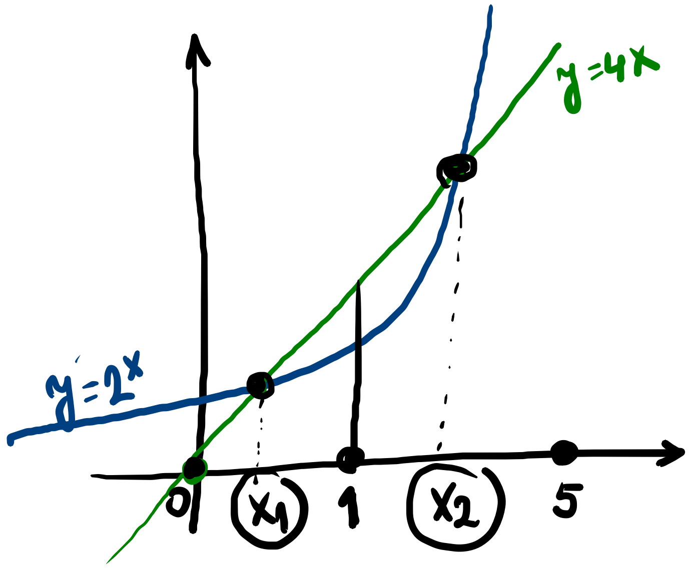
Док. да једн. има решение на $(0,1)$.



$$\Leftrightarrow \underbrace{7x^5-5x^3+3x-2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{F(x)}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} F:[0,1]\to\mathbb{R} \quad \text{непр.} \\ F(0)=-2-\sin 0=-2<0 \\ F(1)=7-5+3-2-\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}=2>0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Б.К.Т}} \begin{array}{l} \exists\, x_0\in(0,1) \\ F(x_0)=0 \\ \text{решение } \checkmark. \end{array}$$

⑩ Докажи да $2^x = 4x$ има бар 2 решена на $[0,+\infty)$



$F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$F(x)=2^x-4x$ непр.

$[0,1]$: $F(0)=2^0-4\cdot 0=1>0$, $F(1)=2^1-4=-2<0$ $\overset{\text{Б.К.}}{\Longrightarrow}$ $\exists x_1\in(0,1)$ $F(x_1)=0$

решение $2^x=4x$

$x_1\neq x_2$

$[1,5]$: $F(1)<0$, $F(5)=2^5-4\cdot 5=12>0$ $\overset{\text{Б.К.}}{\Longrightarrow}$ $\exists x_2\in(1,5)$ $F(x_2)=0$

$\square$

(11) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр. и ограничена

док. да $\exists x_0\in\mathbb{R}$ $f(x_0)=x_0^3$

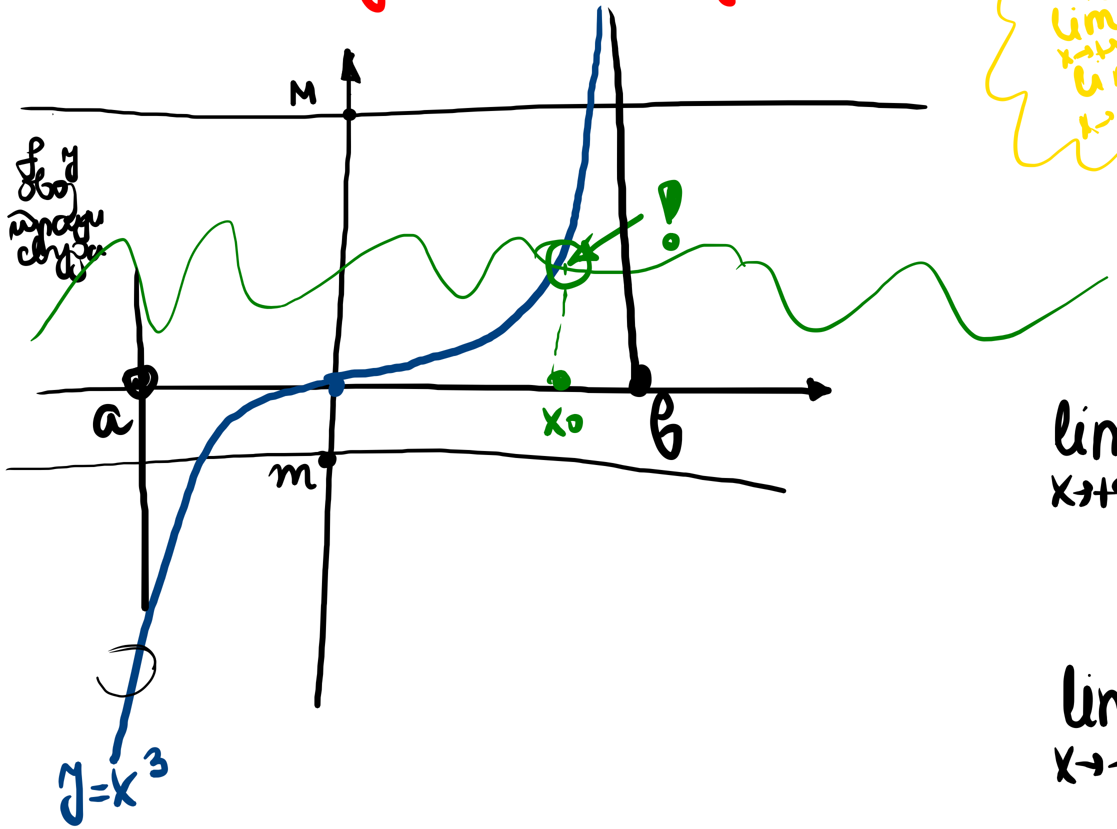
$g(x_0)$

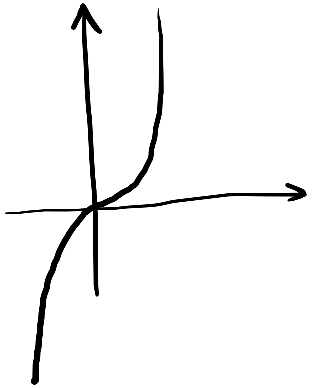
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

док. да $f(x)=x^3$ има решение





$F(x)=f(x)-x^3$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непр.

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{f(x)}_{\text{огр.}}-\underbrace{x^3}_{\to+\infty})=-\infty$$

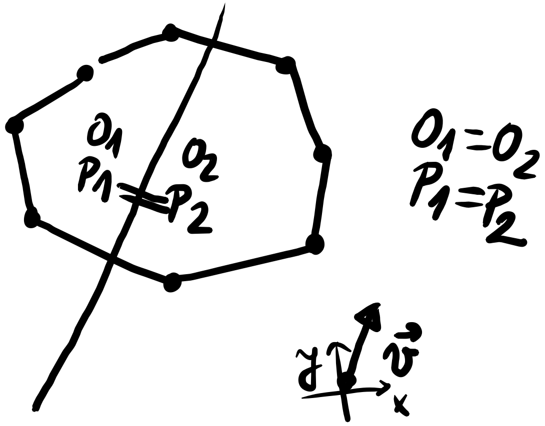
$$\Rightarrow \boxed{\exists b>0 \quad F(b)<0} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{f(x)}_{\text{огр.}}-\underbrace{x^3}_{\to-\infty})=+\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists a<0 \quad F(a)>0} \quad (2)$$

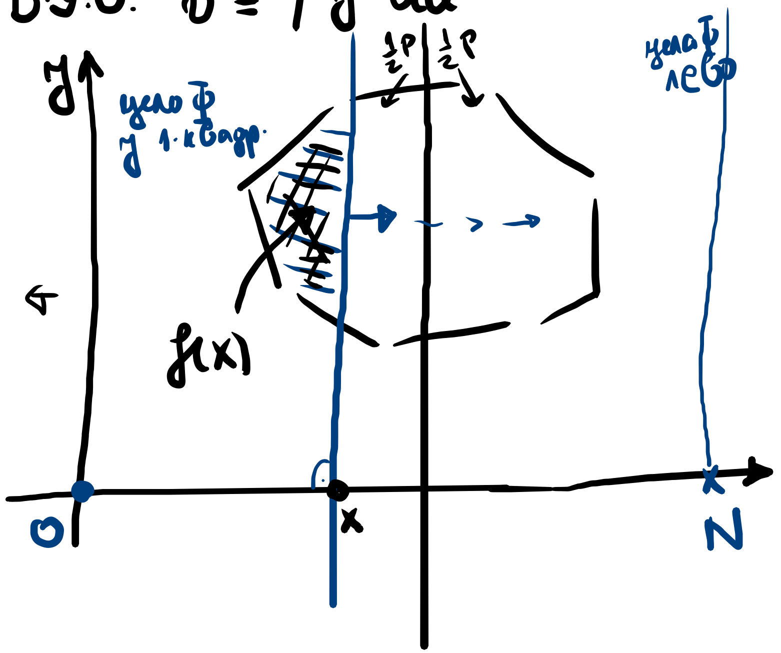
ТБК на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists x_0$ $F(x_0)=0$ $\Leftrightarrow$ $f(x_0)=x_0^3$ ∎

☺ Φ-полигон у равни (конвексан)
Док: да ∃ права која га дели на два дела једнаког обима и једнаке површине.



Ⅰ за ∀ праву у равни ($\forall \vec{v} \neq 0$)
∃ права паралелна тој правој
која дели Φ на 2 дела једнаке површине

Б.У.О. $\vec{v} = \uparrow$ y-оса



$f : [0,N] \to \mathbb{R}$

$f(x) :=$ површина дела Φ лево од праве ⊥ x-осу у тачки x

f-непр. на $[0,N]$

$f(0)=0$

$f(N) = P(\Phi)$ — цело Φ лево

$0 < \frac{1}{2}P(\Phi) < P(\Phi)$

$\xRightarrow{\text{Б.К.}}$ $\boxed{\exists x_0 \in [0,N] \mid f(x_0) = \frac{1}{2}P(\Phi)}$