~ Неједнакости ~

Бернулијева неједнакост

$x > -1,\ n \in \mathbb{N}:\quad (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \qquad (*)$

$$(1+x)^n = 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} x + \binom{n}{2} \cdots$$
$$= 1 + n \cdot x + \sqcup$$

индукција:

1) $n=1: \quad (1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ ✓

2) $n \mapsto n+1$ инд. хип. важи за n $(*)$

за $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx \text{ н.х.}} \cdot (1+x)$$

$$\geq (1+nx) \cdot (1+x)$$

$$= 1 + \underbrace{x + nx}_{(n+1) \cdot x} + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1) \cdot x \quad ✓$$

1), 2) $\Rightarrow$ важи за $\forall n$ □

$(1+x)^n \geq 1+nx \ / \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0}$

$\geq$

услов $x > -1$
$\Rightarrow 1+x > 0$

[$x=-5,\ n=3$
не важи
Б.Н.]

$\boxed{x^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}}$

једнакост важи акко: $x=0$

1. Доказати

а) $a^2+b^2 \geq 2ab, \ \forall a,b \in \mathbb{R}$

$\iff a^2+b^2-2ab \geq 0$

$\iff (a-b)^2 \geq 0$

$\iff$ T

једнакост: $(a-b)^2=0$

$\iff a-b=0$

$\iff \underline{\underline{a=b}}$

б) $a>0$: $a+\frac{1}{a} \geq 2$

$\iff (\sqrt{a})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 2$

из претх.: $(\sqrt{a})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 2\cdot\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=2$ ✓

једнакост: $\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}} \quad / \cdot \sqrt{a}$

$\iff a=1$

в) $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

"Шурова неједнакост"

из а) : $a^2+b^2 \geq 2ab$

$b^2+c^2 \geq 2bc$

$+ \quad a^2+c^2 \geq 2ac$

$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac) \quad /:2$

важи ✓

једнакост: $a=b, b=c, c=a \rightarrow \underline{a=b=c}$

г) $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b \geq 0$: важи: $a^3+b^3 \geq a^2b+b^2a$

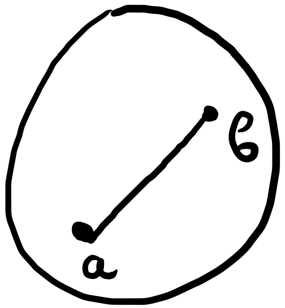
$\Leftrightarrow a^3-a^2b+b^3-b^2a \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-b) \geq 0$

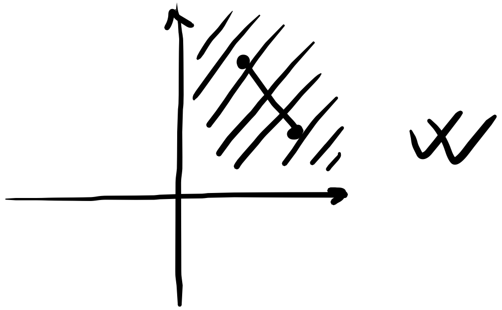
$\Leftrightarrow \underbrace{(a+b)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{услов}}}\underbrace{(a-b)(a-b)}_{\substack{\geq 0 \\ x^2 \geq 0}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow T$

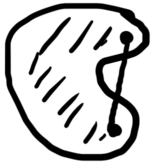
КОНВЕКСАН СКУП



$\Phi \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \Phi$ је конвексан скуп

$\iff \forall a, b \in \Phi$ цела дуж $[a,b] \subset \Phi$

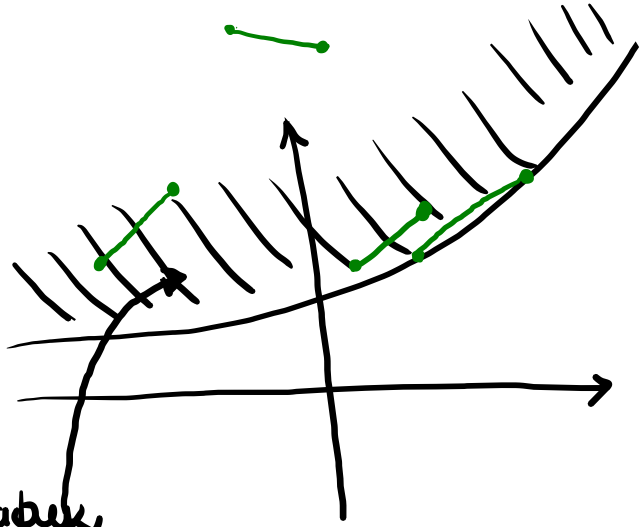




није конвексан скуп

КОНВЕКСНА ФУНКЦИЈА:

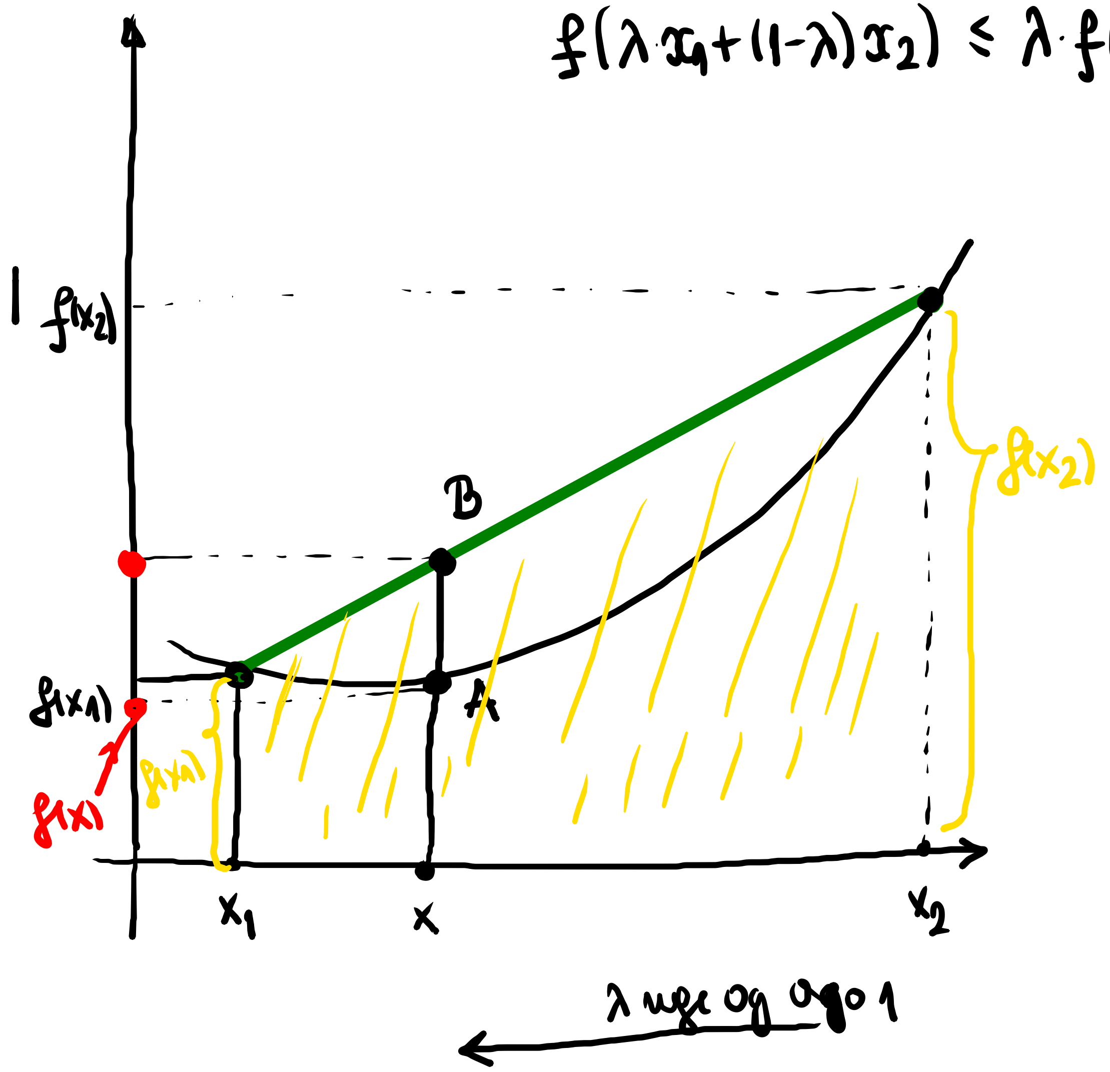
неформално:



надграфик конвексан скуп

ДЕФ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je **конвексна на (a,b)** ако за $\forall\, x_1,x_2\in(a,b)$ и $\forall\,\lambda\in(0,1)$ $[\ \ ]$ важи

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda\cdot f(x_1)+(1-\lambda)\cdot f(x_2)$$



„зелена дуж изнад графика"

x на дужи $[x_1,x_2]$: $\underbrace{x=\lambda\cdot x_1+(1-\lambda)x_2}_{\lambda\in(0,1)}$

$\lambda=0:\ x=x_2,\quad \lambda=1:\ x=x_1$

значи: A испод B

$$\underbrace{f(x)}\ \le\ \underbrace{y\text{-коорд тачке } B}_{\lambda\cdot f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)}$$

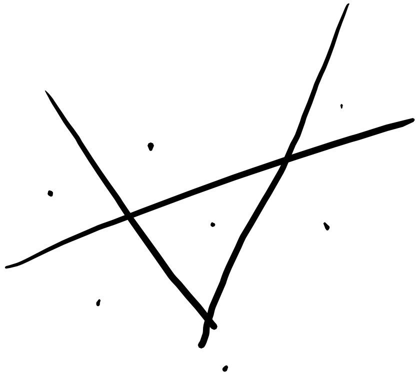
(Талесова теорема)

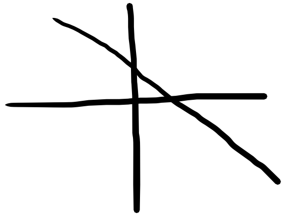
тачно услов дефиниције ☺

* домаћи ☺ n правих деле раван на max 2^n делова

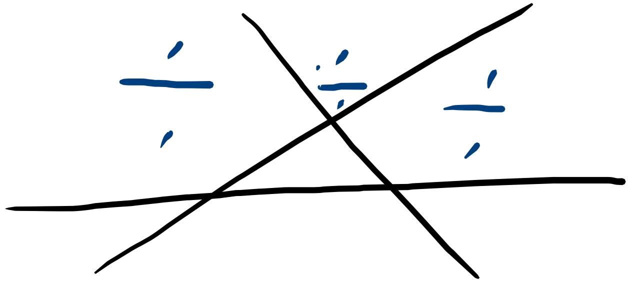
$n=1$: 1 → max 2 дела

$n \mapsto n+1$: И.Х. n правих: max 2^n





$\underline{n+1}$ n + права p



← max 2^n

p у најбољем сл. дели сваки део на 2

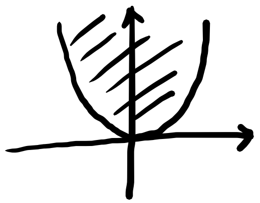
$2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна $\lambda=\frac{1}{2}$ из деф: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

Јенсенова неједнакост

f конв на (a,b) (цео $\mathbb{R}$) тада: $\forall x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$: $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

- $f(x)=x^2$ конв на $\mathbb{R}$ Јенсен: $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$



$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2\leq\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

A_n АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА

K_n КВАДРАТНА СРЕДИНА

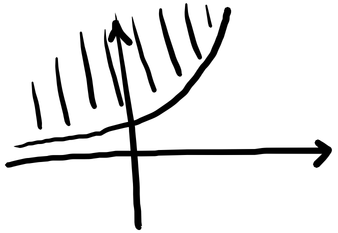
[$\sqrt{x^2}=|x|$

$x^2\leq A$

$\Downarrow$

$x\leq|x|\leq\sqrt{A}$]

• $f(x)=e^x$ конв. на $\mathbb{R}$



$$f\left(\frac{y_1+\dots+y_n}{n}\right) \leq \frac{f(y_1)+\dots+f(y_n)}{n}$$

$\left[\, a^{\frac{c}{d}} = \sqrt[d]{a^c} \,\right]$

$$\Rightarrow e^{\frac{y_1+\dots+y_n}{n}} \leq \frac{e^{y_1}+\dots+e^{y_n}}{n} \quad \forall y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{e^{y_1}\cdot e^{y_2}\cdots e^{y_n}} \leq \frac{e^{y_1}+\dots+e^{y_n}}{n}$$

$x_1=e^{y_1},\dots,x_n=e^{y_n}$ кад y пролази $\mathbb{R}$ → e^y пролази $(0,+\infty)$

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1+\dots+x_n}{n}, \quad \forall x_1,\dots,x_n>0$$

G_n геометријска средина

A_n

хармонијска средина: $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

$H_n \leq G_n$, $x_1, \dots, x_n > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \overset{?}{\leq} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$ сле поз :)

$$\overset{\frac{1}{\square}}{\Leftrightarrow} \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}}}$$

Аритм $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$

Геом за $\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_n} > 0$

$\Leftrightarrow$ T

$x_1, \ldots, x_n > 0$: $\quad \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$ $\quad$ „=" $\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$$

s: $M_s = \left(\dfrac{x_1^s + \cdots + x_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$

$$\begin{array}{ccccccc} H_n & \leq & \underline{G_n} & \leq & A_n & \leq & K_n \\ \parallel & & \overset{\text{деф}}{\parallel} & & \parallel & & \parallel \\ M_{-1} & & M_0 & & M_1 & & M_2 \end{array}$$

$s \leq t \Rightarrow M_s \leq M_t$

1. $x_1, \ldots, x_n > 0 \Rightarrow (x_1 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$

директно из $H_n \leq A_n$.

② доказати:

а) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

б) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

идеја $\underbrace{1,2,2,3,3,3,\ldots,\underbrace{n,\ldots,n}_{n}}_{\frac{n(n+1)}{2}\text{ бројева}}$ A_n, G_n, H_n

Коши-Шварцова неједнакост:

$a_1,\ldots,a_n, b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}$: $(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2)$

Неједнакост Δ: $x,y\in\mathbb{R}$: $|x+y|\le|x|+|y|$

$\leadsto$ $x_1,x_2,\dots,x_n$: $\boxed{|x_1+\dots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|}$

1) $n=2$: $|x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|$ ✓

2) $n\mapsto n+1$ ИНД. ХИП.: важи за n

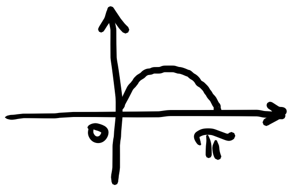
за $n+1$: $|x_1+\dots+x_n+x_{n+1}|\overset{?}{\le}\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|$

$$|\underbrace{x_1+\dots+x_n}+\underbrace{x_{n+1}}|\overset{\Delta}{\le}|x_1+\dots+x_n|+|x_{n+1}|$$

$$\overset{\text{И.Х.}}{\le}\sum_{i=1}^{n}|x_i|+|x_{n+1}|$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}|x_i| \quad ✓$$

③ $x_1,\dots,x_n \in [0,\pi]$ доказати: $|\sin(x_1+\dots+x_n)| \le \sin x_1+\dots+\sin x_n$ ⊛



индукција по n:

1) $n=1$: $\quad |\sin x_1| \le \sin x_1$

важи $=$ јер $\sin x_1 \ge 0$ за $x_1 \in [0,\pi]$ ✓

2) $n \mapsto n+1$ $\quad$ и.х. важи за n ⊛

за $n+1$: $$\left|\sin(x_1+\dots+x_n+x_{n+1})\right| = \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\cos x_{n+1} + \cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \sin x_{n+1}\right|$$

$$\overset{\text{нјд}\Delta}{\le} \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right|\cdot\underbrace{|\cos x_{n+1}|}_{\le 1} + \underbrace{\left|\cos\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right|}_{\le 1}\cdot\underbrace{|\sin x_{n+1}|}_{=\sin x_{n+1} \text{ јер } x_{n+1}\in[0,\pi]}$$

$|\cos t| \le 1$

$a \ge 0$

$a\cdot|\cos t| \le a$

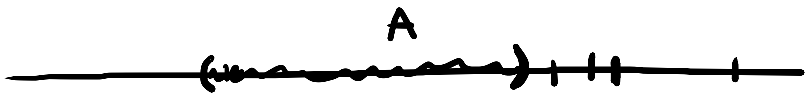
$$\le \left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| + \sin x_{n+1}$$

$$\overset{\text{и.х.}}{\le} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i + \sin x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \sin x_i \quad ✓$$

1),2) $\overset{\text{м.и.}}{\Longrightarrow}$ важи за $\forall n$ □

Супремум и инфимум

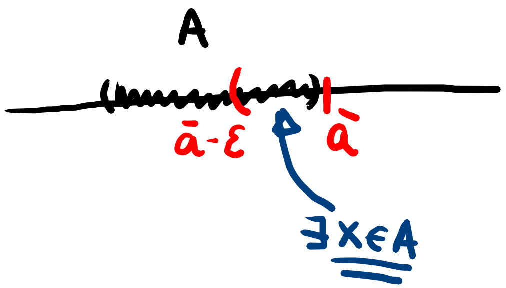
$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$



A - ограничен одозго, $A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\exists$ супремум $\boxed{\sup A}$ (АКСИОМА СУПРЕМУМА)

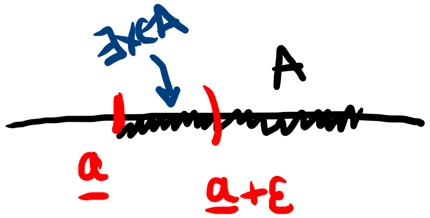
$\sup A$ = најмање горње ограничење

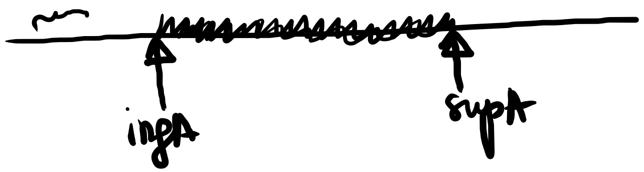
$$\bar{a} = \sup A \iff \begin{cases} 1^\circ \text{ горње огр: } (\forall a \in A)\ a \leq \bar{a} \\ 2^\circ \text{ најмање: } (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ \bar{a} - \varepsilon < x \end{cases}$$



A - ограничен одоздо, $A \neq \emptyset$ $\rightarrow$ $\exists$ инфимум $\boxed{\inf A}$ - највеће доње ограничење

$$\underline{a} = \inf A \iff \begin{cases} 1^\circ\ (\forall a \in A)\ a \geq \underline{a} \\ 2^\circ\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ x < \underline{a} + \varepsilon \end{cases}$$





$\alpha = \max A \iff (\forall a \in A)\ a \le \alpha \ \wedge\ \underline{\underline{\alpha \in A}}$

- $\alpha = \max A \Rightarrow \alpha = \sup A$

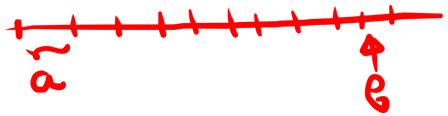
  $\not\Leftarrow$

- $\alpha = \sup A,\ \alpha \in A \Rightarrow \alpha = \max A$
- $\alpha = \sup A,\ \alpha \notin A \Rightarrow \neg\exists \max A$

$1 = \sup(0,1)$

= за вежбу inf vs. min ☺

= Архимедова аксиома: (теорема) $\forall a,b \in \mathbb{R}\ \ a>0\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ n \cdot a > b$



1. Одредити sup, inf, min, max (ако постоје) следећих скупова:

a) $A=\{2-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ $\qquad 2-1=1,\ 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 2-\frac{1}{3}, \dots$

$\boxed{\inf}$ $\qquad \boxed{1=\min A}$

$1\in A$ ✓

$1\le 2-\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ✓

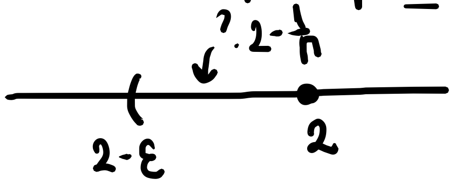
?

$1=\min A \Rightarrow \boxed{1=\inf A}$

$\boxed{\sup A}$ Докажимо да је $2=\sup A$:

1° горње огр: $2-\frac{1}{n}<2,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ✓

2° најмање горње огр. $\overset{?}{=}$ $\qquad \varepsilon>0$ фикс. доказујемо да $\exists x\in A$ тд. $x>2-\varepsilon$



тј. ? постоји $n\in\mathbb{N}$ $\quad 2-\frac{1}{n}>2-\varepsilon$

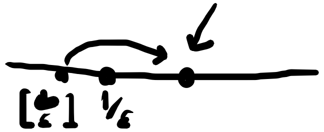
$\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{N})\ \ \varepsilon>\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{N})\ \ n\cdot\varepsilon>1 \Leftrightarrow$ Т из Арх. акс. ✓

На пример:

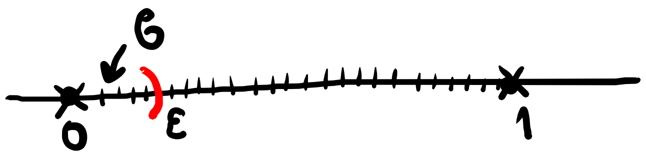
$n>\frac{1}{\varepsilon}$

$n_0=[1/\varepsilon]+1$



1°, 2° $\Rightarrow \boxed{2=\sup A}$ $\qquad 2\notin A \Rightarrow \boxed{\nexists \max A}$

б) $B=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{N},\ m<n\right\} = \mathbb{Q}\cap(0,1)$



$\boxed{0=\inf B}$

1° $\frac{m}{n}>0,\ \forall m,n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ 0 јесте доње огр. ✓

2° највеће доње огр.

$\varepsilon>0$ фикс. → показујемо да $\exists\, b\in B$ тд. $b<0+\varepsilon=\varepsilon$

? $\exists\, m_0,n_0\in\mathbb{N}$ $m_0<n_0$ и $\frac{m_0}{n_0}<\varepsilon$

узмемо: $m_0=1$

? $n_0>1$ тд. $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

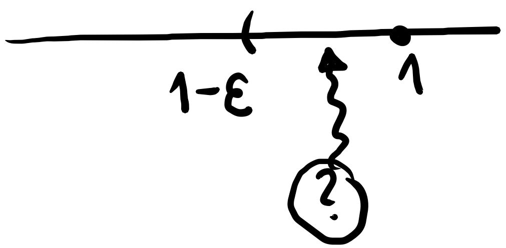
$\Leftrightarrow n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ можемо узети $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

Нашли смо m_0, n_0 за ε тд. $\frac{m_0}{n_0}<\varepsilon$

тако можемо за $\forall\varepsilon>0$ ✓

1°, 2° $\Rightarrow$ $\boxed{0=\inf A}$ $\quad 0\notin A \Rightarrow \neg\exists \boxed{\min A}$

$\boxed{1=\sup A}$ 1° $\frac{m}{n}<1$, $\forall m,n$, $m<n$

2° 

$\varepsilon>0$ фикс.

$?\exists\, m_0, n_0$, $m_0<n_0$

$$\frac{m_0}{n_0}>1-\varepsilon$$

$$m_0=n_0-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_0-1}{n_0}>1-\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{n_0}>1-\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon>\frac{1}{n_0}$$

$\exists n_0$ ✓

$1\notin A$, $1=\sup A$ $\Rightarrow$ $\boxed{\neg\exists \max A}$

б) $C = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{N} \right\}$

$N \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{N}{1} + \frac{1}{N} \in C \quad \frac{N}{1} + \frac{1}{N} \geq N$ $\Rightarrow$ C није ор. одозго

$\Rightarrow \boxed{\neg\exists \sup C,\ \neg\exists \max C}$

доње ограничење: $0 < \frac{m}{n} + \frac{n}{m}, \ \forall m,n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ C ор. одоздо, $\exists \inf C$

$m=n \quad \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 2 \in C$

$\underbrace{\frac{m}{n}}_{=a} + \underbrace{\frac{n}{m}}_{=\frac{1}{a}} \geq 2, \ \forall m,n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \boxed{2 = \min C = \inf C}$

$a > 0 \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$

[illegible]

$\square$