АНАЛИЗА 1И
ВЕЖБЕ за
6./7. мај

~ Низови ~

Претпоставићемо да сте упознати са теоријом са предавања, ☺
а овде ћемо мало обновити основне дефиниције и својства.

низ реалних бројева: $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad n \mapsto x(n) = \underline{x_n}$

$x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots$

тј. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

ознака
(x_n) или $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Важна својства

- монотоност (растући/опадајући/строго растући/строго опадајући)

  $x_n \le x_{n+1}\ \forall n$ $\quad x_n \ge x_{n+1}\ \forall n$ $\quad x_n < x_{n+1}\ \forall n$ $\quad x_n > x_{n+1}\ \forall n$

  такође могу имати ова својства почев од неког члана
  (нпр. „растући почев од n_0" тј. за $n \ge n_0$ важи $x_{n+1} \ge x_n$)

- периодичност
- ограниченост:

  низ је ограничен $\iff \exists M$ тд. $\forall n\in\mathbb{N}\ |x_n|<M$
  ограничен одозго $\iff \exists M$ тд. $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n<M$
  ограничен одоздо $\iff \exists M$ тд. $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n>M$

Приметимо:

- сваки растући низ је ограничен одоздо својим првим чланом:

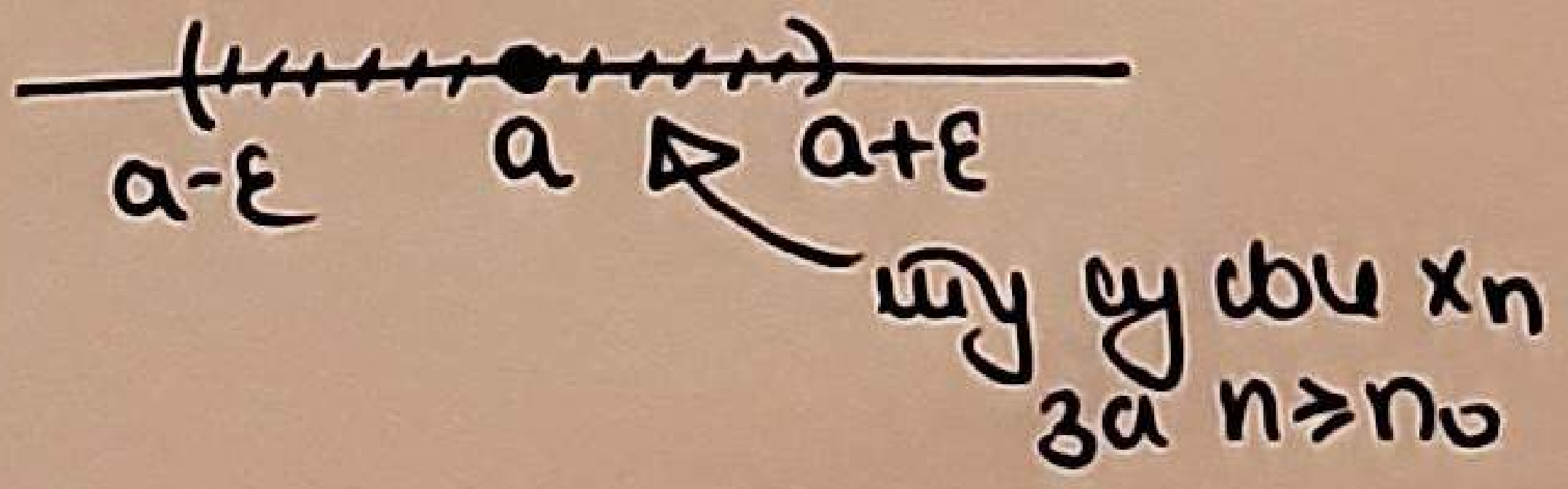
  $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$

- сваки опадајући низ је ограничен одозго својим првим чланом:

  $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$

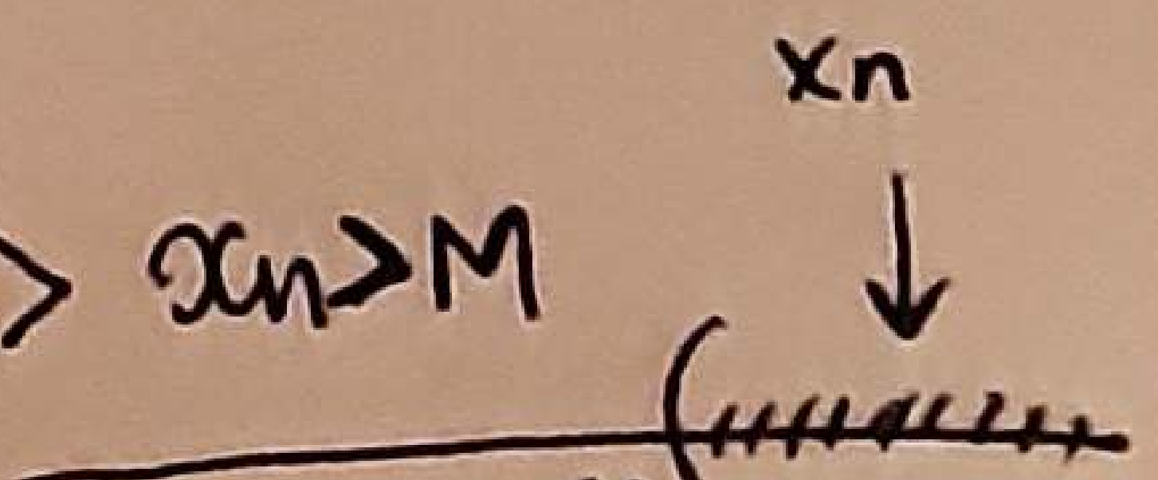
Гранична вредност низа

$a\in\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\ge n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$



бесконачна гр. вредност:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff (\forall M\in\mathbb{R})(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\ge n_0 \Rightarrow x_n>M$



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff (\forall M\in\mathbb{R})(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\ge n_0 \Rightarrow x_n<M$

- Ако низ има коначну граничну вредност кажемо да он конвергира.
- Ако низ нема граничну вредност, или има бесконачну граничну вредност, кажемо да он дивергира.

- Сваки конвергентан низ је ограничен.

  обрнуто не важи: низ $a_n=(-1)^n$ је ограничен али није конвергентан

- **ЛЕМА** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

- својства лимеса за збир, производ, количник низова...

- **ТВРЂЕЊЕ**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0\\ (y_n)\text{- ограничен низ}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0$$

- Такође на предавању смо испитали конвергенцију геометријског низа $x_n=q^n$, $q\in\mathbb{R}$. Закључили смо:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1\\ 1, & q=1\\ +\infty, & q>1\\ \text{не постоји}, & q\leq -1\end{cases}$$

- Отуда ћемо користити да за $k>0$ важи:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$$

$\boxed{1.}$ Доказати по дефиницији:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+5}=2.$$

желимо да докажемо да за $\forall\varepsilon>0$ $\underline{\exists n_0\in\mathbb{N}}$ тако да за $n\geqslant n_0$ <u>важи</u>:

$$\left|\frac{2n+3}{n+5}-2\right|<\varepsilon$$

ово је $\iff \left|\frac{2n+3-2(n+5)}{n+5}\right|<\varepsilon$

$$\iff \left|\frac{-7}{n+5}\right|<\varepsilon$$

$$\iff \frac{7}{n+5}<\varepsilon \iff \frac{7}{\varepsilon}<n+5 \iff \boxed{n>\frac{7}{\varepsilon}-5}$$

Дакле, можемо узети $n_0=\left[\frac{7}{\varepsilon}-5\right]+1$ и за свако $n\geqslant n_0,\ n\in\mathbb{N}$ ће важити

$$\left|\frac{2n+3}{n+5}-2\right|<\varepsilon$$

ово важи за свако $\varepsilon>0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+5}=2}$

<u>II начин</u>:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+5}\overset{:n}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 2}{\left(2+3/n\right)}}{\underset{\to 1}{\left(1+5/n\right)}}\ \underset{\text{о количнику}}{\overset{\text{тврђење}}{=\!=\!=}}\ \frac{2}{1}=2.$$

јер $\frac{5}{n}\to 0,\ n\to\infty$

и заправо овако ћемо радити задатке кад имамо лимес количника два полинома по n

$\boxed{2.}$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+1}{n^4+2n^2-3}\overset{:n^4}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}-\overset{0}{\cancel{\frac{2}{n^3}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n^4}}}}{1+\underset{0}{\cancel{\frac{2}{n^2}}}-\underset{0}{\cancel{\frac{3}{n^4}}}}=\frac{0}{1}=0$$

тако ће бити увек кад је горе полином <u>мањег</u> степена ☺

бројилац→0

именилац→1

$\boxed{3.}$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3-1}{n^2+4}\overset{:n^2}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to-\infty}{\left(-2n-1/n^2\right)}}{\underset{\to 1}{\left(1+\overset{0}{\cancel{\frac{4}{n^2}}}\right)}}=-\infty$$

кад год је горе полином <u>већег</u> степена, лимес ће бити или $+\infty$ или $-\infty$ ☺

Сада можемо применити да важи следеће опште тврђење.

$\boxed{4}$ $a_k, b_m \neq 0$, $k, m \in \mathbb{N}$

тада:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k\cdot n^k + a_{k-1}\cdot n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_m\cdot n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k\cdot\left(a_k + a_{k-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + a_1\cdot\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\cdot\frac{1}{n^k}\right)}{n^m\cdot\left(b_m + b_{m-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + b_0\cdot\frac{1}{n^m}\right)}$$

$$= \begin{cases} 0, & k<m \\ \frac{a_k}{b_m}, & k=m \\ +\infty, & k>m \text{ и } a_k, b_m \text{ истог знака} \\ -\infty, & k>m \text{ и } a_k, b_m \text{ различитог знака} \end{cases}$$

$\boxed{5.}$ Израчунати: $\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ где је $k\in\mathbb{N}$ дат.

Приметимо да је ово количник два полинома по n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!}\cdot \frac{\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{\text{полином степена } k \text{ водећи коеф}=1}}{n^k}$$

$\to \frac{1}{1}$ према $\boxed{4.}$

$$= \boxed{\frac{1}{k!}} \qquad \square$$

$\boxed{6.}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$ = (сетимо се како изгледају збирови квадрата узастопних бројева сада, али су нам потребни само непарни, па од свих одузмено парне)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(2n)^2) - (2^2+4^2+\ldots+(2n)^2)}{n^3} \qquad \left\ulcorner 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\lrcorner$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 4\cdot n^3 + \text{мањи степени} - \frac{4}{6}\cdot 2\cdot n^3 + \text{мањи}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\right)n^3 + \text{мањи}}{n^3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$\square$

$\boxed{7.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ = (рационалишемо)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$:n$ $\quad n=\sqrt{n^2}$ овде $(n\in\mathbb{N})$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{\searrow 1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{\searrow 1}} = \frac{2}{1+1} = ① \quad \square$$

$\boxed{8.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ $\quad :3^n$

(скратићемо са „јачим" чланом доле: 3^n
да доле добијемо коначан лимес)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}+3}{\frac{2^n}{3^n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0}+3}{\underbrace{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}_{\searrow 0}+1}$$

$q=\frac{2}{3}$, $|q|<1 \Rightarrow q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$= \frac{2\cdot 0+3}{0+1} = ③ \quad \square$$

$\boxed{9.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

скрате се

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ ☺ $\qquad = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = ① \quad \square$

На предавању смо доказали:

$\boxed{\text{Теорема}}$ (о 2 полицајца / о 3 лимеса)

$(a_n), (b_n), (c_n)$ три низа таква да важи

$a_n \le b_n \le c_n$ за све $n \ge n_0$

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = x$ онда и низ (b_n) мора конвергирати

и важи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

☺

$$\begin{tikzcd} a_n \arrow[dr, "n\to\infty"'] & \le b_n \le & c_n \arrow[dl, "n\to\infty"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

мора и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Докажимо сада једно корисно тврђење:

Тврђење Нека су $a_1, \ldots, a_m$ позитивни бројеви $(m \in \mathbb{N})$

Тада важи:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n} = \underbrace{\max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}}_{\text{највећи од њих}}$$

Доказ: означимо $a = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$ → свакако $a > 0$

Тада важи:

$$a = \sqrt[n]{a^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{јер је } a \\ \text{један од} \\ a_1, \ldots, a_m}}{\le} \sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_m^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{јер су сви} \\ a_i \le a}}{\le} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = \sqrt[n]{m} \cdot a$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{m} \cdot a) = a \text{ јер } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$$

$$a$$

Према теореми о два полицајца следи да је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_m^n} = a$. □

Пример: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n + 7^n + 2020^n} = \max\{2, 5, 7, 2020\} = 2020$

10 Нека је $x > 0$. Наћи $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n} + x^{3n}}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n} + x^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + (x^2)^n + (x^3)^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{према} \\ \text{тврђењу}}}{=} \max\{1, x^2, x^3\}$$

Имамо случајеве:

(1) ако је $\underline{x < 1}$ $(x > 0)$: тада је $x^2 < 1$ и $x^3 < 1$ $\Rightarrow \boxed{L = 1}$

(2) ако је $\underline{x = 1}$: $L = \max\{1, 1, 1\} \Rightarrow \boxed{L = 1}$

(3) ако је $\underline{x > 1}$: тада је $1 < x^2 < x^3 \Rightarrow \boxed{L = x^3}$

Дакле: $\boxed{L = \begin{cases} 1, & x \le 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}}$ □

За вежбу: одредити $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x^n} + x^n + x^{4n}}$ (! за $x < 1$ $x, x^4 < \frac{1}{x}$ што је max)

$\boxed{11}$ Одредити $L = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)}_{\text{означимо са } a_n}$

a_n је збир n сабирака

свакако важи:

$$n \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{што је } \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}}{\boxed{\text{најмањи сабирак}}} \le a_n \le n \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{што је } \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}}{\boxed{\text{највећи сабирак}}}$$

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}^{\,|:n} \le a_n \le n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}^{\,|:n}, \ \forall n$$

$$\underset{\substack{\searrow \\ n\to\infty}}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}}} \le a_n \le \underset{\substack{\swarrow \\ n\to\infty}}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}}}, \ \forall n$$

$$1$$

Према теореми о 2 полицајца следи $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1}$ ☐

На предавању смо доказали два важна лимеса:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$a > 0 \to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Пример 12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n+1}} + 5^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} + 7^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overset{\nearrow 1}{\boxed{\sqrt[n+1]{2}}} + \overset{\nearrow 1}{\boxed{\sqrt[n+1]{5}}}}{\underset{\swarrow 1}{\boxed{\sqrt[n]{2}}} + \underset{\searrow 1}{\boxed{\sqrt[n]{7}}}} = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$ ☐

~ Монотони низови ~

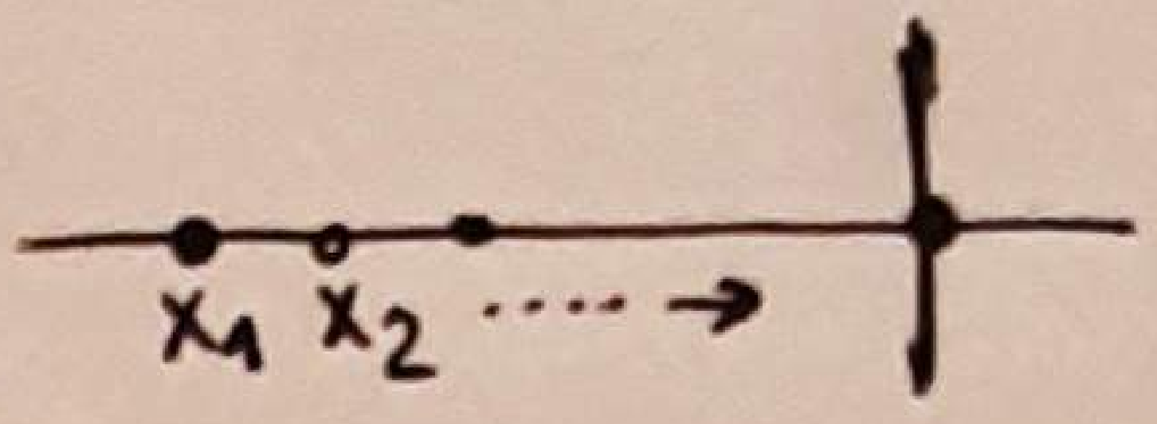
Теорема (x_n)-монотон низ

Тада важи: (x_n) је конвергентан $\Leftrightarrow$ (x_n) ограничен.

С обзиром да за растући / опадајући низ већ знамо да су са једне стране ограничени, можемо формулисати:

T1 (x_n)- растући почев од неког члана. Тада важи:

(x_n) је конвергентан $\Leftrightarrow$ (x_n) ограничен одозго.



T2 (x_n)- опадајући почев од неког члана. Тада важи:

(x_n) је конвергентан $\Leftrightarrow$ (x_n)-ограничен одоздо.

① Испитати конвергенцију низа $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ коренова}}$

Приметимо да важи веза:

$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ за свако $n\geq 1$

и $x_1=\sqrt{2}$

Докажимо да је овај низ растући и ограничен.

1° $x_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=x_2$

индукцијом доказујемо да $x_n<x_{n+1}$, $\forall n\geq 1$

база: $n=1$: $x_1<x_2$ ✓

$n\rightarrow n+1$ индуктивна хипотеза: $x_n<x_{n+1}$

инд корак: за $n+1$: $\underset{\parallel}{x_{n+1}} \overset{?}{<} x_{n+2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+x_{n+1}}$

$\Leftrightarrow$ Ⓣ јер $x_n<x_{n+1}$ због инд. хип.

$\Rightarrow$ за $\forall n\in\mathbb{N}$ важи $x_n<x_{n+1}$

тј. (x_n) је растући низ: $\boxed{x_n\uparrow}$

2° сада само треба доказати да је ограничен одозго.

и то ћемо индукцијом по n.

Показујемо да важи: $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n\leq 2$

база: $n=1$ $x_1=\sqrt{2}<2$ ✓

$n\mapsto n+1$: инд. хипотеза $x_n<2$

за $n+1$: $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2}=2$ ✓

$\Rightarrow$ за свако $n\in\mathbb{N}$ важи $\boxed{x_n<2}$

Сада из ① и ② на основу $\boxed{T1}$ закључујемо да је (x_n) конвергентан низ,

тј. $\exists x\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

треба одредити x: знамо $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $/\lim\limits_{n\to\infty}$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}_{\overset{\|}{x}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n}}_{\overset{\|}{\sqrt{2+x}}}$$

$x=\sqrt{2+x}$ + $\underline{x\geq 0}$

$x^2=2+x$

$x^2-2-x=0$ $x=2 \vee \underline{x=-1}$

није могуће јер $x\geq 0$

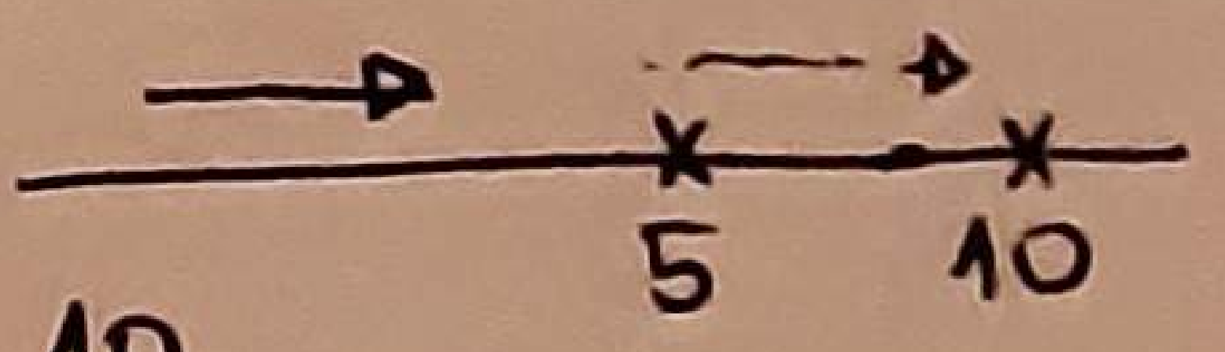
$\Rightarrow \textcircled{x=2}$ тј. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2}$ □

☺ Како да наслутимо да ли низ расте или опада, ако није очигледно? Чиме да покушамо да га ограничимо?

У томе нам може помоћи да размишљамо овако – ако би конвергирао тј. ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, шта је x?

Када то урадимо на почетку, мада ми не знамо да низ конвергира, то нам може дати неке смернице да покажемо конвергенцију!

Пример: ако закључимо да је низ растући,



и да ако конвергира мора конвергирати ка 10,

сигурно нећемо доказивати да је огр. одозго са 5,

јер сигурно није!

$\boxed{2}$ $a>0$ дат. $x_1>0$ дат

Сваки следећи члан низа је задат преко претходног формулом:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Испитати конвергенцију низа; ако конвергира наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

☺ ако успемо да докажемо да конвергира, да видимо чему конвергира:

дакле, ако: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad / \lim_{n\to\infty}$$

ако $\underline{x \neq 0}$ можемо закључити:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a \Rightarrow x^2 = a \quad \boxed{x = \pm\sqrt{a}}$$

Дакле, низ може конвергирати ка $0, -\sqrt{a}$ или $\sqrt{a}$ (толико знамо за сад)

Посматрајмо: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$

Како је $x_1>0$, индукцијом се лако докаже да $\boxed{x_n>0, \forall n}$

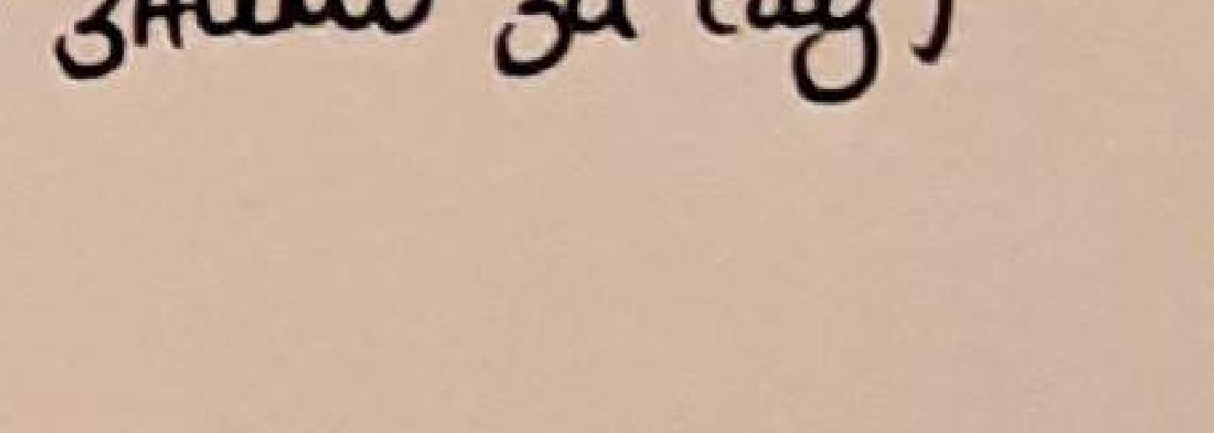
Али видимо и доста више од тога, сећајући се неједнакости аритм. и геом. средине:

1° доказујемо: $\underline{x_n \geq \sqrt{a}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$

заиста: за $n \geq 1$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{x_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2}$$

2° пошто на основу претходног и дела ☺ видимо да је једини могући лимес $\sqrt{a}$, а сви $x_n \geq \sqrt{a}, n \geq 2$, покушајмо да докажемо да низ <u>опада</u>



посматрајмо разлику:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right) = \underbrace{\frac{1}{2x_n}}_{>0} \cdot \underbrace{(\sqrt{a} - x_n)}_{\substack{<0 \\ \text{из } 1^\circ}} \underbrace{(\sqrt{a} + x_n)}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n, \ \forall n$

$\Rightarrow \boxed{x_n \downarrow}$

Из ①, ② и $\boxed{T2}$ закључујемо да низ (x_n) конвергира.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$$

Сада заправо треба да проверимо део ☺ - ту смо закључили да су једине могућности за x: $\underline{0, -\sqrt{a}, \sqrt{a}}$

Али, како је $\underline{x_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2}$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}}$$

$\boxed{3.}$ $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$ $c>0$ константа. Испитати конвергенцију.

☺ ако конвергира, чему?

ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

нађимо везу: $a_{n+1} = \dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{c}{n+1} \cdot \dfrac{c^n}{n!}$

$$a_{n+1} = \frac{c}{n+1} \cdot a_n \quad / \lim_{n\to\infty}$$

$$a = 0 \cdot a$$

$\boxed{a=0}$ једини кандидат је 0.

Показаћемо да овај низ опада почев од неког члана и да је огр. оздо.

① $a_n = \dfrac{c^n}{n!} > 0, \forall n \Rightarrow$ ограничен оздо.

② опада?

посматрајмо количник:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c}{n+1} < 1$$

за $n+1 > c$ тј. за $\boxed{n \geq c-1}$

$\Rightarrow$ низ опада $(a_{n+1} < a_n)$ за $\underline{\underline{n \geq n_0}} = [c-1]+1$

Из ① и ② и $\boxed{T2}$ закључујемо да низ конвергира

тј. $\exists a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

већ смо одредили a у ☺: $a=0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0$

другим речима, $\underset{(c>0)}{c^n} \ll n!$, $n \to \infty$ □

Још један сличан задатак:

$\boxed{4.}$ $a_n = \frac{n^k}{c^n}$, $c>1$, $k\in\mathbb{N}$

☺ ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$, шта је a?

нађимо везу a_{n+1} и a_n:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{c^{n+1}} = \frac{(n+1)^k}{n^k}\cdot\frac{1}{c}\cdot\underbrace{\frac{n^k}{c^n}}_{=a_n}$$

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{c}\cdot a_n \quad /\lim_{n\to\infty} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\overset{\text{const}}{k}} \to 1,\ n\to\infty$$

$\downarrow$

$$a = 1\cdot\frac{1}{c}\cdot a$$

$$a = \frac{a}{c} \underset{c>1}{\Longrightarrow} \boxed{a=0}$$

Покажимо да и овај низ опада и ог. одоздо:

① $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

② $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{c} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{да ли је?}}}{<} 1$

$$\Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < c \quad / \sqrt[k]{\ }$$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{n} < c^{1/k}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \underbrace{c^{1/k}-1}_{>0 \text{ јер } c>1}$$

$$\Longleftrightarrow n > \frac{1}{c^{1/k}-1} \Rightarrow \text{за } n\geq n_0 \text{ важи } \frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \text{ тј. } a_{n+1}<a_n$$

$$n_0 = \left[\frac{1}{c^{1/k}-1}\right]+1$$

$\boxed{\text{низ опада}}$ почев од n_0

①, ②, $\boxed{T2}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$

☺ $\Rightarrow a=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{c^n} = 0, \text{ за } c>1 \text{ тј. } n^k \ll c^n,\ n\to\infty$$

(сетимо се $x^k \ll c^x$, $x\to\infty$, $c>1$ за функције) □

⊛ за вежбу: низ је дат са: $a_1=0$

$$a_{n+1}=a_n+(a_n-c)^2 \ , \quad 0<c<1$$

Испитати конвергенцију.

(решење: $(a_n)\uparrow$

∘∘∘

∘∘∘ $\lim_{n\to\infty} a_n = c$)

$\boxed{5.}$ Дат је низ: $x_1>0$ дат

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n} \ , \quad \forall n\geq 1$$

Испитати конвергенцију.

Очигледно је да $x_{n+1}>x_n$ јер су сви $x_n>0$ (лако докажемо индукцијом)

а $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$

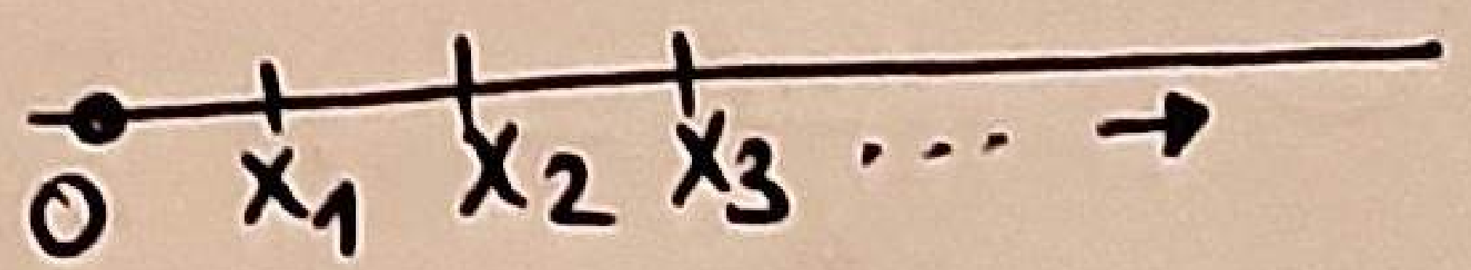
Дакле, имамо растући низ (x_n).

Он има две могућности: → није ограничен одозго, тада $x_n\to+\infty$

→ ограничен одозго, тада има коначну гр. вред.

Шта би било ако има коначну гр. вред. x.:

ако $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ како $x_1>0$ и $(x_n)\uparrow \Rightarrow \underline{x>0}$



$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n} \quad / \lim_{n\to\infty}$$

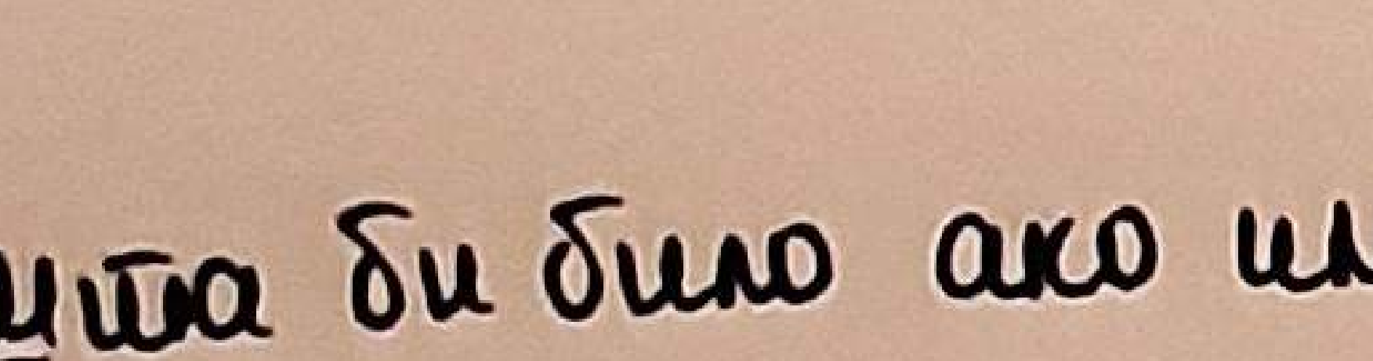
$$x = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}=0 \quad ↯ \text{ немогуће}$$

⇒ овај низ не може конвергирати

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty}$$

□

$\boxed{6.}$ $a_n>0, \forall n, \lim_{n\to\infty} a_n=0$ да ли овај низ мора опадати?



НЕ пример:

$$1, 2, \frac{1}{2}, 2\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2\cdot\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 2\cdot\frac{1}{n}$$

низ задат са: $a_{2k-1}=\frac{1}{k}$

$a_{2k}=2\cdot\frac{1}{k}$

овај низ тежи нули, али не опада ($a_{2k}>a_{2k-1}$ $\forall k$)

~ Број e ~

На предавању смо видели да важи:

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ је растући низ, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$

Слично се доказује да $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ је опадајући низ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

Дакле, знамо:

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n}$$

Користићемо следећу лему без доказа:

ЛЕМА (p_n) - низ реалних бројева такав да $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$

(q_n) - — || — || — || — $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = -\infty$

тада важи: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$

(Ово директно следи из $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ и исто за $x\to-\infty$, и теореме о вези између лимеса функције и лимеса низа коју ћете радити ускоро на предавању)

$\boxed{1.}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$ (наштимамо облик $1+\frac{1}{p_n}$, $p_n\to+\infty$ (или $-\infty$))

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+1}{2n}}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}\cdot\frac{2n}{n^2-n+1}\cdot\frac{n^2+1}{n}}$$

← наштимамо p_n горе

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{n^2-n+1}{2n}}_{p_n}}\right)^{\overset{p_n}{\frac{n^2-n+1}{2n}}}}_{\to e,\ n\to\infty}{}^{\cdot\, 2\,\overbrace{\frac{n^2+1}{n^2-n+1}}^{\to 1,\ n\to\infty}}$$

$p_n\to+\infty$ кад $n\to\infty$

$$= \boxed{e^2} \quad \square$$

$\boxed{2}$ $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{\underbrace{(-n)}_{q_n}}\right)^{\overset{q_n}{(-n)}}\right)}_{\to e \text{ јер } q_n\to-\infty}{}^{(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \square$$

$\boxed{3}$ Доказати:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}=0$ (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}=0$ (за вежбу, решити слично као (а))

(а) Већ смо имали сличне задатке:

означимо $a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$ и докажимо да овај низ $\downarrow$ за $n>n_0$ и да је огр. одоздо.

① $a_n>0, \forall n\ \mathbb{N}$

② $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, да ли је <1 за $n>n_0$?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}_{a_{n+1}}\cdot\underbrace{\frac{(n!)^2}{n^n}}_{\frac{1}{a_n}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{скратимо}\\ (n!)^2}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n+1}\cdot\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{<e} < \frac{e}{n+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{за } \boxed{n>2}}}{<} 1$$

$\Rightarrow a_{n+1}<a_n$ за $n>2$ тј. низ опада почев од a_3

①, ②, $\boxed{T2}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in\mathbb{R}$

а одређујемо из вез a_{n+1} и a_n: $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot a_n \quad / \lim\limits_{n\to\infty}$

$$\begin{matrix} a_{n+1} & = & \frac{1}{n+1} & \cdot & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \cdot & a_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & = & 0 & \cdot & e & \cdot & a \end{matrix}$$

$\Rightarrow a=0$ тј. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

Дакле, можемо писати:

$$n! \overset{(б)}{\ll} n^n \overset{(а)}{\ll} (n!)^2,\ n\to\infty$$

Од раније (видети претх. задатке) знамо:

$$n^k \ll c^n \ll n! \quad \text{за } c>1$$

а за вежбу докажите да важи: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^k}=0$ за $a>1, k>0$

тј. $\log_a n \ll n^k$

Све заједно, имамо однос низова: за $a, c>1$, $k>0$

$$\log_a n \ll n^k \ll c^n \ll n! \ll n^n \ll (n!)^2,\ n\to\infty$$

(као код функција: $\log_a x \ll x^k \ll c^x \ll x^x,\ x\to+\infty$)

$\boxed{4.}$ Израчунати:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{15} n + n^{2020} - 32\cdot n! + 2020^{2020n}}{2020^{2020n} - n! + \sin(n^2+\sqrt{\log_2 n})}$$

⌈ препознамо најјачи доле што је $n!$ скратимо њиме ⌋

$$\overset{:n!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{\log_{15} n}{n!}}^{\nearrow 0} + \cancel{\frac{n^{2020}}{n!}}^{\nearrow 0} - 32 + \cancel{\frac{(2020^{2020})^n}{n!}}^{\nearrow 0}}{\underbrace{\cancel{\frac{(2020^{2020})^n}{n!}}}_{\swarrow 0} - 1 + \underbrace{\cancel{\frac{\sin(\sqcup)}{n!}}}_{\searrow 0}}$$

$\leftarrow c = 2020^{2020}$ $\frac{c^n}{n!} \to 0, n\to\infty$

јер $\frac{\text{ограничена}}{\to +\infty}$

$$= \frac{-32}{-1} = \boxed{32} \quad □$$

$\boxed{5.}$ Доказати да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Користимо: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad / \ln$

$$\Rightarrow \quad n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

одавде имамо: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

одавде имамо: $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

чиме је доказ завршен. □

6. Доказати да низ: $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ конвергира.

Доказаћемо да је овај низ опадајући и ограничен одоздо.

- разлика суседних чланова:

$$a_{n+1}-a_n = \left(\cancel{1+\frac{1}{2}+\ldots+}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+1)-\left(\cancel{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)+\ln n$$

$$= \frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{на основу} \\ \text{претходног задатка}}}{<} 0 \quad , \underline{\forall n\in\mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{(a_n) \text{ је опадајући низ}}$ (1)

- покажимо да је ограничен нулом одоздо:

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{користимо} \\ \frac{1}{k}>\ln(1+\frac{1}{k}),\ \forall k\in\mathbb{N}}}{>} \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$= \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$

$$= \ln\left(\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)-\ln n$$

$$= \ln(n+1)-\ln n$$

$$> 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_n>0}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (2)

На основу теореме о монотоним низовима закључујемо да важи

$\exists \gamma\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\gamma$ тј. (a_n) конвергира.

☺ ово γ се назива Ојлерова константа, $\gamma\approx 0{,}57\ldots$ □

☺ видимо да је $a_n = b_n - c_n$

$b_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ хармонијски низ

$c_n = \ln n$

оба ова низа b_n и c_n дивергирају (јер теже ка $+\infty$), а њихова разлика a_n конвергира.

$\boxed{7}$ Одредити $L = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)}_{a_n}$

Да ли бисмо могли преко теореме о два полицајца? a_n је збир n сабирака

$$n \cdot \text{најмањи} \leq a_n \leq n \cdot \text{највећи}$$

$$\frac{n}{2n} \leq a_n \leq n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}} \leq a_n \leq \underset{\underbrace{1}}{\overset{\downarrow n\to\infty}{\boxed{\frac{n}{n+1}}}}$$

Не може теорема о два полицајца ☹.

Искористићемо оно што смо научили у претходном задатку.

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

намештамо низ из претходног задатка

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln(2n)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$
$$+ \ln 2n - \ln n$$

$$= b_{2n} - b_n + \ln\frac{2n}{n}$$

где $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ низ из претх. зад.

$$= b_{2n} - b_n + \ln 2$$

знамо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \gamma$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underset{\gamma}{\underset{\downarrow}{b_{2n}}} - \underset{\gamma}{\underset{\downarrow}{b_n}} + \ln 2\right) = \gamma - \gamma + \ln 2 = \boxed{\ln 2} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2}$$

□