Ролова теорема: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна, f диференцијабилна на (a,b)

$f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ тако да $f'(c)=0.$

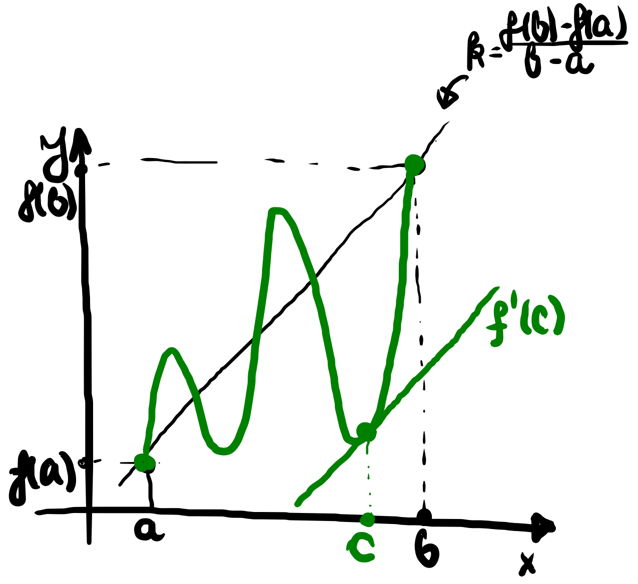
Лагранжова теорема $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непр.

f диф. на (a,b)

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



1. Доказати да важи:

(a) $\forall x,y>0 \quad \left|\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{f(x)} - \underbrace{\frac{1}{1+y}}_{f(y)}\right| \le |x-y|$

$x,y>0$ $\quad x=y: \ 0\le 0$ ✓

нпр. $x>y$ (симетрија ✓)

$$\boxed{f:[y,x]\to\mathbb{R} \quad f(t)=\frac{1}{1+t}}$$

$|f(x)-f(y)| \le |x-y|$?

f непр. на $[y,x]$ ✓

f диф на (y,x) ✓ $\quad f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$

Лагранж $\Rightarrow \exists c\in(y,x) \quad f(x)-f(y) = f'(c)\cdot(x-y)$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y| = \frac{1}{(1+c)^2}|x-y| \\ \\ \text{Довољно док. да } \frac{1}{(1+c)^2}\le 1 \Leftrightarrow T \text{ јер } c>0 \ ✓ \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le |x-y|$$

1б) $\forall x,y \geq 1: \left| \frac{x}{1+e^{1/x}} - \underbrace{\frac{y}{1+e^{\frac{1}{y}}}}_{f(y)} \right| \geq \frac{|x-y|}{4}$ ← ?

$x=y$ ✓

нпр. $x>y$: $f:[y,x]\to\mathbb{R}$ $f(t)=\frac{t}{1+e^{1/t}}$ непр. на $[y,x]$, диф. на (y,x)

$$f'(t)=\frac{1\cdot(1+e^{1/t})-t\cdot e^{1/t}\cdot -\frac{1}{t^2}}{(1+e^{1/t})^2}=\frac{1+e^{1/t}+\frac{1}{t}\cdot e^{1/t}}{(1+e^{1/t})^2}$$

Лагранж: $\exists c\in(y,x)$: $f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)$

$$|f(x)-f(y)|=\frac{1+e^{1/c}+\frac{1}{c}e^{1/c}}{(1+e^{1/c})^2}\cdot|x-y|$$

$\overset{x>y}{\Longrightarrow}$ $|f(x)-f(y)|>\frac{1}{4}\cdot|x-y|$ ✓

□

искаме: $|f'(c)|\geq\frac{1}{4}$

$$|f'(c)|=\frac{1+e^{1/c}+\overbrace{\frac{1}{c}\cdot e^{1/c}}^{\geq 0}}{(1+e^{1/c})^2}\geq\frac{1+e^{1/c}}{(1+e^{1/c})^2}=\frac{1}{1+e^{1/c}}>\frac{1}{4}$$

$c>1$: $\frac{1}{c}<1 \to e^{\frac{1}{c}}<e^1$

$1+e^{\frac{1}{c}}<1+e$ $\quad \frac{1}{1+e^{1/c}}>\frac{1}{1+\underset{2,\dots}{e}}>\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$

за вежбу: $\forall x,y\in\mathbb{R}$: $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\leq|x-y|$

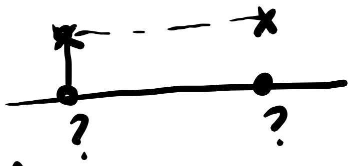
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна, тд. $\exists a\in\mathbb{R}$ $f(a)=1$, $a\neq 0$

док. $\exists c\in\mathbb{R}$ $c\cdot f'(c)+f(c)=1$.

$?c$: $\underbrace{c\cdot f'(c)+f(c)-1}_{\text{да ли је извод неке ф-је?}}=0$

$\boxed{F(x)=x\cdot f(x)-x}$ $\quad F'(x)=x\cdot f'(x)+1\cdot f(x)-1$ $\quad ?\exists c\in\mathbb{R}$ $F'(c)=0$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диф ✓



$F(a)=a\cdot \underset{1}{f(a)}-a=0$

$F(0)=0\cdot \underset{\text{не знамо}}{f(0)}-0=0$

$a\neq 0$ $F(a)=F(0)$

Рол т. на $[a,0]$ / $[0,a]$

$\Rightarrow \exists c$ $F'(c)=0$ ✓ □

③ $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ f непр. $[0,1]$, f диф. $(0,1)$

док. да $\exists c\in(0,1)$ тд. $f(1)-f(0)=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(f'(c)+f'(1-c))}_{?\ \text{извод фје } F}$

$F(x)=\frac{1}{2}\cdot(f(x)-f(1-x)) \to F'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)+f'(1-x))$

добро деф? $x\in[0,1]\to 1-x\in[0,1]$

$F:[0,1]\to\mathbb{R}$ непр. $[0,1]$, диф. на $(0,1)$

лагранж. $\exists c\in(0,1)$ $F(1)-F(0)=F'(c)\cdot\underbrace{(1-0)}_{=1}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(f(1)-f(0))-\frac{1}{2}(f(0)-f(1))=F'(c)$

$\Leftrightarrow$ $f(1)-f(0)=\frac{1}{2}(f'(c)+f'(1-c))$

$\square$

<u>За вежбу</u>: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непр. $[a,b]$, диф. на (a,b)

$f(a) = f(b) = 0 \qquad g(a) \cdot g(b) \neq 0$

$\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$

док. да $\exists c \in (a,b)$ шд. $\quad g(c) = 0$.

④ Доказати: $\forall x>0 \quad \underbrace{\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}_{F(x)}=\frac{\pi}{2}$

$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$F(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

непр ✓

диф ✓

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

$$\boxed{\forall x\in(0,+\infty)\ F'(x)=0}\xrightarrow{\text{предавање}}F(x)=c,\ \forall x>0$$

c - константа

$c=?$ $\quad c=F(1)=\underbrace{\operatorname{arctg}1}_{=\pi/4}+\operatorname{arctg}1=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\boxed{F(x)=\frac{\pi}{2},\ \forall x>0}$$

□

Лопиталова правила

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = ? \quad = L \quad + \text{услови } \boxed{T}$$

једноставније $\displaystyle \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

~ Лопиталова правила ~

Неодређени изрази:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\cdot(\pm\infty),\ +\infty-(+\infty),\ 1^{\pm\infty},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

$\boxed{T}$ (Лопиталова правила)

$f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилне, $-\infty\le a\le b\le+\infty$, $g'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$

Нека постоји $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\overline{\mathbb{R}}$.

Ако је $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$,

онда ће постојати и $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важиће $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

(* важи и за $\lim\limits_{x\to b-}$)

ВАЖНО: Ако $\neg\exists\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то не знаш ништа за $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$!

тј. не можемо ништа закључивати !

$\boxed{1}$ Израчунати лимесе:

(а) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}x\right)^x$ ← ово је израз облика $\{1^\infty\}$ јер $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\pi/2}=1$.

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}x\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}x\right)}$$ $=A$ – рачунамо овај лимес, важи $\boxed{L=e^A}$

$$A=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}x\right)}{\frac{1}{x}}$$ – наместили смо да буде облик $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

$$\underset{\text{ако }\exists\to}{\overset{\text{Лопитал}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\cancel{2/\pi}\cdot\operatorname{arctg}x}\cdot\cancel{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\operatorname{arctg}x}_{\to\frac{\pi}{2}}}=-\frac{2}{\pi}$$

$A=-\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow L=e^{-2/\pi}$ □

(б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$ израз је облика $\infty-\infty$

← намештамо да можемо да применимо Лопитала

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}$$ облика $\frac{0}{0}$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-x\cdot\sin x-\cancel{\cos x}}{x\cdot\cos x+\sin x}$$ поново облика $\frac{0}{0}$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\underbrace{\sin x}_{\to 0}-\underbrace{x\cdot\cos x}_{\to 0}}{\underbrace{\underbrace{\cos x}_{\to 1}+\underbrace{x(-\sin x)}_{\to 0}+\underbrace{\cos x}_{\to 1}}_{\to 2}}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$ □

(в) $$\underbrace{\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln x}_{\text{облика } 0\cdot(-\infty)}=\underbrace{\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}}_{\frac{-\infty}{+\infty}}\overset{\text{Лопитал}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

намештамо за Лопитала

ВАЖАН ЛИМЕС ☺

$\lim\limits_{x\to 0+}x\cdot\ln x=0$

(г) $$\underbrace{\lim_{x\to 0+}x^{x^x-1}}_{L}=\lim_{x\to 0+}e^{(x^x-1)\cdot\ln x}=e^{\overbrace{\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\cdot\ln x}^{=A}}\qquad L=e^A$$

$$A=\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+}\left(e^{x\ln x}-1\right)\cdot\ln x$$

☺ не примењујемо одмах без размишљ., јер не желимо компликоване изводе!

$$=\lim_{x\to 0+}\underbrace{\left(\frac{e^{x\cdot\ln x}-1}{(\underbrace{x\ln x}_{\to 0\ \text{из претх.}})}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{x\cdot(\ln x)^2}_{=?}$$ ← наместили смо знајући претх. задатак

израчунато $$\lim_{x\to 0+}x\cdot(\ln x)^2=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^2}{1/x}\overset{\text{Лопитал}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-2)x\ln x=0$$

Дакле: $$A=\lim_{x\to 0+}\underbrace{(\sim)}_{\downarrow\,1}\cdot\underbrace{x(\ln x)^2}_{\downarrow\,0}=0\implies L=e^A=e^0=1$$

Дакле, $\lim\limits_{x\to 0+}x^{x^x-1}=1$ □

~ Лопиталова правила – наставак ~

На предавању смо видели да важи (за $\alpha>0$ и $a>1$):

$$\ln x \ll x^{\alpha} \ll a^{x}, \quad x\to+\infty \quad (*)$$

тј. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0$ док $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln x}=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^{x}}{x^{\alpha}}$

тј. знамо да је „$\ln x$ најслабија, а експоненцијална најјача" :)

1 Израчунати:

$\vdots(\sqrt{3})^{x}$

(а) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x - x^{700}+(\sqrt{3})^{x}+\sin(x^4-x)}{x^{2020}-2(\sqrt{3})^{x}+\log_5 x}$$

- „шта је најјаче у имениоцу?"
- експоненцијална $(\sqrt{3})^{x}$
- скратимо том функцијом

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\frac{\log_2 x}{(\sqrt{3})^{x}}}\xrightarrow{}0 \text{ из }(*) - \cancel{\frac{x^{700}}{(\sqrt{3})^{x}}}\xrightarrow{}0 \text{ из }(*)+1+\cancel{\frac{\sin(x^4-x)}{(\sqrt{3})^{x}}}\xrightarrow{}0}{\cancel{\frac{x^{2020}}{(\sqrt{3})^{x}}}\xrightarrow{}0 \text{ из }(*) -2+\cancel{\frac{\log_5 x}{(\sqrt{3})^{x}}}\xrightarrow{}0 \text{ из }(*)}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{(\sqrt{3})^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2 e\,\frac{\ln x}{(\sqrt{3})^{x}}=0$ ($\to 0$ из $(*)$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin(x^4-x)}{(\sqrt{3})^{x}}=0$ (бројилац – ограничена, $(\sqrt{3})^{x}\to+\infty$)

$$=\frac{1}{-2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

(б) $\lim\limits_{x\to0_+}\sqrt{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ уводимо смену $\frac{1}{x}=t$

$x\to0_+ \iff t\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{t}}\cdot e^{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{\sqrt{t}}=+\infty$$ јер знамо да је $t^{1/2}\ll e^{t}$ кад $t\to+\infty$

(за вежбу показати преко Лопитала)

(в) $$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(x^{150}+3x^{7})}{\sqrt[3]{x-2}}}_{f(x)}$$

мало процењујемо (да покажемо да је горе слабија фја)

- $x^{150}+3x^{7}\leqslant 2\cdot x^{150}$ за довољно велико x, $x\geqslant x_0$

$\Rightarrow \ln(x^{150}+3x^{7})\leqslant \ln(2\cdot x^{150})=\ln2+150\cdot\ln x$

- доња функција: за $x\geqslant x_1$ $\sqrt[3]{x-2}\geqslant\sqrt[3]{\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{1/3}$

Сада имамо:
за довољно велико x:

$$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{\ln2+150\cdot\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{1/3}}=\frac{\ln 2}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\frac{1}{x^{1/3}}\xrightarrow{}0+\frac{150}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\cdot\cancel{\frac{\ln x}{x^{1/3}}}\xrightarrow{}0 \text{ из }(*)\ \xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

2 полицајца

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

2

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=? \qquad a>0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{L}$

израз је облика „$\frac{0}{0}$", примењујемо Лопиталово правило па нам је потребан извод од $(a+x)^x$ (израчунавамо га посебно да не би би компликован израз, иначе не мора)

$$((a+x)^x)'=(e^{x\cdot\ln(a+x)})'=e^{x\cdot\ln(a+x)}\cdot\left(\ln(a+x)+x\cdot\frac{1}{a+x}\right)$$

$$=(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)$$

Дакле:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\ \underset{\text{ако } \exists\to}{\overset{\text{лопитал}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)-a^x\ln a}{2x}=$$

(поново неодређен израз облика „$\frac{0}{0}$" јер: бројиоцу $\to$ $(a+0)^0\cdot(\ln a+0)-a^0\ln a)=1\cdot\ln a-\ln a=0$)

поново лопитал:

$$\overset{\downarrow}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)}\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)+(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)'-a^x(\ln a)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{(a+x)^x}_{\downarrow\ a^0=1}\cdot\left(\underbrace{\ln(a+x)}_{\downarrow\ \ln a}+\underbrace{\frac{x}{a+x}}_{\downarrow\ \frac{0}{a}=0}\right)^2+\underbrace{(a+x)^x}_{\downarrow\ 1}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{a+x}}_{\downarrow\ \frac{1}{a}}+\underbrace{\frac{a}{(a+x)^2}}_{\downarrow\ \frac{1}{a}}\right)-\underbrace{a^x\cdot(\ln a)^2}_{\downarrow\ 1\cdot(\ln a)^2}\right)$$

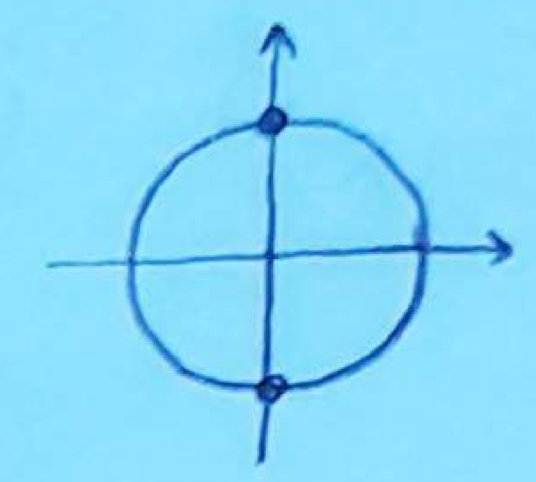
$$=\frac{1}{2}\left(1\cdot(\ln a)^2+1\cdot\frac{2}{a}-(\ln a)^2\right)=\boxed{\frac{1}{a}}\quad\square$$

3. Одредити: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x\cdot \arcsin x}$

I начин – Лопитал (бар 2x)
сређивање...
за вежбу урадити

II начин: смена :)

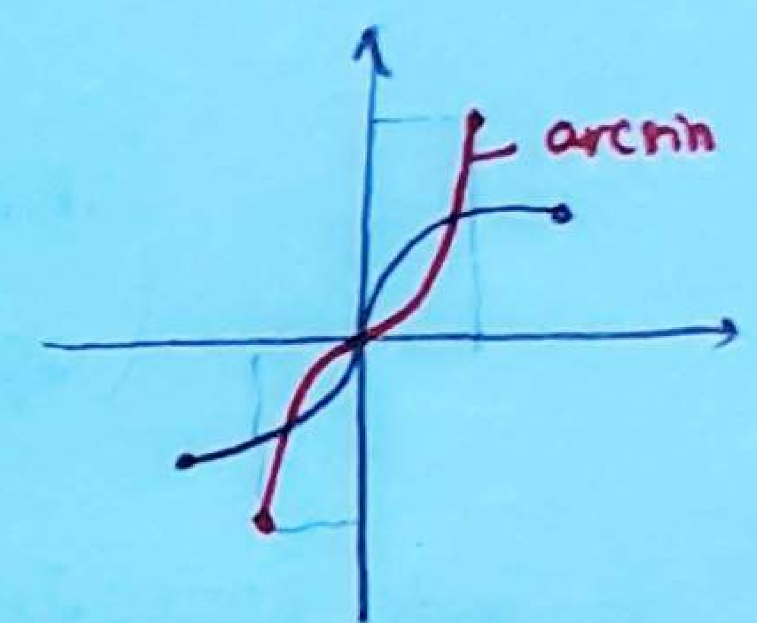
кад $x\to 0$ можемо претпоставити $x\in(-1,1)$
тада $x=\sin t$ за неко $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



и за $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ важи: $\underbrace{\arcsin(\sin t)=t}_{⊛}$

! битно да $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$



$\Rightarrow$

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} - \arcsin(\sin t)}{\sin t\cdot \arcsin(\sin t)}$$

$$\overset{⊛}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} - t}{t\cdot \sin t}$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| \overset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=\!=} \cos t$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin t}{\cos t} - t}{t\cdot\sin t} \underset{\text{Лопитал}}{\overset{„0/0"}{=\!=}} \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1}{\sin t + t\cdot\cos t} \overset{„0/0"}{=\!=}$$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{(-2)\cdot\dfrac{1}{\cos^3 t}\cdot(-\sin t)}{\cos t+\cos t+t\cdot(-\sin t)}$$

бројилац $\to 0$
именилац $\to 1+1+0=2$

$$=\frac{0}{2}=0$$

$\boxed{L=0}$ □

Помоћу Лопиталовог правила можемо доказати следећу лему која у одређеним случајевима упрошћава испитивање диференцијабилности:

$\boxed{\text{ЛЕМА}}$ Ако је f непрекидна функција у тачки a, и извод $f'(x)$ постоји на $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$

и ако постоји $\lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$, онда важи $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$

(Аналогно важи за $f'_-(a)$ и $f'(a)$)

ДОКАЗ: $$f'_+(a) \overset{\text{по деф.}}{=} \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \begin{matrix} \to 0 \text{ јер } f \text{ непр. у } a \\ \to 0 \end{matrix} \quad \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

$$\underset{\text{ако } \exists \to}{\overset{\text{Лопитал}}{=}} \lim_{h\to 0_+} \frac{f'(a+h)\cdot 1 - 0}{1} \quad \text{(изводи по } h\text{)}$$

$$= \lim_{x\to a_+} f'(x) \qquad \square$$

$\boxed{\text{ВАЖНО}}$: Наравно да се може десити да $\lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$ не постоји, а да функција f буде диференцијабилна у a!

Ово је само ако постоји!

$\boxed{\text{Пример}}$ (када не може да се примени лема)

$\boxed{4}$ Доказати да функција $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ има прекидан извод у тачки 0.

* Најпре f јесте непрекидна на $\mathbb{R}$ јер:
  - на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ✓
  - $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$ ✓

* диференцијабилност:
  - $x\neq 0$: $f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\neq 0}$
  - $x=0$: ако бисмо покушали да применимо лему:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{2x\cdot\sin\tfrac{1}{x}}_{\downarrow \atop 0} - \underbrace{\cos\tfrac{1}{x}}_{\text{не постоји}}\Big) \leftarrow \text{не постоји!}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ (нити постоје лимеси $x\to 0_+$ / $x\to 0_-$

Међутим, функција f јесте диференцијабилна у 0 јер по дефиницији:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\cdot\sin\frac{1}{h}=0$$

$$\boxed{f'(0)=0}$$

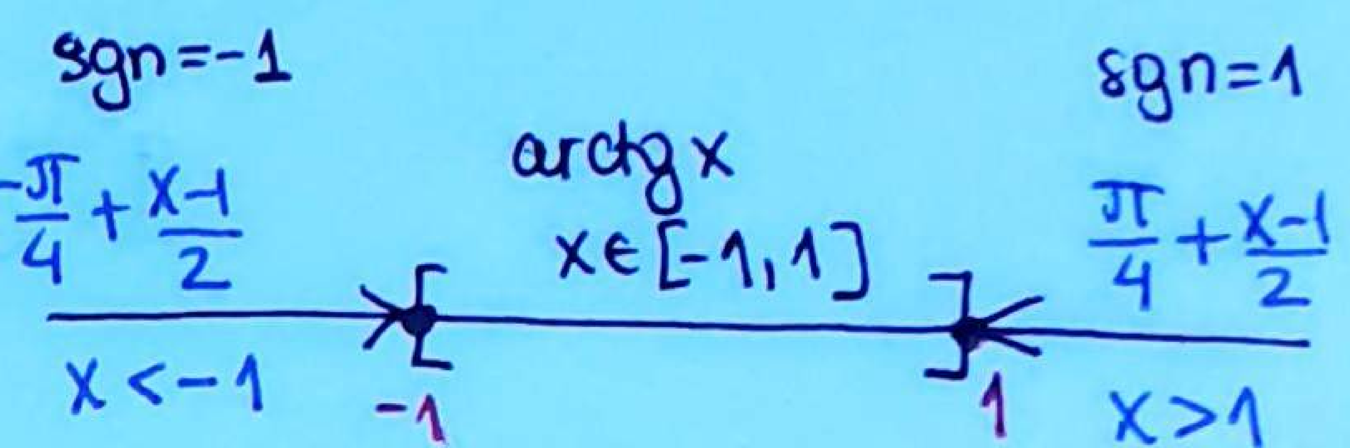
$\Rightarrow$ f је <u>диференцијабилна на $\mathbb{R}$</u>

Примећујемо да f' тј. извод функције f није непрекидан на $\mathbb{R}$ (не постоји $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$).

Урадимо сада један пример када лема може да се примени:

$\boxed{5.}$ Испитати диференцијабилност функције:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}x+\frac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$



* Прво проверавамо непрекидност

- за $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ јесте непрекидна и
- $\boxed{x=-1}$ $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}-1$

  $f(-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ $\quad\neq\quad$ $\Rightarrow$ није непр. у -1
- $\boxed{x=1}$ $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

  $f(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow$ непр. у 1

  $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ непр. на } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

* $\boxed{\text{ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ}}$ - проверавамо само где је непр., тј. за $\boxed{x\neq -1}$

одмах знамо: $$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & x\in(-1,1)\\ \frac{1}{2}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

Остаје још $\boxed{x=1}$ - ту рачунамо лимесе из леме, леви и десни:

$f'_+(1)\overset{\text{ако }\exists}{=}\lim\limits_{x\to 1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{1}{2}=1/2 \Rightarrow \exists f'_+(1)$

$f'_-(1)\overset{\text{ако }\exists}{=}\lim\limits_{x\to 1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \exists f'_-(1)$

једнаки су $\Rightarrow$ $\boxed{f'(1)=\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ је диференцијабилна на } \mathbb{R}\setminus\{-1\}}$

$\square$

~ Изводи вишег реда ~

Извод функције (први извод): $f'(x)$

Други извод: $f''(x) = (f'(x))'$

$\vdots$

n-ти извод: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ – извод $(n-1)$-ог извода

$\boxed{1}$ Израчунати други извод функције

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2}$$

Прво рачунамо $f'(x)$:

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{1+x^2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\underbrace{(1+x^2)'}_{\cancel{2}x} = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\underline{\underline{f''(x)}} = (f'(x))' = \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x + \frac{2x\cdot\sqrt{1+x^2} - x^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(2x\sqrt{1+x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

сад само средујемо, сводећи на заједнички именилац $\rightarrow \frac{1}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\underbrace{x\cdot(1+x^2) + 2x\cdot(1+x^2) - x^3}_{x+\cancel{x^3}+2x+2x^3\cancel{-x^3}}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)^{3/2}}}}$$

$\boxed{2.}$ Израчунати n-ти извод функције $f(x)=a^x$:

Рачунамо првих неколико извода:

$$f'(x) = a^x\ln a,\quad f''(x) = a^x(\ln a)^2,\quad f'''(x) = a^x(\ln a)^3$$

примећујемо да важи: $\boxed{f^{(n)}(x) = a^x(\ln a)^n}$

Показује се индукцијом:

1) $n=1$: ✓

2) $n \rightarrow n+1$: $\boxed{\text{И.Х.}}$ важи за n $\boxed{\text{за } n+1}$ $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{\text{И.Х.}}{=} \left(a^x\ln^n a\right)'$

$= a^x\cdot\ln a\cdot\ln^n a = a^x\ln^{n+1} a$ □

$\boxed{3.}$ $f(x) = \sin x \quad f^{(n)}(x) = ?$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$\underline{f^{IV}(x) = \sin x}$ даље се понавља

Видимо да се понавља сваки четврти

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \end{cases}$$