Математичка индукција

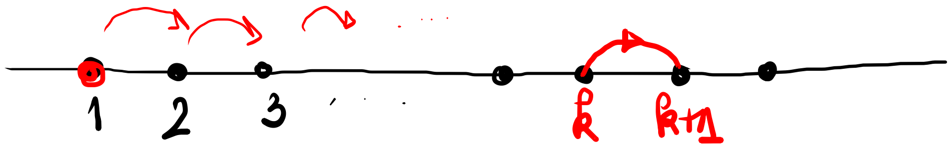
P – неко својство

1) БАЗА $P(1)$ тј. P важи за 1

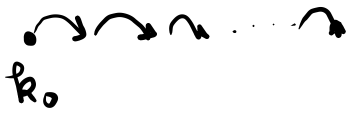
2) $\underbrace{P(k)}_{\text{инд. хипотеза}} \Rightarrow P(k+1)$ индуктивни корак

$\forall k \geq 1$

1), 2) $\Rightarrow$ важи за све $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$



- $P(k_0)$ важи
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall k \geq k_0$



$\Rightarrow$ важи за све $k \geq k_0$

в) База: $n=1$ $\quad 1^3=\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$ ✓ $\qquad \ulcorner P(n):\ 1^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \lrcorner$

Грешком су ова и следећа стана замениле места :)

$n\mapsto n+1$: и.х. важи $P(n)$

за $n+1$: $\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}_{\text{за } n}+(n+1)^3 \overset{\text{и.х.}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{1}{4}(n+1)^2\left(\underbrace{n^2+4(n+1)}_{=(n+2)^2}\right)$

$=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ ✓

Дакле ако важи $P(n)$, важи и $P(n+1)$.

мат. инд. $\Rightarrow$ важи за све $n\in\mathbb{N}$.

г) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

I начин: мат. инд.

II начин: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\underbrace{\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}}+\dots+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ ✓

① докажите

а) $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ $\underline{P(n)}$

б) $1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

в) $1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

г) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

д) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

а) 1) $\boxed{\text{база}}$ $n=1$: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ ✓ $P(1)$ важи

2) $\boxed{n\mapsto n+1}$ инд. хипотеза: важи $P(n)$ $1+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

знаемо да док. $P(n+1)$: $\underbrace{1+\dots+n}_{\text{за } n}+(n+1)\overset{?}{=}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{\text{за } n}+(n+1)\overset{\text{инд. хип.}}{=}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{(n+1)}{2}(n+2)$$ ✓ важи за $n+1$

1), 2) $\Rightarrow$ важи за све $n\in\mathbb{N}$.

① Гаус:

$$S=1+2+\dots+(n-1)+n$$
$$S=n+(n-1)+\dots+2+1$$

$$\left|\begin{array}{c} k \\ n+1-k \\ \hline n+1 \end{array}\right|$$

$2S=n\cdot(n+1)$

$\Rightarrow S=\frac{n(n+1)}{2}$

② Док. да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи да је број $A_n = \underline{\underline{(n+1)}}\underbrace{(n+2)\cdots(n+n)}$ дељив са 2^n, а није дељив са 2^{n+1}.

$P(n)$: $2^n \mid A_n$ и $2^{n+1} \nmid A_n$

1) База: $n=1$: $A_1 = 1+1 = 2$ $\quad 2^1 \mid 2$ ✓ $\quad 2^2 \nmid 2$ ✓

2) $\boxed{n \mapsto n+1}$ И.Х. важи $P(n)$

за $n+1$: $A_{n+1} = \underbrace{(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+1+n-1)}\cdot(n+1+n)\underbrace{(n+1+n+1)}_{2\underline{\underline{(n+1)}}}$

$$A_{n+1} = A_n \cdot 2(2n+1)$$

$\underline{\underline{\text{И.Х.}}}$ $A_n = 2^n \cdot q$ $\rightarrow$ $A_{n+1} = 2^n \cdot q \cdot 2\cdot(2n+1) = \underline{\underline{2^{n+1}}}\cdot \underbrace{q\cdot(2n+1)}_{\text{непарно}}$ $\Rightarrow$ $2^{n+1} \mid A_{n+1}$, $2^{n+2} \nmid A_{n+1}$ ✓✓

q непарно

$\boxed{1), 2) \Rightarrow P(n) \text{ важи за све } n \in \mathbb{N}}$

☺ $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ p_i-разл.

$p_1^{\alpha_1} \mid k$, $p_1^{\alpha_1+1} \nmid k$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad \underbrace{2^2 \mid 36,\ 2^{2+1} \nmid 36}$

$2^2 \parallel 36$ „тачно дели"

③ а) док. че за $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$

б) $n \geq 2$: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

вкъщи { в) $n \geq 5$: $2^n > n^2$

г) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1\cdot 3\cdot \dots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot(2n)} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+1}}$

а) $P(n)$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$

1) База $n=1$: $\frac{1}{\sqrt{1}} \overset{?}{>} 2(\sqrt{2}-1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \sqrt{2}-1$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} > \sqrt{2} \quad /^2$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} > 2 \Leftrightarrow$ T

2) $n \mapsto n+1$ Вярно за n (И.Х.)

за $n+1$: $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{за } n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{>} \underbrace{2(\sqrt{n+2}-1)}_{B}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{И.Х.}}{>} \underbrace{2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{A}$

Било би лесно да $A > B$ ☺

$a+b \overset{?}{>} b$

$\overset{\vee}{c}$

$a+b > c+b$

било би лесно да $c+b > b$

$$A \overset{?}{>} B$$

$$2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{>} 2(\sqrt{n+2}-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n+1}-\cancel{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2}-\cancel{2} \qquad / \cdot \sqrt{n+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(n+1)+1 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n+3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \qquad /^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n^2+12n+9 > \underbrace{4(n+1)(n+2)}_{4n^2+12n+8}$$

$$\Leftrightarrow \quad T$$

$$\Rightarrow \text{важи: } \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2}-1) \quad \text{за } n+1 \ \checkmark$$

$$1), 2) \Rightarrow \text{важи за } \forall n \in \mathbb{N}$$

δ) $n \geq 2$: $\quad \dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

1) $n=2$: $\quad \dfrac{4^2}{3} < \dfrac{4!}{(2!)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{3} < 6 \Leftrightarrow$ T ✓

2) $n \mapsto n+1$ $\quad$ И.Х.: за n $\quad \underbrace{4^n \cdot (n!)^2}_{A_n} < \underbrace{(n+1) \cdot (2n)!}_{B_n}$

хоћемо за $n+1$:

$$\underbrace{4^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}_{A_{n+1}} \overset{?}{<} \underbrace{(n+2)(2n+2)!}_{B_{n+1}}$$

$$A_{n+1} = \underbrace{4^n \cdot (n!)^2}_{A_n} \cdot 4 \cdot (n+1)^2 \underset{A_n < B_n}{\overset{\text{И.Х.}}{<}} (n+1) \cdot (2n)! \cdot 4 \cdot (n+1)^2$$

Било би лепо
да је мање од B_{n+1}

$$4\cdot(n+1)^3\cdot(2n)! \overset{?}{\leq} (n+2)\cdot(2n+2)! \qquad /:(2n)!$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(n+1)^3 \leq (n+2)(2n+1)(2n+2) \qquad /:(2n+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(n+1)^2 \leq (n+2)(2n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^2+4n+2 \leq 2n^2+5n+2$$

$$\Leftrightarrow \quad T$$

$\Rightarrow$ важи $A_{n+1} < B_{n+1}$ тј. тврђење важи за $n+1$

1) 2) $\Rightarrow$ важи за све $n \geq 2$

4. Доказати

а) $\forall n\in\mathbb{N}\quad 7 \mid 2^{n+1}+3^{2n-1}$

б) $\forall n\in\mathbb{N}\quad 133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$

вежба

а) I начин: $\equiv ? \mod 7$

2^1
2^2
2^3
2^4
$\vdots$

✓

II начин: индукција

1) $n=1$: $\quad 7 \mid 2^2+3^1=7$ ✓

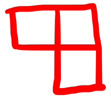
2) $n\mapsto n+1$: $\quad$ и.х. $\quad 7 \mid A_n = 2^{n+1}+3^{2n-1}$

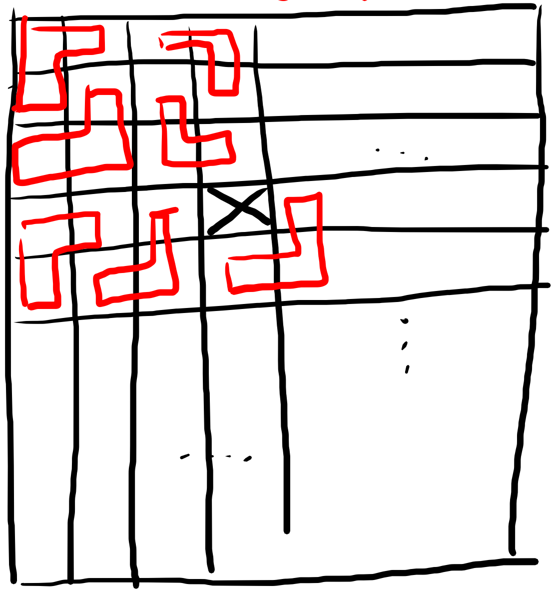
за $n+1$: $\quad 7 \overset{?}{\mid} A_{n+1}$

$$A_{n+1} = 2^{n+1+1}+3^{2(n+1)-1} = 2^{n+2}+3^{2n+1} = 2\cdot 2^{n+1}+\underset{2+7}{\underbrace{3^2}}\cdot 3^{2n-1}$$

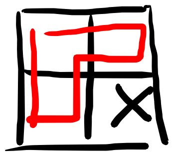
$$= 2\cdot\underbrace{(2^{n+1}+3^{2n-1})}_{A_n\text{ - дељив са 7 по и.х.}} + 7\cdot 3^{2n-1} \Rightarrow 7 \mid A_{n+1}$$ ✓

1), 2) $\Rightarrow$ важи за $\forall n\in\mathbb{N}$

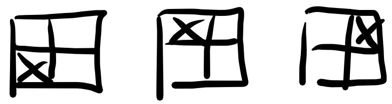
5) Док. да се табла $2^n \times 2^n$ без 1 поља се може поплочати са:  (рађ ш) без преклапања.



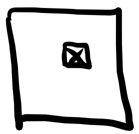
1) База: $n=1$: $2^1 \times 2^1$



тачно остаје 1 фигура ✓

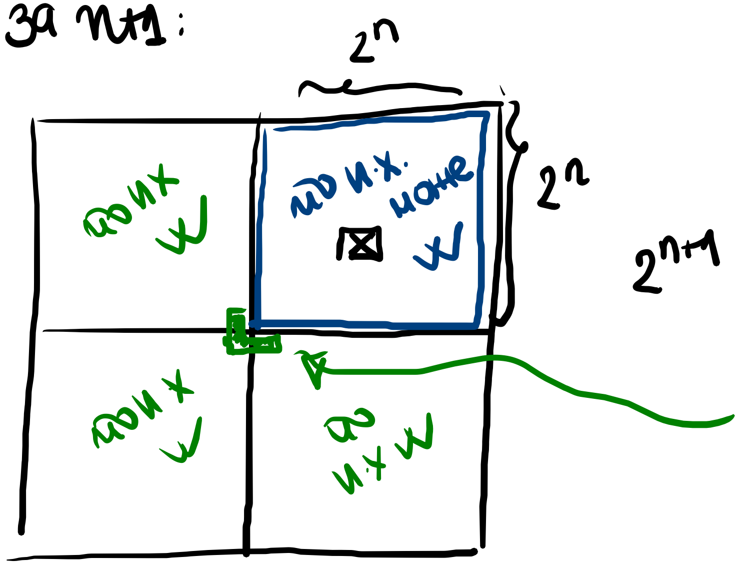


2) $n \mapsto n+1$ (И.Х.) важи за n



$2^n \times 2^n$

за $n+1$:



ставимо сами 1 фигуру

✓ за $n+1$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$

1), 2) ⇒ за ∀ $\forall n$

„Доказ" да су сви природни бројеви једнаки

ЛЕМА $k,l,n\in\mathbb{N}\quad \max(k,l)=n \Rightarrow k=l=n$

индукција по n: 1) $n=1$

$k,l\in\mathbb{N}\quad \max(k,l)=1 \Rightarrow k=l=1$ ✓

$\max(1,1)=1$ ✓

$\max(1,2)=2 \quad /-1$

$\max(1-1,2-1)=1$

$\max(0,1)=1$

$\cancel{\text{ИХ}\Rightarrow}$

2) $n\mapsto n+1$

ИХ за n: $k,l\in\mathbb{N}\quad \max(k,l)=n \Rightarrow k=l=n$

за $n+1$:

$\max(k,l)=n+1$, $k,l\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \max(k-1,l-1)=n$ $\quad k-1, l-1$ не морају бити у $\mathbb{N}$! не можемо применити ИХ.

$\cancel{\overset{\text{ИХ}}{\Rightarrow}}\ k-1=l-1=n \overset{+1}{\Rightarrow} k=l=n+1$ важи за $n+1$ ✓ □

1), 2) $\Rightarrow$ важи за све $n\in\mathbb{N}$.

Из леме:

$\max(1,2)=2 \overset{1.}{\Rightarrow} 1=2$

$\vdots$

$\max(n,n+1)=n+1 \Rightarrow n=n+1$

$\Big\}\ 1=2=3=\cdots=n=n+1=\cdots$

сви једнаки :)

Биномни коефицијенти

$n,k \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

$0! = 1 \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k}$ = бр. начина да од n елемената изаберемо k одједном

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-(k-1))}{k} \Rightarrow \binom{n}{k}$$

начина ✓

бр. начина да k елем. распоредимо у ред

$$\frac{k}{1}\cdot\frac{(k-1)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{k-1}\cdot\frac{1}{k} = k!$$

(I) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

бр. начина да узмемо k = бр. начина да оставимо $n-k$

II начин: $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b) = \sum_{k=0}^{n} (?)\, a^{n-k}\cdot b^k$

бр начина да од n заграда изабере k у којима узимамо b (остале $\to a$)

$$(?) = \binom{n}{k}$$

Паскалов троугао:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

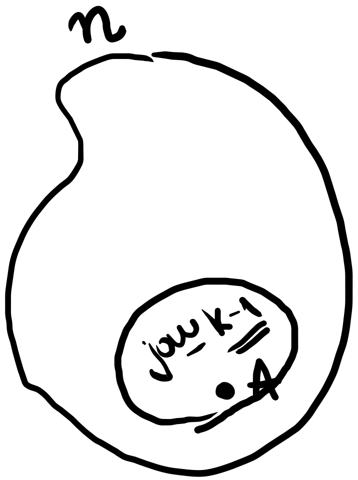
$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

$(a+b)^n \to$

② $$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}, \quad n,k \geq 1, \; n \geq 2$$

1 начин: аналитички

2 начин: комбинаторно:



бирамо k студената од n

уочимо неки A

$\binom{n}{k}$ = бр. начина да смо изабрали A + бр. начина да нисмо изабрали A

= од преосталих $n-1$ бирамо $k-1$ + од $n-1$ бирамо свих k

$$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Њутнова биномна формула

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, ...

$n\in\mathbb{N}$: $(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n}_{a^n} + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}b^n}_{b^n}$ $(*)$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

ИНД: $n=1$: $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a+b$ ✓

$n \longmapsto n+1$: НХ важи $(*)$ за n

за $n+1$: $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$

$$= \left(a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n\right)(a+b)$$

$$= a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k+1}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \overset{\binom{n}{n}}{b^n a}$$

$$\binom{n}{0}a^n\cdot b + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{k}\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\cdot b^k \quad ✓$$

важи за $n+1$

$\Rightarrow$ важи за се $n \in \mathbb{N}$

⊛ ТРАНСФИНИТНА ИНДУКЦИЈА:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P(1)\ T \\ 2)\ P(1), P(2), \ldots, P(k) \Rightarrow P(k+1),\ \forall k \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow P(k),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

6) Дат је низ $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + 2a_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Док: $a_n = 2^n$

1) $n=0$: $a_0 = 1 = 2^0$ ✓

2) И.Х. важи за $0, 1, \ldots, k$ за неке $k \geq 0$: $a_i = 2^i$ $i = 0, \ldots, k$

за $k+1$: $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1 + 2a_0$

$$\overset{\text{И.Х.}}{=} 2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2$$

$$= \underbrace{2^k + \cdots + 2^1 + 1}_{\frac{2^{k+1}-1}{2-1} = 2^{k+1}-1} + 1 = 2^{k+1}$$

$\left[\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1}\ \right]$ $\boxed{q \neq 1}$

$$\left.\begin{array}{l} S = 1 + q + \cdots + q^n \\ qS = q + \cdots + q^n + q^{n+1} \end{array}\right\} -$$

1), 2) $\Rightarrow$ важи за све $n \in \mathbb{N}$

са више прети:

1) $P(1), P(2)$

2) $P(n), P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ за $\forall n \in \mathbb{N}$

За вежбу:

1. Низ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$, $\forall n \geq 3$

   Док. да важи: $x_n = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. За $\forall n \geq 2$ $\cos \frac{\pi}{2^n}$ ирационалан ← доказати

3. Док. да n правих деле раван на максимално 2^n делова.