∞ Низови - други део ∞

АНАЛИЗА 1И
ВЕЖБЕ ЗА
13./14. мај
КРАЈ ☺
СЕМЕСТРА

Штолцова теорема (x_n) - реалан низ

(y_n) - растући реалан низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, онда постоји и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, и важи:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

* можемо узети и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, како нам је згодније.

* корисно кад се доста скрати разликом (горе или доле)

$\boxed{1}$ $k \in \mathbb{N}$ дат. Одредити $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}$.

Означимо $x_n = 1^k+2^k+\dots+n^k$

$y_n = n^{k+1}$ - растући ✓, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ✓

Можемо применити Штолцову теорему (Ш.Т.):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[\text{ако постоји}]{\text{Ш.Т.}} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^k+2^k+\dots+n^k)-(1^k+\dots+(n-1)^k)}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - \underbrace{(n-1)^{k+1}}_{\text{по Њутновој биномној развијемо}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\cancel{n^{k+1}} - \left(\cancel{n^{k+1}} + \binom{k+1}{1} n^k\cdot(-1) + \binom{k+1}{2} n^{k-1}\cdot(-1)^2 + \dots + (-1)^{k+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)\cdot n^k + \text{полином мањег степена}}$$

$$= \frac{1}{k+1} \quad \square$$

⊛ за вежбу: наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+3^k+5^k+\dots+(2n+1)^k}{n^{k+1}}$

а ми ћемо урадити још један сличан са више сређивања ☺.

$\boxed{2}$ $\quad L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k+1}\cdot \frac{(k+1)(1^k+2^k+\dots+n^k)-n^{k+1}}{n^k}$ $= x_n$

$(k\in\mathbb{N})$ $\quad$ " $y_n \uparrow, \to +\infty$

$$\underset{\text{ако } \exists}{\overset{\text{Ш.Т.}}{=\!=\!=}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1}\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{k+1}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(\cancel{1^k+\dots+(n-1)^k}+n^k) - n^{k+1} - (k+1)(\cancel{1^k+\dots+(n-1)^k}) + (n-1)^{k+1}}{n^k - (n-1)^k}$$

ЊБФ

развијемо ЊБФ

$$= \frac{1}{k+1}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)\cdot n^k - \cancel{n^{k+1}} + \left(\cancel{n^{k+1}} + \binom{k+1}{1} n^k\cdot(-1) + \binom{k+1}{2} n^{k-1}\cdot(-1)^2 + \text{полином степена}(k-2)\right)}{\cancel{n^k} - \left(\cancel{n^k} + \binom{k}{1} n^{k-1}\cdot(-1) + \text{полином степена}(k-2)\right)}$$

$$= \frac{1}{k+1}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{k+1}{2} n^{k-1} + \text{полином ст.}(k-2)}{k\cdot n^{k-1} + \text{полином ст.}(k-2)}$$

$$= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\frac{(k+1)\cdot k}{2}}{k} = \frac{1}{2} \quad \square$$

На предавању смо доказали неке последице Штолцове теореме:

Кошијева теорема $\quad$ Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = a$.

A_n - аритметичка средина првих n

Тврђење $\quad$ Ако је $a_n > 0, \forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тада је и:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = a$$

H_n - хармонијска средина $\qquad$ G_n - геометријска средина.

Сада докажимо још једно корисно тврђење:

Тврђење $\quad$ (a_n) - низ, $a_n>0, \forall n$. Ако постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$, онда постоји и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ и важи:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Доказ: означимо са $x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $\left(x_1 = \frac{a_1}{1}\right)$. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{X}$.

Према тврђењу о геом. средини тада: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n} = X$

то је сш:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cancel{\frac{a_1}{1}}\cdot\cancel{\frac{a_2}{a_1}}\cdots\cancel{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=x \quad \text{ШТД.} \quad \square$$

$\boxed{3.}$ Одредити $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \text{ - означимо са } \underline{\underline{a_n}} \quad\rightarrow\quad L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

ово је позитиван низ па можемо применити претходно тврђење.

рачунамо
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!/n^n}{(n-1)!/(n-1)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}^{\,n}}{n^n}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{\cancel{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^n}\cdot(n-1)^{n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n\cdot\frac{n-1}{-n}}$$

$\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\to e$, $\quad \frac{n-1}{-n}\to -1$, $\quad a_n=-n\to-\infty$, $\quad \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$

$$=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{e}\ \xRightarrow{\text{тврђење}}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{e} \text{ тј. } \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}} \quad \square$$

Приметимо у овом задатку: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ јер $n!\ll n^n$

док $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}=\dfrac{1}{e}\neq 0$.

Дакле, то што $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, <u>не повлачи</u> да $\sqrt[n]{x_n}$ тежи ка 0 !

За вежбу задаци:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=?$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)}{n^4}=?$

$\boxed{4.}$ Низ (a_n) је задат са: $a_0>0$ дато
$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3a_n^2}$$

(а) Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (ако $\exists$).

(б) Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{n}$ (ако $\exists$).

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$ Одмах можемо приметити да $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3a_n^2}>a_n,\ \forall n$

$$\Rightarrow \boxed{(a_n) \text{ је растући}}$$

Да ли конвергира?

Ако је ограничен, он конвергира ка $a\in\mathbb{R}$, иначе $\to+\infty$.

Претпоставимо: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$, $a>0$ јер $a_n\uparrow$ и $a_0>0$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3a_n^2} \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$a=a+\frac{1}{3a^2}$$

$$\frac{1}{3a^2}=0 \quad \lightning \quad \Rightarrow \text{ не конвергира}$$

$$a_n\uparrow \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty}$$

(б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n} \ \underset{\text{ако } \exists\ \to}{\overset{\text{Ш.Т.}}{=\!=}}\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3-a_{n-1}^3}{n-(n-1)}$$

$x_n=a_n^3$

$y_n=n$ – растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_{n-1}+\frac{1}{3a_{n-1}^2}\right)^3-a_{n-1}^3}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \cancel{a_{n-1}^3}+\frac{1}{27a_{n-1}^6}+3\cdot a_{n-1}^2\cdot\frac{1}{3a_{n-1}^2}+3a_{n-1}\cdot\frac{1}{9a_{n-1}^4}-\cancel{a_{n-1}^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{27a_{n-1}^6}}_{\to 0}+1+\underbrace{\frac{1}{3a_{n-1}^3}}_{\to 0}$$

јер $a_{n-1}\to+\infty$

$$=\boxed{1}$$

$\square$

$\circledast$ за вежбу: $a_1>0$

$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\frac{1}{a_n^2}}$ Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^4}{n}$.

$\boxed{5.}$ Низ (x_n) је дат са: $x_0>0$ дат, $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1+x_n^2}$

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n^2 = ?$

(а) $x_0>0 \to$ према формули видимо да ће сви чланови низа бити позитивни

$\boxed{x_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}}$ (1)

такође приметимо да низ опада:

$$x_{n+1}=\frac{\overset{>0}{x_n}}{\underbrace{1+x_n^2}_{>1}} > x_n \qquad \boxed{x_{n+1}>x_n,\ \forall n} \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ низ конвергира, тј. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\in\mathbb{R}$

$x=?$

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{1+x_n^2} \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$x=\frac{x}{1+x^2} \to x+x^3=x \to x^3=0 \Rightarrow x=0 \text{ тј. } \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n^2 = ?$

$(+\infty \cdot 0)$ неодређен ☺

„наместћено" да применимо Штолцову теорему:

рачунамо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\cdot x_n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/x_n^2}{\underbrace{n}_{\uparrow,\ \to+\infty}} \overset{\text{Ш.Т.}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}{n-(n-1)}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{изразимо}\\ x_n=\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}^2}\end{matrix}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+x_{n-1}^2}{x_{n-1}}\right)^2-\frac{1}{x_{n-1}^2}}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x_{n-1}^4+2x_{n-1}^2-1}{x_{n-1}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{x_{n-1}^2}_{\to 0}+2\right)=\boxed{2}$$

јер $x_n\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\cdot x_n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{n\cdot x_n^2}}_{\to 2}} = \boxed{1/2} \quad \square$$

⊛ За вежбу: $x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n-x_n^3$, $n\in\mathbb{N}$

(а) доказати да $x_n\in(0,1)$, $\forall n$ (индукција)

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n^2 = ?$

Кошијев принцип конвергенције

ДЕФ Низ (a_n) је КОШИЈЕВ ако за $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})$ тако да за $\forall m,n>n_0$ важи:

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

$\boxed{T}$ Низ је конвергентан ако и само ако је Кошијев.

6. Доказати да конвергирају следећи низови:

(а) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

Довољно је доказати да је Кошијев.

Видели смо на предавању да $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\to+\infty$ али $1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ конвергира.

$\varepsilon>0$ проучимо разлику a_n-a_m, нека $n>m$:

$$a_n-a_m=\Big(\underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{m^2}}+\frac{1}{(m+1)^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\Big)-\Big(\underbrace{1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{m^2}}\Big)$$

$$=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$$

← искористимо: $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\dots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

па: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

$$=\underbrace{\frac{1}{m}-\cancel{\frac{1}{m+1}}}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{m+1}}-\cancel{\frac{1}{m+2}}}+\cancel{\dots}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$$

$$<\frac{1}{m}$$

Дакле: за $n>m$: $\quad 0<a_n-a_m<\frac{1}{m}$

па за $\frac{1}{m}<\varepsilon$, тј. $m>\frac{1}{\varepsilon}$, важи $|a_n-a_m|<\varepsilon$

узмимо $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ → за $m,n>n_0$ важи $|a_n-a_m|<\varepsilon$

Тако за свако $\varepsilon>0$ ⇒ (a_n) је Кошијев

⇒ конвергентан.

(б) $x_n = \frac{\sin(1!)}{2} + \frac{\sin(2!)}{2^2} + \dots + \frac{\sin(n!)}{2^n}$

$\varepsilon > 0$ фиксирано

$\underline{n>m}$ узимамо и проценимо $|x_n - x_m|$:

$$|x_n - x_m| = \Bigg| \underbrace{\cancel{\frac{\sin(1!)}{2} + \dots + \frac{\sin(m!)}{2^m}} + \frac{\sin((m+1)!)}{2^{m+1}} + \dots + \frac{\sin(n!)}{2^n}}_{x_n} - \Bigg(\underbrace{\cancel{\frac{\sin(1!)}{2} + \dots + \frac{\sin(m!)}{2^m}}}_{x_m}\Bigg) \Bigg|$$

$$= \left| \frac{\sin((m+1)!)}{2^{m+1}} + \dots + \frac{\sin(n!)}{2^n} \right|$$

уопштена неједн. троугла $\leq \frac{|\sin((m+1)!)|}{2^{m+1}} + \frac{|\sin((m+2)!)|}{2^{m+2}} + \frac{|\sin(n!)|}{2^n}$

$|\sin x| \leq 1$ $\forall x$ $\leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \Big(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-(m+1)}}}_{\text{знамо да саберемо као геом. низ}} \Big)$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-m}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^m}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) < \frac{1}{2^m}$$

Дакле за $n>m$ имамо $|x_n - x_m| < \frac{1}{2^m}$

$\frac{1}{2^m} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^m \iff m > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

за $\underline{n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}$: $n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

Тако за свако ε $\Rightarrow$ низ (x_n) је Кошијев, па је конвергентан.

За вежбу:

(в) $y_n = \frac{\cos(\log_2 1)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(\log_2 2)}{2 \cdot 3} + \frac{\cos(\log_2 3)}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos(\log_2 n)}{n(n+1)}$.

~ Веза лимеса низа и лимеса функције ~

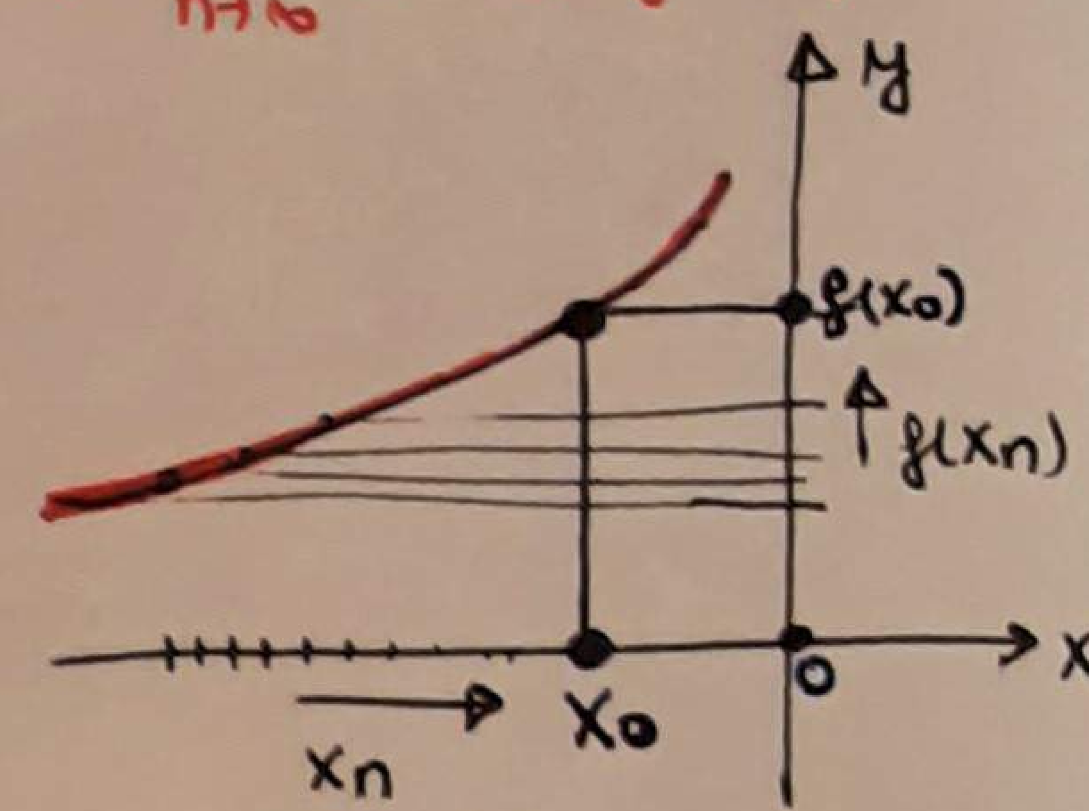
ХАЈНЕ $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ x_0 - тачка нагомилавања скупа X.

Тада је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако

за сваки низ $x_n \in X \setminus x_0$ важи импликација

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

Последица $f: X \to \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $x_0 \in X$ ако и само ако за сваки низ $x_n \in X$ важи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$



7. Да ли постоји $a \in \mathbb{R}$ тако да функција:

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$?

Једино питање је непрекидност у тачки $x_0 = 0$. Претпоставимо да постоји такво a; требало би да буде $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2 \frac{1}{x} = a$. Према последици Хајнеове теореме то значи да за сваки низ x_n важи:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos^2 \frac{1}{x_n} = a} \quad (1)$$

Уочимо низове: $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0, n \to \infty$

$x_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0, n \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 \frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 2n\pi = 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} a = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 \frac{1}{x_n'} = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} a = 0 \end{array}\right\} \lightning \Rightarrow \boxed{\text{Не постоји такво } a}$$

Другим речима, f се не може додефинисати у тачки $x_0 = 0$ до непр. функције. □

Сада ћемо видети како знање о лимесима функција можемо користити код рачунања неких лимеса низова.

8. Одредити $L=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\dfrac{\sqrt[n]{e}+1}{\sqrt[n]{e}-1}-2n\right)$

Можемо искористити Маклоренов развој за $e^{\frac{1}{n}}$, тј. за e^x, $x\to 0$ јер кад $n\to\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$.

$$e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6\cdot n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),\ n\to\infty$$

Сада имамо:

$$L=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}+1}{e^{\frac{1}{n}}-1}-2n\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}-2n\right)$$

извући ћемо $\frac{1}{n}\cdot(1+\underbrace{\ \ }_{\to 0})$ да бисмо то развијали као $(1+t)^{-1}$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}-2n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{t}\right)^{-1}-2\right)$$

$(1+t)^{-1}=1-t+t^2+o(t^2),\ t\to 0$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-2\right)$$

сада уочавамо шта је „јаче" од $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а остало иде у $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

овде је било $o\left(\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4n^2}+\overset{\text{све ост.}}{o(1/n^2)}\right)-2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\underbrace{\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}-2\right)$$

потребни су нам само чланови до $\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (ни не може боље!) па само те чланове производа уочавамо:

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\cancel{2}-\frac{1}{\cancel{n}}+2\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{\cancel{n}}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}\cdot 1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}+\underbrace{o(1)}_{}\right)=\boxed{\frac{1}{6}}.$$

овде је то низ који $\to 0$, $n\to\infty$

~ Подизови и тачке нагомилавања ~

(x_n)-низ $\rightarrow$ $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ $\quad (x_{n_k})$ - подниз

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ a је тачка нагомилавања низа (x_n) ако постоји подниз (x_{n_k}) тд.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

$T(x_n)$ = скуп свих тачака нагомилавања низа x_n

<u>најмања</u> тачка нагомилавања = лимес инфериор низа

$\liminf x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$

<u>највећа</u> тачка нагомилавања = лимес супериор низа

$\limsup x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$

<u>Став</u> Ако је низ x_n конвергентан, онда сваки његов подниз конвергира ка $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

тј. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ за $\forall$ подниз важи $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

<u>Теорема</u> Сваки ограничен низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.
Сваки низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

$\boxed{9.}$ Наћи све тачке нагомилавања низа x_n, $\underline{\lim}\, x_n$ и $\overline{\lim}\, x_n$.

$$x_n = 1 + \frac{n^2}{n^2+5} \cdot \cos\frac{n\pi}{2}$$

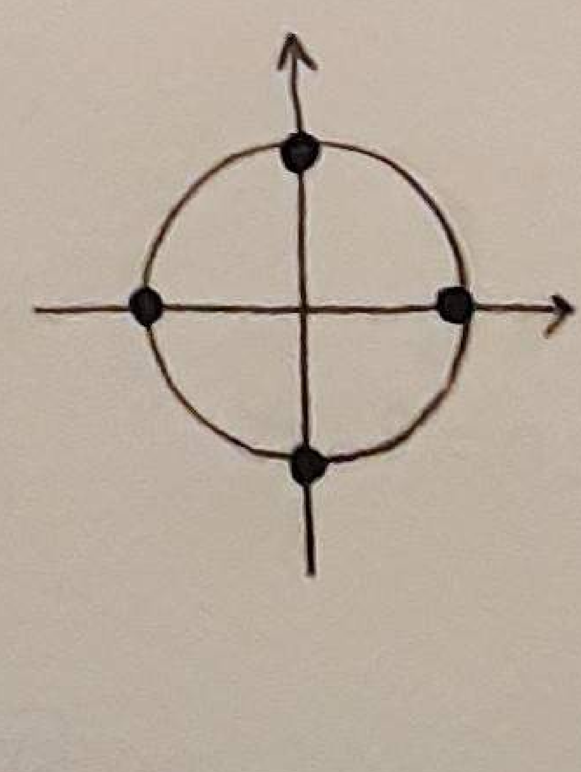
Знамо да $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+5} = 1$, па понашање низа зависи од $\cos\frac{n\pi}{2}$.

$n=1$: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$n=2$: $\cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1$

$n=3$: $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$n=4$: $\cos\frac{4\pi}{2} = \cos 2\pi = 1$



сада се све понавља
јер смо се померили за <u>2π</u>:

$n=5$: $\cos\frac{5\pi}{2} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\vdots$

тј. $\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+2 \\ 0, & n=4k+3 \\ 1, & n=4k \end{cases}$

Зато посматрамо поднизове:

$(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$: $x_1, x_5, x_9, \dots$

$(x_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}_0}$

$(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}_0}$

$(x_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{(4k+1)^2}{(4k+1)^2+5}\cdot 0\right) = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{(4k+2)^2}{(4k+2)^2+5}}_{\to 1}\cdot(-1)\right) = 1+1\cdot(-1) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = 1+0 = 1 \quad \text{(као први)}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{(4k)^2}{(4k)^2+5}}_{\to 1}\cdot 1\right) = 1+1\cdot 1 = 2$$

$\Rightarrow$ скуп тачака нагомилавања је: $T(x_n)=\{0,1,2\}$

$\underline{\lim}\, x_n = 0 \quad \overline{\lim}\, x_n = 2$ $\square$

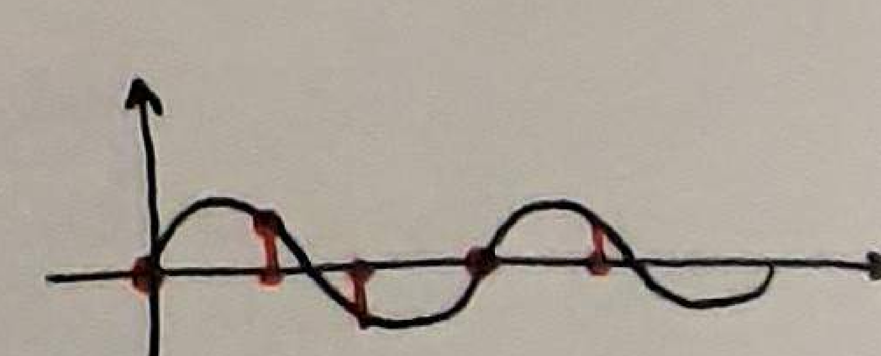
$\boxed{10.}$ $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{n}{n+1}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{\ln n}{n!}$

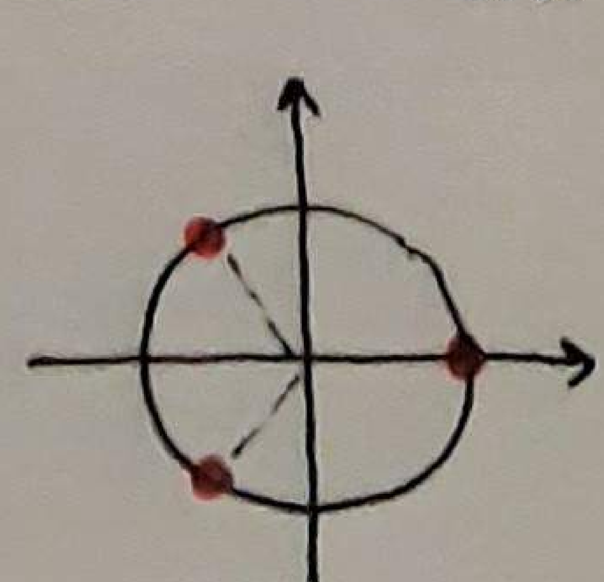
Наћи $T(x_n)$, $\underline{\lim}\, x_n$ и $\overline{\lim}\, x_n$.

Од чега зависи низ x_n?

- $(-1)^n\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e,\ n\to\infty}$ $\quad (-1)^n = \begin{cases} 1, & n=2k \\ -1, & n=2k-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ морамо раздвојити случајеве по $\boxed{\text{mod } 2}$

- $\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}$ $\quad \sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k+1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k+2 \\ 0, & n=3k \end{cases}$





$\Rightarrow$ морамо и по $\boxed{\text{mod } 3}$

• $\frac{\ln n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ јер $\ln n \ll n!,\ n\to\infty$

тако да не утиче на граничне вредности поднизова.

Дакле: mod 2 и mod 3

$\underline{НЗС(2,3)=6}$ => разматрамо по $\boxed{\text{mod } 6}$

тј. поднизове $x_{6k}, x_{6k+1}, x_{6k+2}, x_{6k+3}, x_{6k+4}, x_{6k+5}$

(6k) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{6k} = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{(-1)^{6k}}_{=1} \underbrace{\left(1+\frac{1}{6k}\right)^{6k}}_{\to e} + \underbrace{\frac{6k}{6k+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin\frac{2\cdot 6k\pi}{3}}_{\substack{=\sin 4k\pi \\ =0}} + \cancel{\frac{\ln(6k)}{(6k)!}}\to 0 = 1\cdot e + 1\cdot 0 + 0 = e$

(6k+1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{6k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{(-1)^{6k+1}}_{=-1} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{6k+1}\right)^{6k+1}}_{\to e} + \underbrace{\frac{6k+1}{6k+2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin\frac{2\cdot(6k+1)\pi}{3}}_{=\sin\left(4k\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{\frac{\ln(6k+1)}{(6k+1)!}}\to 0$

$= (-1)\cdot e + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - e$

Сада потпуно аналогно за вежбу испишите преостала 4 подниза.
Овде је скица за проверу:

(6k+2) $x_{6k+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1\cdot e + 1\cdot\sin\frac{2(6k+2)\pi}{3} + 0 = e - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(6k+3) $x_{6k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} (-1)\cdot e + 1\cdot\sin\frac{2(6k+3)}{3}\pi + 0 = -e + 1\cdot 0 = -e$

(6k+4) $x_{6k+4} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1\cdot e + 1\cdot\sin\frac{2(6k+4)}{3}\pi + 0 = e + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = e + \frac{\sqrt{3}}{2}$

(6k+5) $x_{6k+5} \xrightarrow[k\to\infty]{} (-1)\cdot e + 1\cdot\sin\frac{2(6k+5)\pi}{3} + 0 = -e + 1\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} = -e - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow T(x_n) = \left\{-e-\frac{\sqrt{3}}{2},\ e-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-e,\ -e,\ e,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+e\right\}$

уочавамо најмањи и највећи

$\underline{\lim}\, x_n = -e-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\overline{\lim}\, x_n = e+\frac{\sqrt{3}}{2}$ □

⊛ За вежбу: $T(a_n),\ \underline{\lim}\, a_n,\ \overline{\lim}\, a_n = ?$

за $a_n = \frac{n^2+2}{\ln n + 2^n} - \cos\frac{n\pi}{3}$.

$\boxed{11.}$ $T(a_n) = ?$ за $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^{n(-1)^n}}$

$(-1)^n \to$ зато разматрамо по $\boxed{\text{mod } 2.}$

$2 \mid n$: $\underline{n = 2k}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2^{2k} + 5^{2k(-1)^{2k}}} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2^{2k} + 5^{2k}} \overset{\uparrow}{=} \max\{2, 5\} = 5$

тврђење са прошлог часа

$2 \nmid n$: $\underline{n = 2k+1}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{2^{2k+1} + 5^{(2k+1)\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1}}}$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{2^{2k+1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1}} = \max\{2, \frac{1}{5}\} = 2$

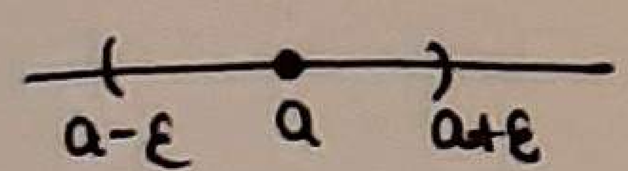
$\Rightarrow T(a_n) = \{2, 5\}$

$\underline{\lim}\, a_n$ $\overline{\lim}\, a_n$ □

$\boxed{12.}$ Ако $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$, $a \in \mathbb{R}$, доказати да низ (a_n) конвергира и да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Можемо доказати по дефиницији:

произвољно $\underline{\varepsilon > 0}$:



$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}$ т.д. за $k \geq k_1 \Rightarrow |a_{2k} - a| < \varepsilon$ (1)

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}$ т.д. за $k \geq k_2 \Rightarrow |a_{2k+1} - a| < \varepsilon$ (2)

Узмимо $\underline{n_0 := 2 \cdot \max\{k_1, k_2\} + 1}$ и докажимо да за $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$n \geq n_0$ ако је n парно: $n = 2k$, $k \geq k_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} |a_{2k} - a| < \varepsilon$ ✓

ако је n непарно: $n = 2k+1$, $k \geq k_2 \Rightarrow |a_{2k+1} - a| < \varepsilon$ ✓

□

13. Дат је низ (x_n). Ако знамо да поднизови $(x_{2k}), (x_{2k+1}), (x_{3k})$ конвергирају, доказати да конвергира цео низ (x_n).

Знамо да постоје $a, b, c \in \mathbb{R}$ тако да:

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a \qquad \lim_{k\to\infty} x_{3k} = c$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = b$$

На основу претходног задатка, довољно је да докажемо да $a = b$.

$x_{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a \qquad x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}, \dots \to a$

(x_{6k}) је подниз овог низа $\xRightarrow{\text{предавања}} \boxed{\lim_{k\to\infty} x_{6k} = a}$

Међутим, x_{6k} је подниз и низа x_{3k}:

$x_{3k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c \qquad \underbrace{x_3}, x_6, \underbrace{x_9}, x_{12}, \underbrace{x_{15}}, x_{18}, \dots \to c \Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} x_{6k} = c}$

$\Rightarrow \boxed{a = c}$

Слично имамо: $\underbrace{x_3}, \underbrace{x_9}, \underbrace{x_{15}} \dots \to c$

$\boxed{x_{6k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} c}$ као подниз низа x_{3k}

док је то подниз и низа са непарним индексима:

$x_{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} b \qquad x_1, \underbrace{x_3}, x_5, x_7, \underbrace{x_9}, x_{11}, x_{13}, \underbrace{x_{15}}, \dots \to b$

$\Rightarrow \boxed{x_{6k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} b}$

$\Rightarrow \boxed{b = c}$

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = b} \xRightarrow{\boxed{12.}\text{ зад.}} \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a}$$

$\square$

За крај ћемо размотрити једну специјалну класу низова:

~Низови задати линеарним диференцним једначинама реда 2~

Нека знамо прва два члана низа: x_1, x_2 (или x_0, x_1)

а сваки следећи је дат са: $\boxed{x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ (или $x_n = a x_{n-1} + b x_{n-2}$ ...)

Поставља се питање како експлицитно израчунати конкретан члан низа,

нпр. $x_{2020} = ?$.

Поступак је следећи: од $\boxed{x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n}$

формирамо карактеристичну једначину:

$$\boxed{t^2 = a \cdot t + b}$$

њеним решавањем добијамо или два различита решења $t_1 \neq t_2$,

или једно двоструко $t_1 = t_2 = t_0$.

1) Ако $t_1 \neq t_2$ → низ x_n је облика $x_n = c_1 \cdot t_1^n + c_2 t_2^n$

c_1, c_2 – константе које одређујемо из x_1 и x_2

називa се ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

2) Ако $t_1 = t_2 = t_0$ → низ x_n је облика $x_n = c_1 \cdot t_0^n + c_2 \cdot n \cdot t_0^n$

c_1, c_2 – из x_1 и x_2, такође

14. Одредити формулу за општи члан низа (x_n), $x_1 = \frac{13}{6}$, $x_0 = 5$

$$6 x_{n+2} = 5 x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 0$$

карактеристична једначина: $6t^2 = 5t - 1$

решавамо: $6t^2 - 5t + 1 = 0$ $\quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$ → $\boxed{1/2 = t_1}$, $\boxed{1/3 = t_2}$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$c_1, c_2 = ?$

$x_0 = 5 = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ тј. $5 = c_1 + c_2$

$x_1 = \frac{13}{6} = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$ тј. $\frac{13}{6} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}$ $\Big/ \cdot 6$

систем

решавамо систем: $\left.\begin{array}{l} 5 = c_1 + c_2 \\ 13 = 3c_1 + 2c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \end{array}}$

дакле, $\boxed{x_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ∎

$\boxed{15.}$ (а) Одредити низ (y_n): $y_1 = \frac{5}{6}$, $y_2 = \frac{1}{3}$, $y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n - \frac{1}{9}y_{n-1}$, $n \geq 2$

(б) За низ (x_n) из претходног задатка одредити: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

(в) —||— —||— : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{y_n}}$.

(а) $y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n - \frac{1}{9}y_{n-1}$

$t^2 = \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}$

$t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9} = 0 \iff \left(t-\frac{1}{3}\right)^2 = 0 \to$ двоструко решење $t_{1,2} = \frac{1}{3}$, па:

$$\underline{y_n = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \cdot n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$C_1, C_2 = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{6} = y_1 = C_1 \cdot \frac{1}{3} + C_2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 5 = 2C_1 + 2C_2 \\ \frac{1}{3} = y_2 = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_2 \cdot 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \overset{/\cdot 9}{\Rightarrow} 3 = C_1 + 2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 1/2$$

низ: $y_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\boxed{y_n = \left(2+\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(б) сада користимо и $x_n = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(2+\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n} \ \Big|\cdot 3^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 3^n + 2}{2+n/2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(3/2\right)^n + 2}{2+\frac{n}{2}}$$

експоненцијална q^n, $q>1$ је јача од полинома тј. $2+\frac{n}{2} \ll 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$, $n\to\infty$

$$= \boxed{+\infty}$$

↖ можете и апсолутно, скратити са $\left(\frac{3}{2}\right)^n$: ...

(в) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x_n}{y_n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(2+\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}} \ \Big|\cdot 3^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}{2+n/2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1^n + 1^n}}{\sqrt[n]{2+n/2}}$$

$\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1^n + 1^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \max\left\{\frac{3}{2}, 1\right\} = 3/2$

$\sqrt[n]{2+n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ из ⊛

$$\rightsquigarrow \frac{3/2}{1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

□

⊛ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{n}\right)}_{\to 1/2}^{\overset{\to 0}{1/n}} = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \underline{\underline{1}}$$

~ Крај 🙂 ~

Срећно даље!