Функције - обнављање

$f: A \to B$ — A: домен, B: кодомен

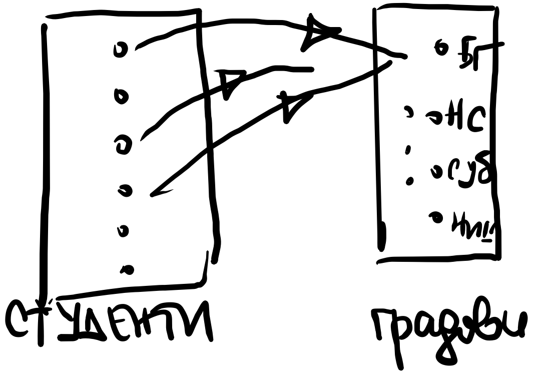
$f(x) = \dots$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ дефинисано}\}$ — D_f: домен

$a \in A$

$a \mapsto f(a) \in B$

сваком ел. A — тачно 1



$\boxed{f \text{ је НА}}$ сурјективна

$\Leftrightarrow (\forall b \in B)(\exists a \in A)\ f(a) = b$

$\boxed{f \text{ је 1-1}}$ инјективна $\quad (\forall a_1, a_2 \in A)\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$\Leftrightarrow (\forall a_1, a_2 \in A)\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

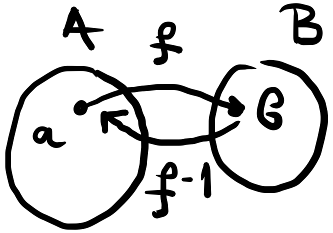
закон контрапозиције

f 1-1 и НА $\to$ $\boxed{f \text{ је бијекција}}$

A и B имају исти број елемената $\Leftrightarrow$ $\exists$ бијекција $f : A \to B$

$$|A| = |B|$$

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$$



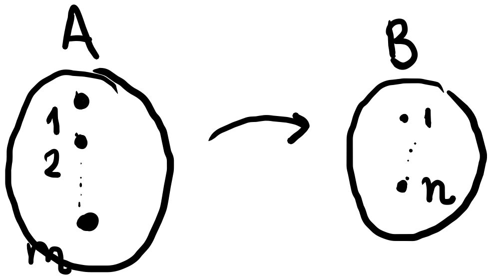
- $f : A \to B$ бијекција $\Rightarrow$ $\exists$ инверз $f^{-1} : B \to A$

$a \mapsto \underset{f(a)}{\underset{\shortparallel}{b}} \in B$ $\qquad$ $b \mapsto \underset{f^{-1}(b)}{\underset{\shortparallel}{a}}$

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_A = id_A \qquad f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_B = id_B$$

$\boxed{1}$ $|A| = m,\ |B| = n \quad m, n \in \mathbb{N}$

(а) Колико има ф-ја $f : A \to B$?



B^A – скуп свих ф-ја из A у B

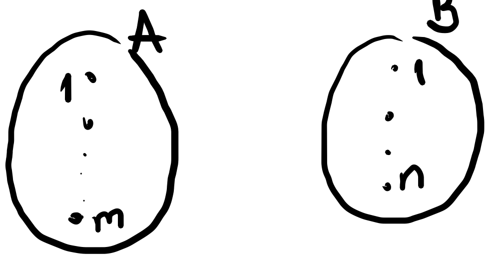
n^m

$1 \in A$ $\to$ 1, 2, ..., n $\quad$ n избора

$2 \in A$ $\quad$ n избора

$$\underset{1}{n} \cdot \underset{2}{n} \cdot \underset{3}{n} \cdots \underset{m}{n} = n^m$$

1б) Колико има 1-1 фја из A у B?



$m > n \Rightarrow$ нема 1-1 фја

$m \le n$:

$1 \in A$: n избора $f(1)$

$2 \in A$: $n-1$ избора

$\vdots$

$k \in A$: $n-(k-1)$

$\vdots$

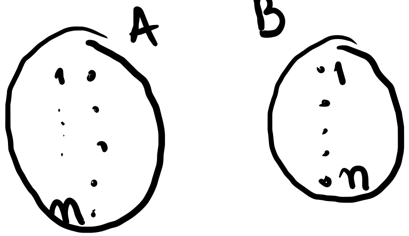
$m \in A$: $n-(m-1) = n-m+1$

$$\boxed{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}$$

1в) Колико има бијекција из A у B?

$m \neq n \rightarrow$ нема бијекција

$m = n$:



$|A| = |B|$ свака 1-1 фја је НА! свака НА фја је 1-1!

$n=m$: $n(n-1)\cdots(\underbrace{n-n+1}_{1}) = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$

$$\underbrace{n}_{1}\cdot\underbrace{n-1}_{2}\cdots\underbrace{\overbrace{n-(n-1)}^{1}}_{n} = n!$$

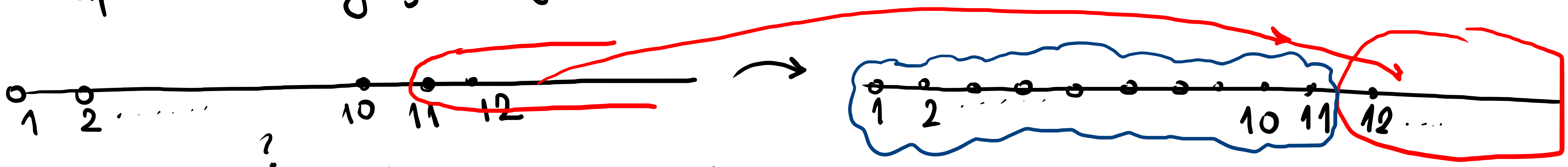
2. Да ли постоји $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ која је НА и за $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n+5) \geq 2n$?

$f(n+5) \geq 2n$
$m = n+5$
$n = m-5$
$n \geq 1 \to m \geq 6$

$\rightsquigarrow$ $f(m) \geq 2(m-5)$

$\boxed{f(m) \geq 2m-10, \ \forall m \geq 6}$ (*)

Претпоставимо да f постоји: НА и (*)



$2m-10 \overset{?}{>} m \iff m > 10 \iff m \geq 11$

за $m \geq 11$ важи $f(m) \geq 2m-10 > m = 11$

за све $m \geq 11$ $f(m) \geq 12$

Ко може да се слика у $\{1,2,\dots,11\}$?
нешто од $\{1,2,\dots,10\}$

$\Rightarrow f$ није НА ↯

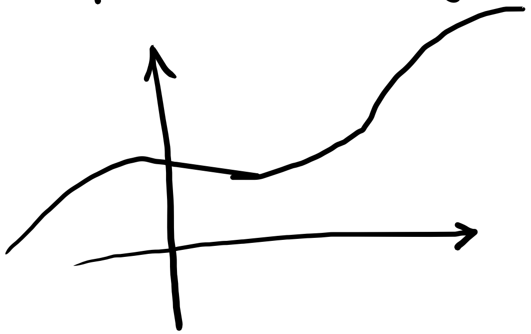
таква f не постоји

График функције

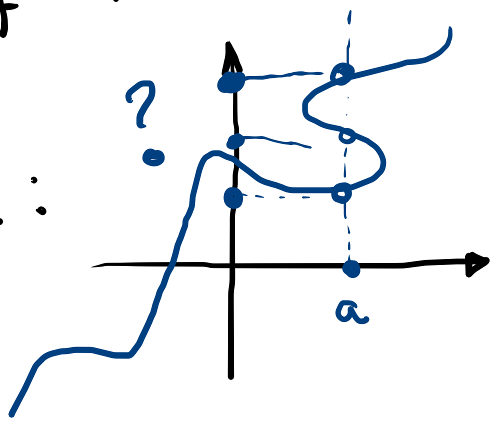
$f:A\to B$ график $\Gamma_f \subset A\times B$ $\quad \Gamma_f = \{(a,b)\in A\times B \mid b=f(a)\}$

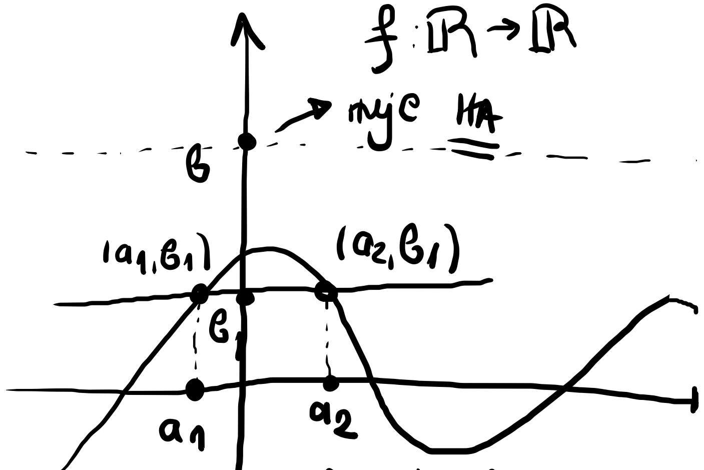
$$= \{(a,f(a))\in A\times B \mid a\in A\}$$

график реалне ф-је $f:A\to\mathbb{R}$ $\quad A\subset\mathbb{R}$ $\quad \Gamma_f\subset\mathbb{R}^2$



није график:





$f(a_1)=f(a_2)$

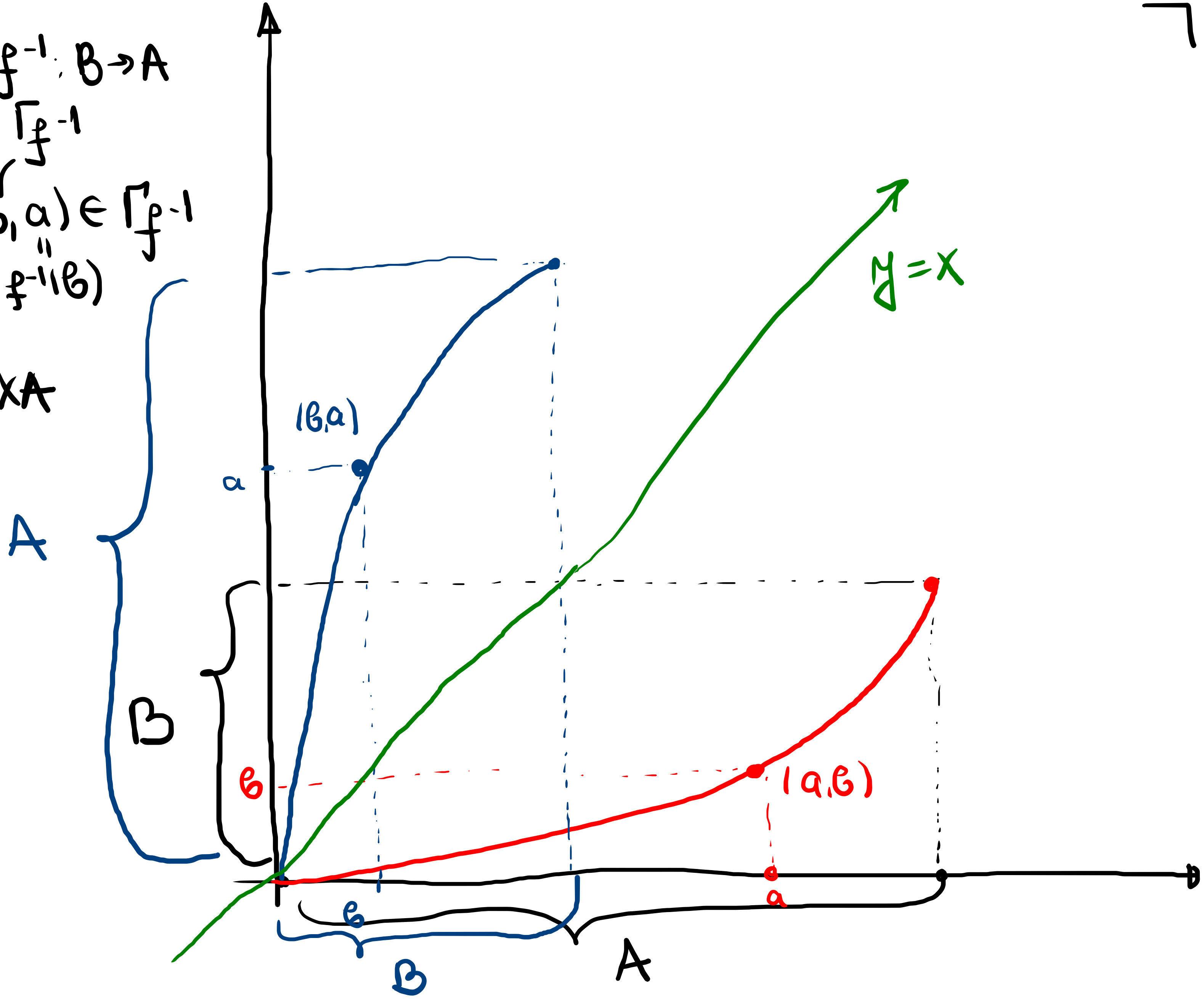
$\Rightarrow$ није 1-1

$f: A \to B$ bijekcija $\to \exists f^{-1}: B \to A$

Γ_f $\qquad\qquad$ $\Gamma_{f^{-1}}$

$(a, b) \in \Gamma_f$, $b = f(a)$ $\qquad\qquad$ $(b, a) \in \Gamma_{f^{-1}}$, $a = f^{-1}(b)$

$\Gamma_f \subset A \times B \to \Gamma_{f^{-1}} \subset B \times A$



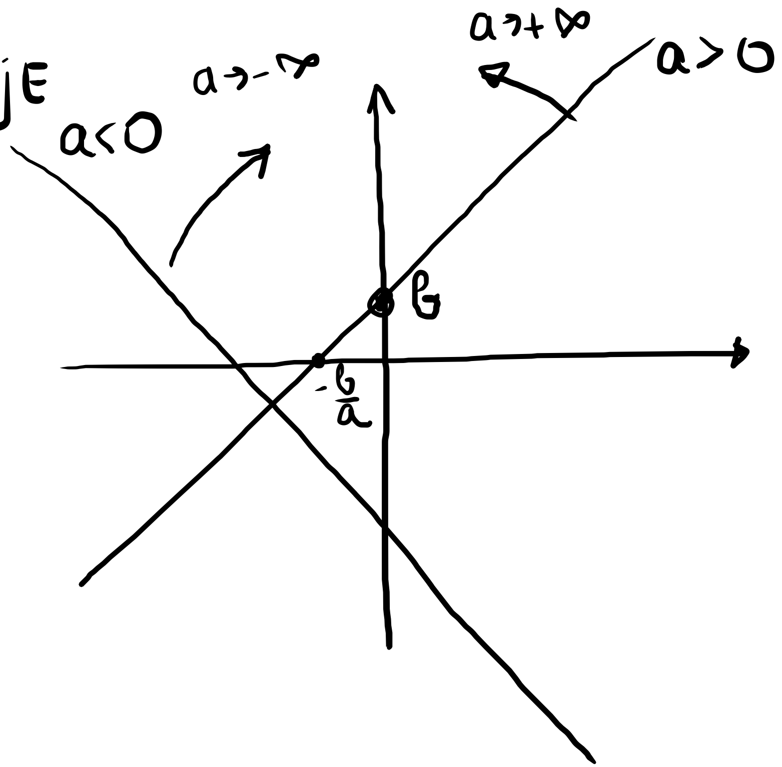
ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

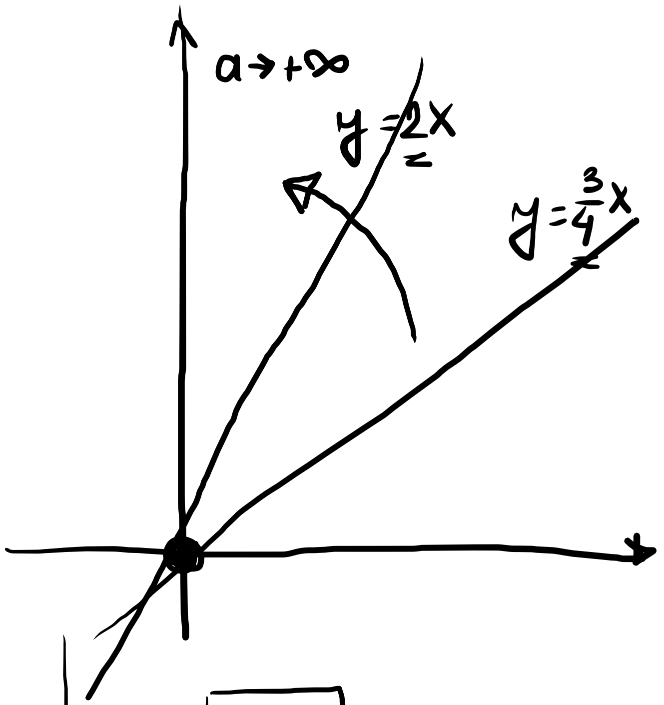
I) ЛИНЕАРНА ф-ја

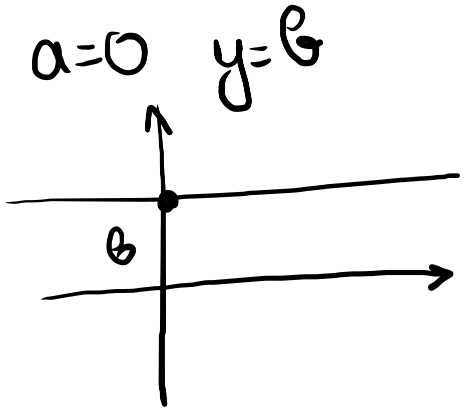
$y = ax + b$

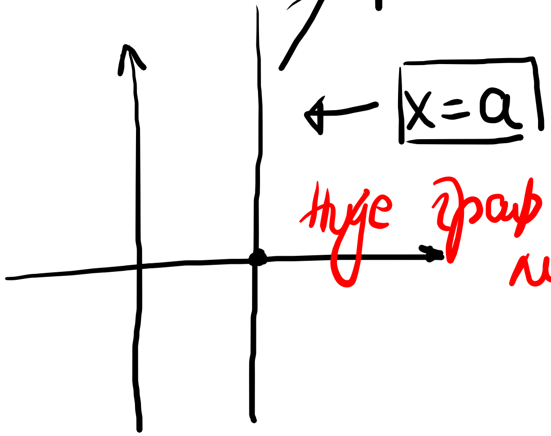
$\|$

$f(x)$







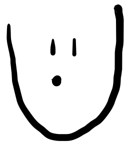


није график лин. ф-је

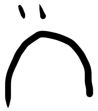
I КВАДРАТНА ф-ја

$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$a > 0$:

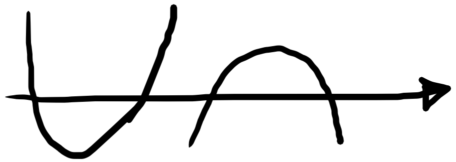


$a < 0$:

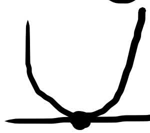


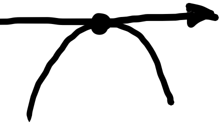
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad D = b^2 - 4ac > 0$$

$x_1 \neq x_2$: $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$

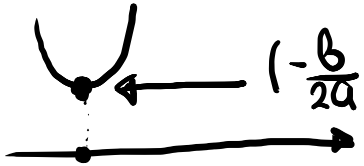


$\underline{\underline{x_1 = x_2 = x_0}}$: $f(x) = a(x - x_0)^2$

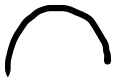




$D < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$

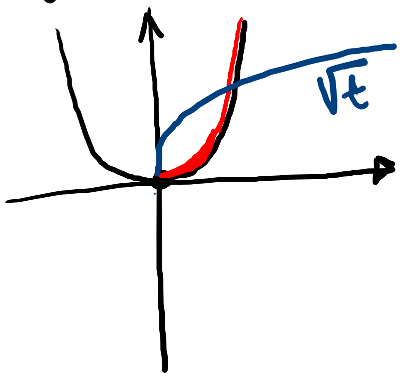


$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$



инверзна ?

$y=x^2$



$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$

$f(x)=x^2$ бијекција

$\to \exists$ инверз $f^{-1}(t)=\sqrt{t}$

$f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$

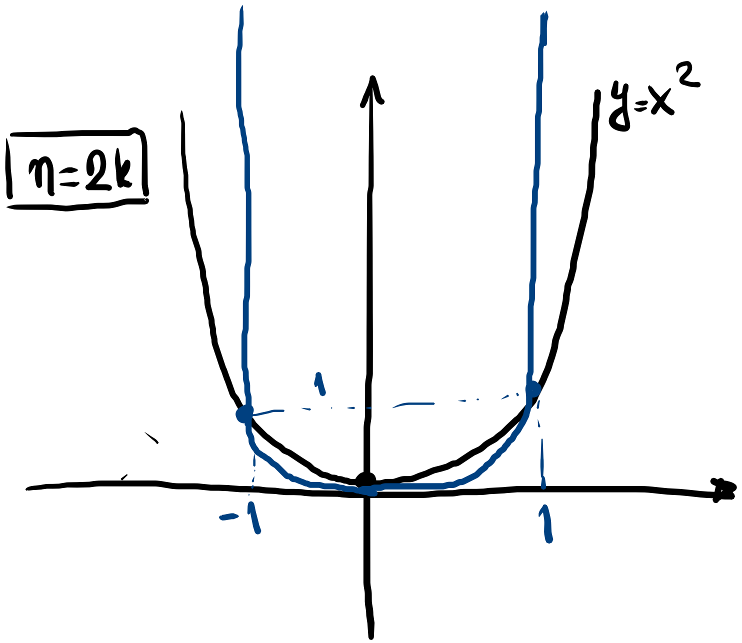
$\overset{\Psi}{4}$ $\sqrt{4}=2$

$\sqrt{4}\neq -2 \quad (-2)^2=4$

III $f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

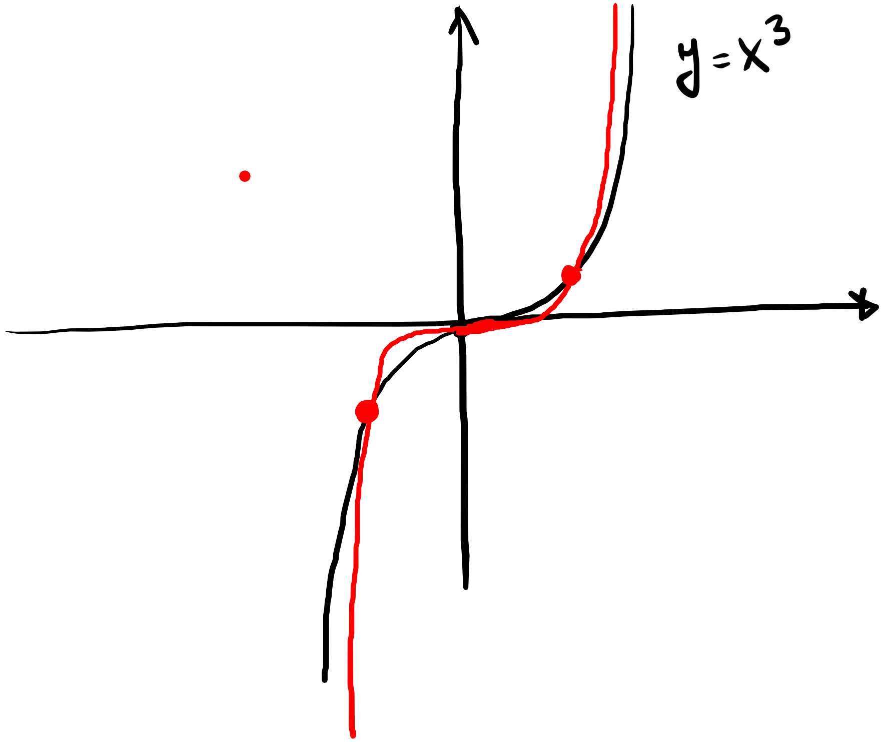
$x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \ldots$

$\boxed{n=2k}$



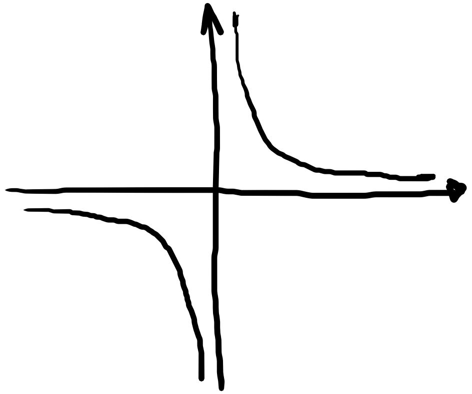
$1000^4 > 1000^2$

$\left(\frac{1}{1000}\right)^4 < \left(\frac{1}{1000}\right)^2$



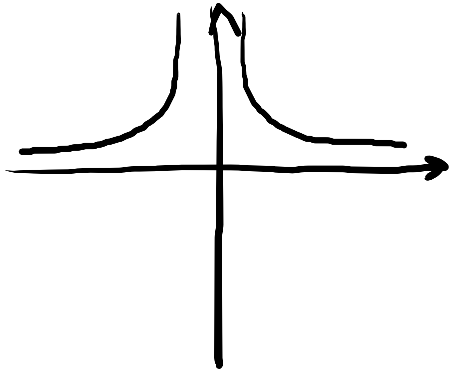
IV $y = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$

$\boxed{n = 2k+1}$ $y = \frac{1}{x}$



за вежбу:
$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^5}$

$\boxed{n = 2k}$



Ⅵ ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА

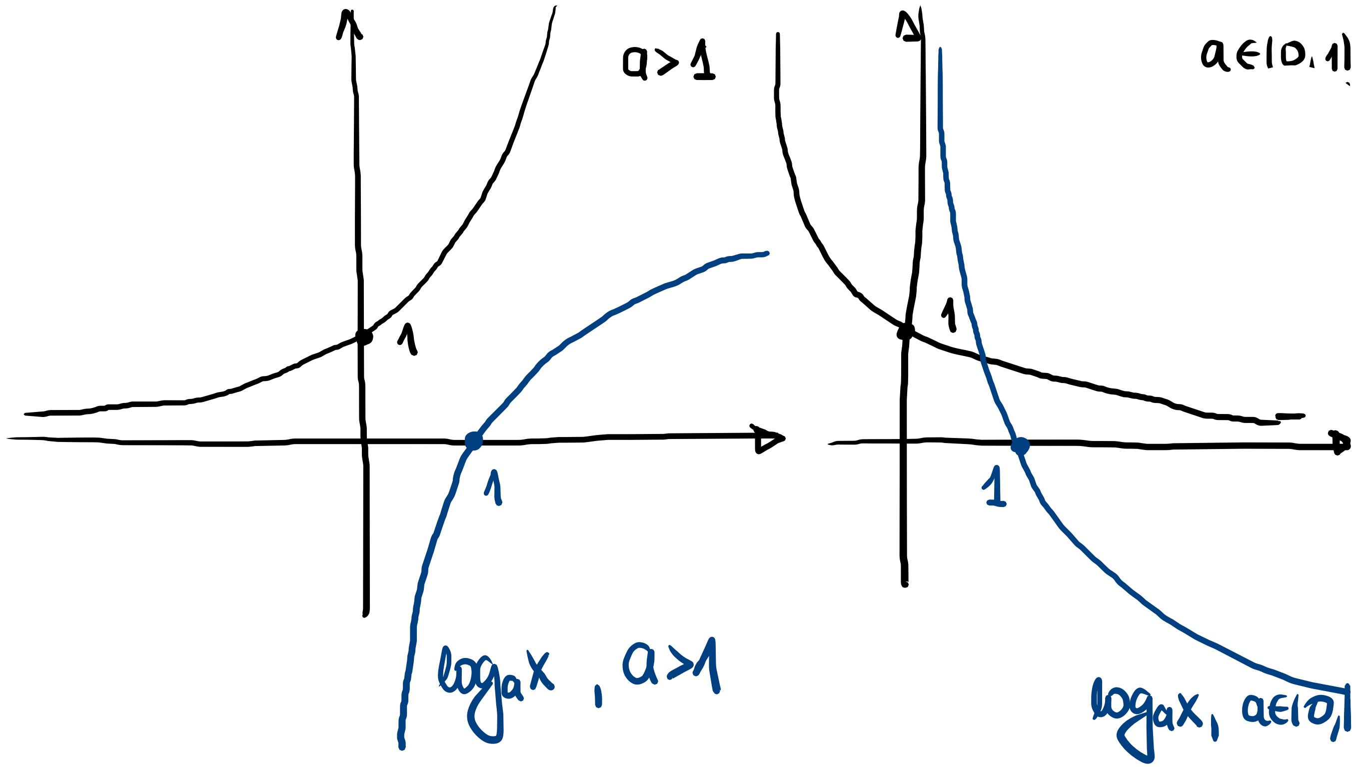
$f(x)=a^x \;,\; a>0 \,,\; a\neq 1$

$f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$

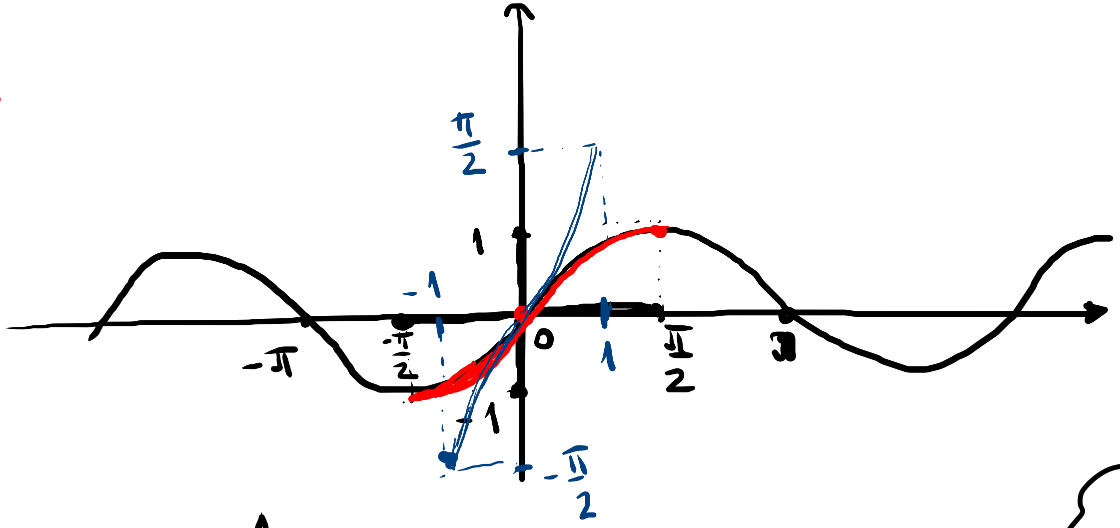
бијекција

инверзна

$g(x)=\log_a x \;,\; g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$



VI $f(x)=\sin x$



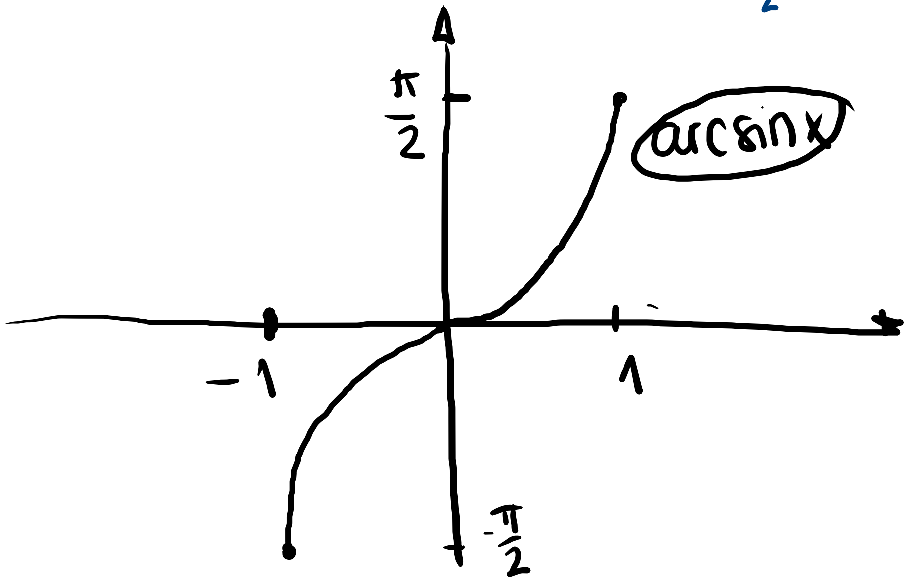
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~НА~~, ~~1-1~~

$\mathbb{R} \to [-1,1]$ НА, ~~1-1~~

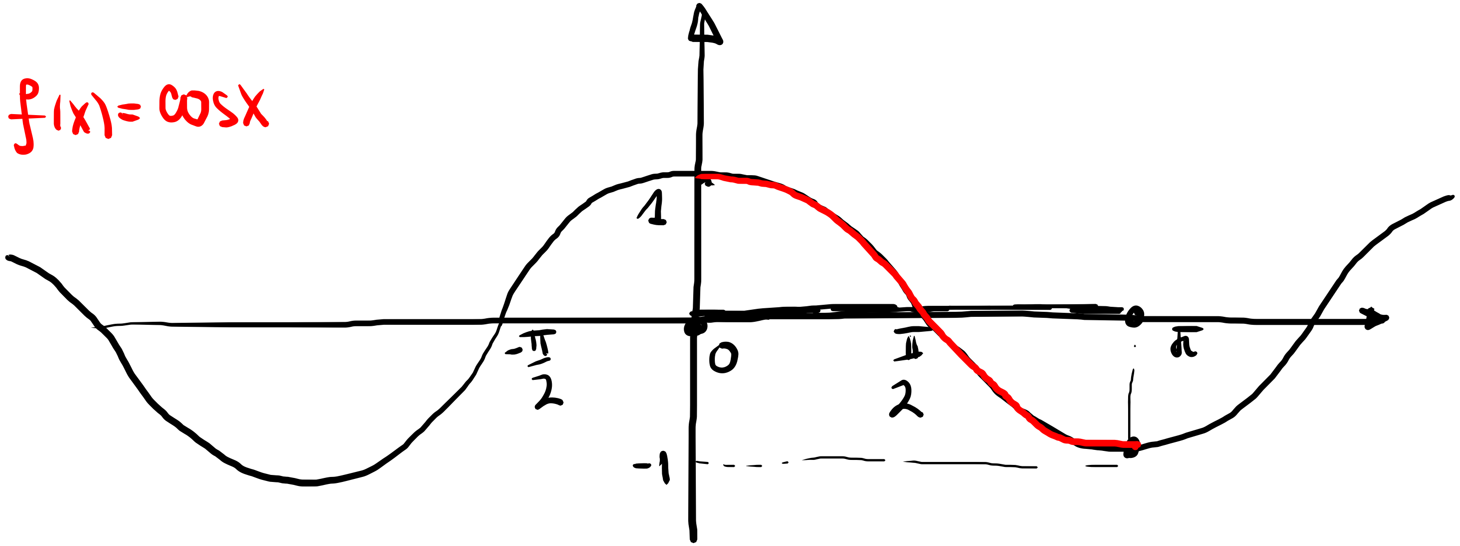
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ бијекција

$\Rightarrow \exists$ инверз

$\boxed{\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$



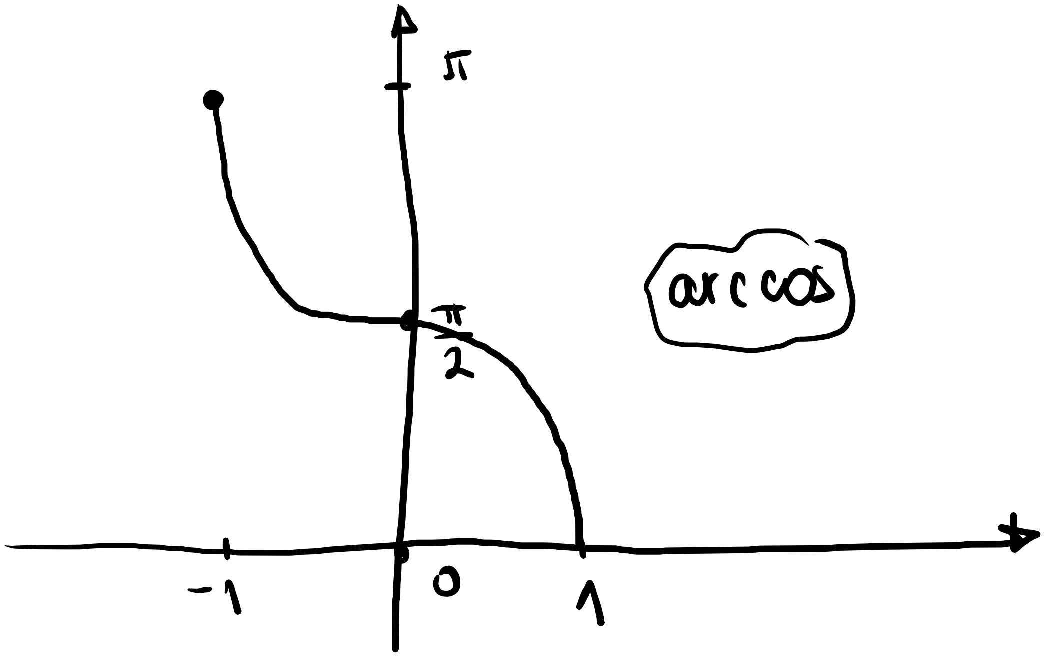
$f(x) = \cos x$



$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$

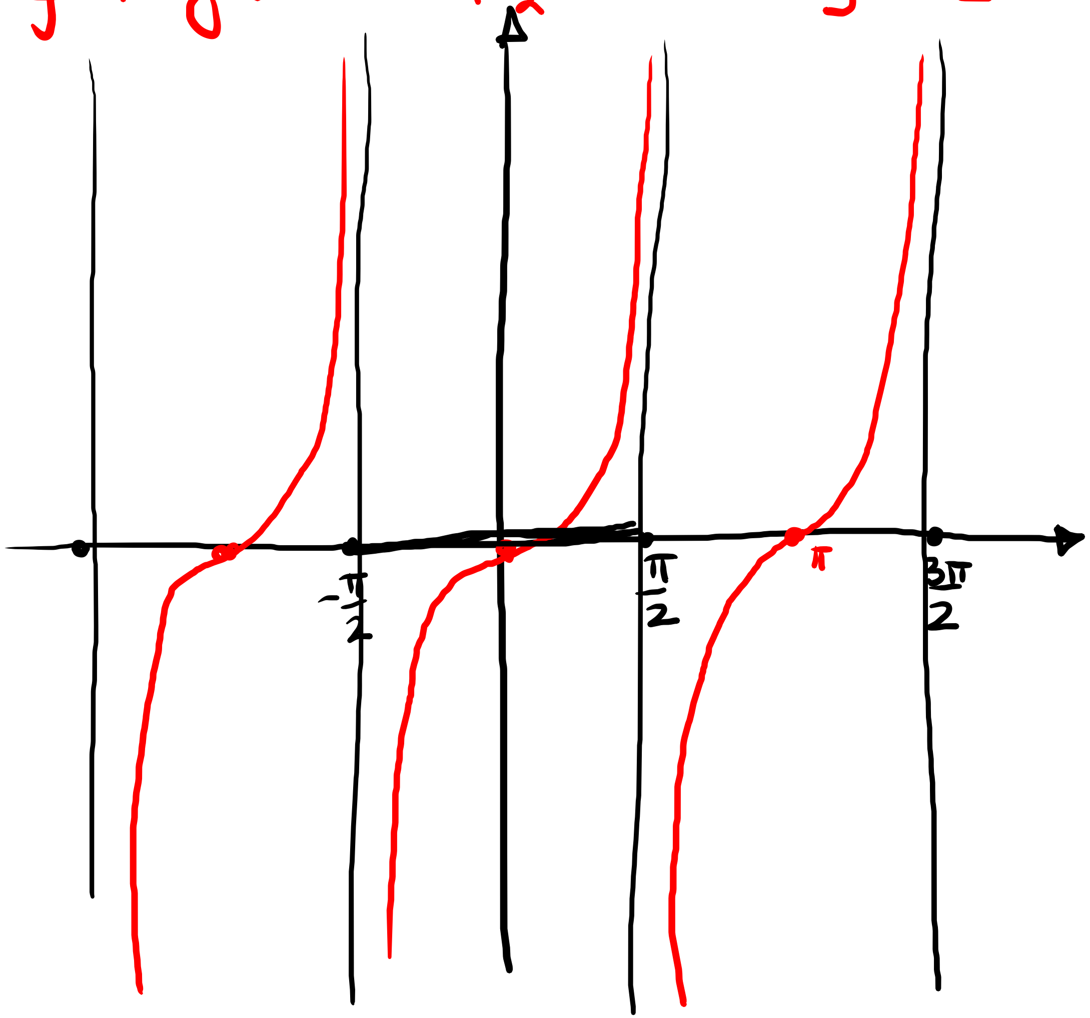
бијекција

$\leadsto$ $\boxed{\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]}$



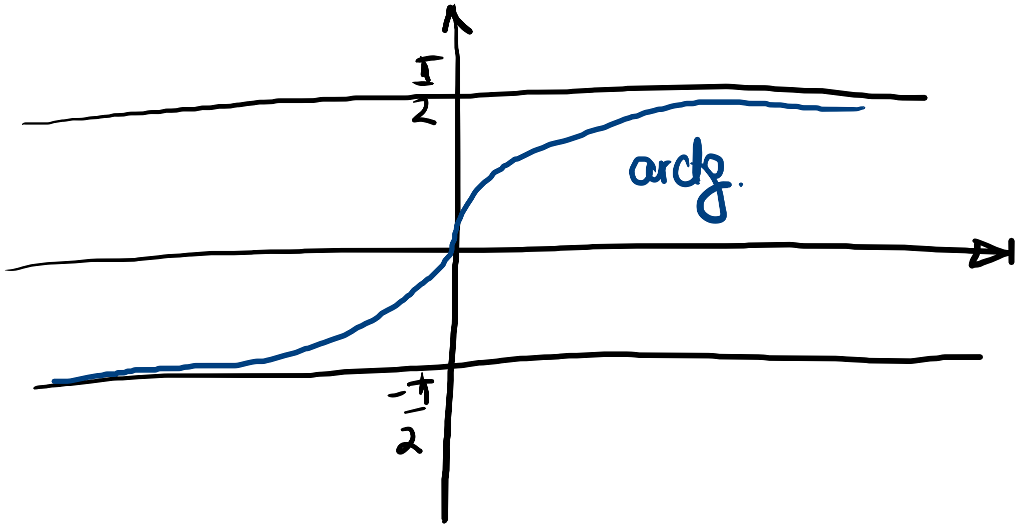
arccos

$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$

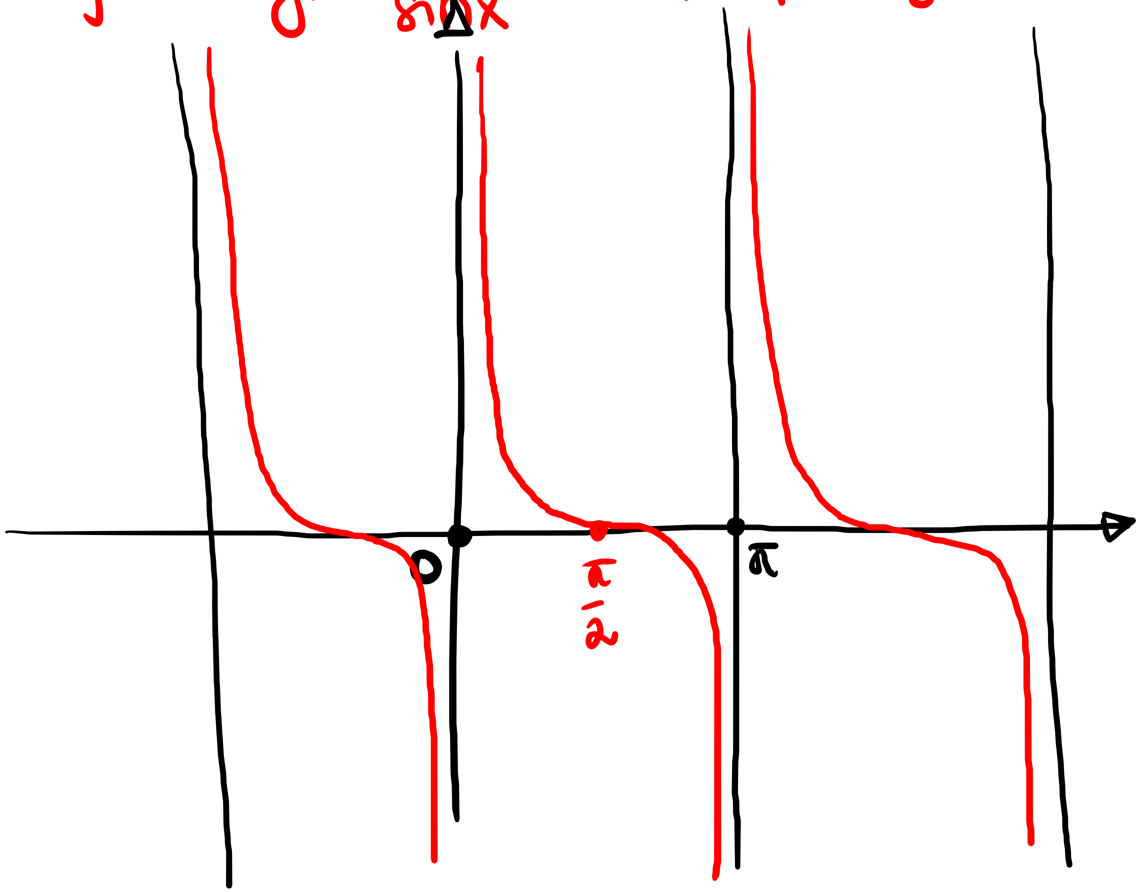


$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijekcija

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

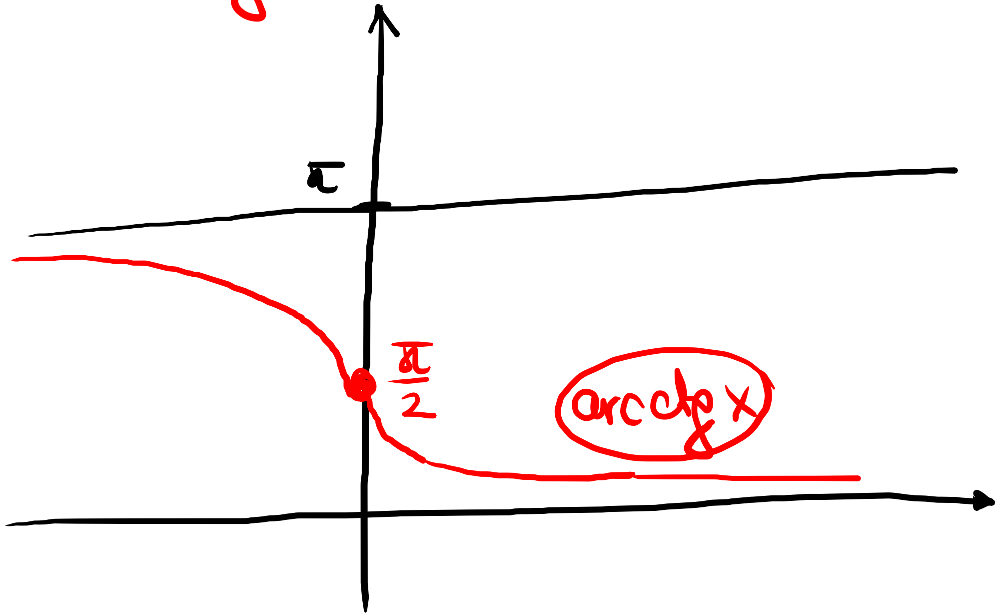


$f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$



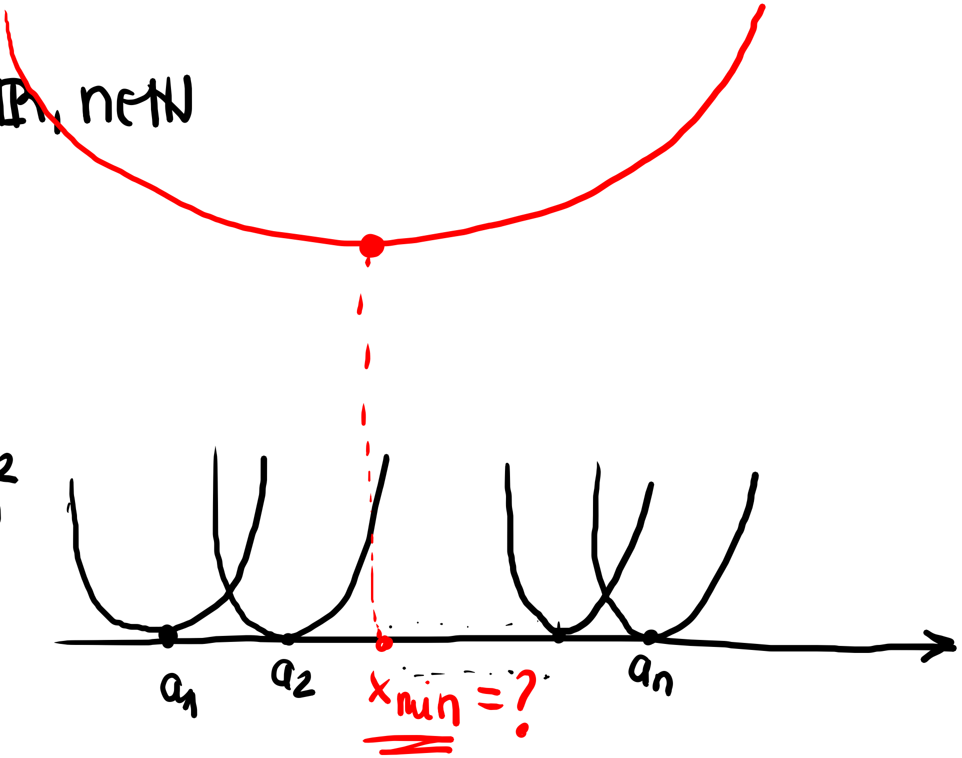
$(0,\pi) \to \mathbb{R}$ бијекција

$\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$



(3) $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2 \qquad a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$

Нађи тачку у којој ф-ја f достиже $\underline{\underline{\min}}$



$$f(x)=x^2-2a_1x+a_1^2+\cdots+x^2-2a_nx+a_n^2$$

$$=n\cdot x^2+(-2)(a_1+\cdots+a_n)\cdot x+a_1^2+\cdots+a_n^2$$

$f(x)=ax^2+bx+c \qquad$ теме $=\dfrac{-b}{2a}$

Наш пример: $\quad x_{min}=\dfrac{-(-2)(a_1+\cdots+a_n)}{2n}$

$$\boxed{x_{min}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}$$