АНАЛИЗА 1И ВЕЖБЕ за 29/30. април

~ Испитивање функција ~

На основу градива са предавања, знамо да за дату функцију испитујемо следећа својства:

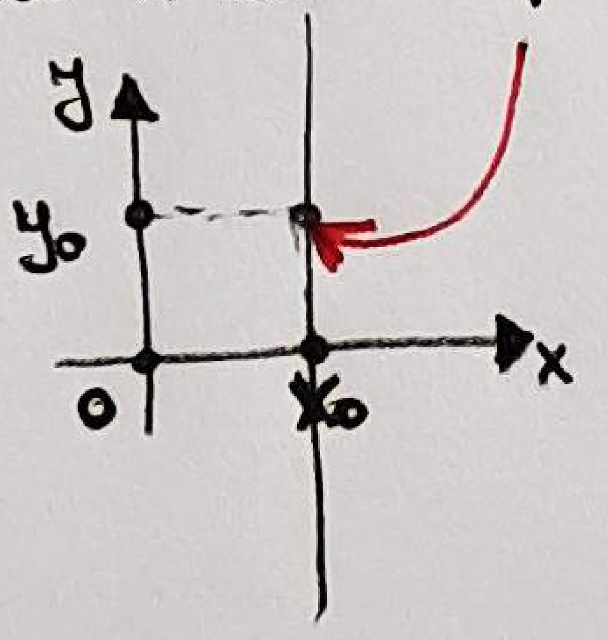
1. D_f - домен
2. парност/непарност, периодичност
3. нуле и знак
4. асимптоте и понашање у крајевима домена
5. непрекидност & диференцијабилност
6. $f'(x)$ и интервали монотоније
7. $f''(x)$ и конвексност/конкавност
8. Γ_f - цртамо график

* овај редослед је само пример, може се радити и другачијим редом ако нам више одговара

* најчешће ћемо $\boxed{5}$ и $\boxed{6}$ заједно писати пошто диференцијабилност & $f'(x)$ природно иду заједно :), а непрекидност ћемо често видети на самом почетку.

* уколико у коначној тачки x_0 у којој функција није непрекидна имамо коначан лимес на пример $\lim_{x\to x_0+} f(x) = y_0$, потребно је одредити и $\lim_{x\to x_0+} f'(x)$

да бисмо видели како се приближава график тој тачки:



(наравно, аналогно за $x\to x_0-$ и разне такве ситуације)

Прво ћемо детаљно испитати неколико функција, а затим видети примене.

$\boxed{1}$ испитати функцију:

$$f(x)=|x+2|\cdot e^{-1/x}$$

Видимо:
$$f(x)=\begin{cases}(x+2)\cdot e^{-1/x}, & x\in[-2,0)\cup(0,+\infty)\\ -(x+2)\cdot e^{-1/x}, & x<-2\end{cases}$$

$\boxed{1}$ Домен: D_f

једини услов је $x\neq 0 \Rightarrow \boxed{D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$

функција је $\boxed{\text{непрекидна}}$ на целом домену као производ непрекидних.

$\boxed{2}$ // (нема тих својстава)

$\boxed{3}$ нуле и знак: $\underline{f(x)\geq 0,\ \forall x\in D_f}$

$f(x)=0 \iff |x+2|=0 \iff \boxed{x=-2}$ – једина нула функције

$\boxed{4}$ асимптотика

Разматрамо све „крајеве домена": $-\infty, +\infty$ и 0

за $+\infty$ и $-\infty$ ћемо користити Тејлоров развој (тј. Маклоренов)

$x\to+\infty$ $\quad f(x)=(x+2)\cdot e^{-1/x}$ $\qquad -\frac{1}{x}\to 0$

$$=(x+2)\cdot\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+2-\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\underbrace{x+1}\underbrace{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}}_{<0}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y=x+1$ је коса асимптота кад $x\to+\infty$

и Γ_f је испод асимптоте

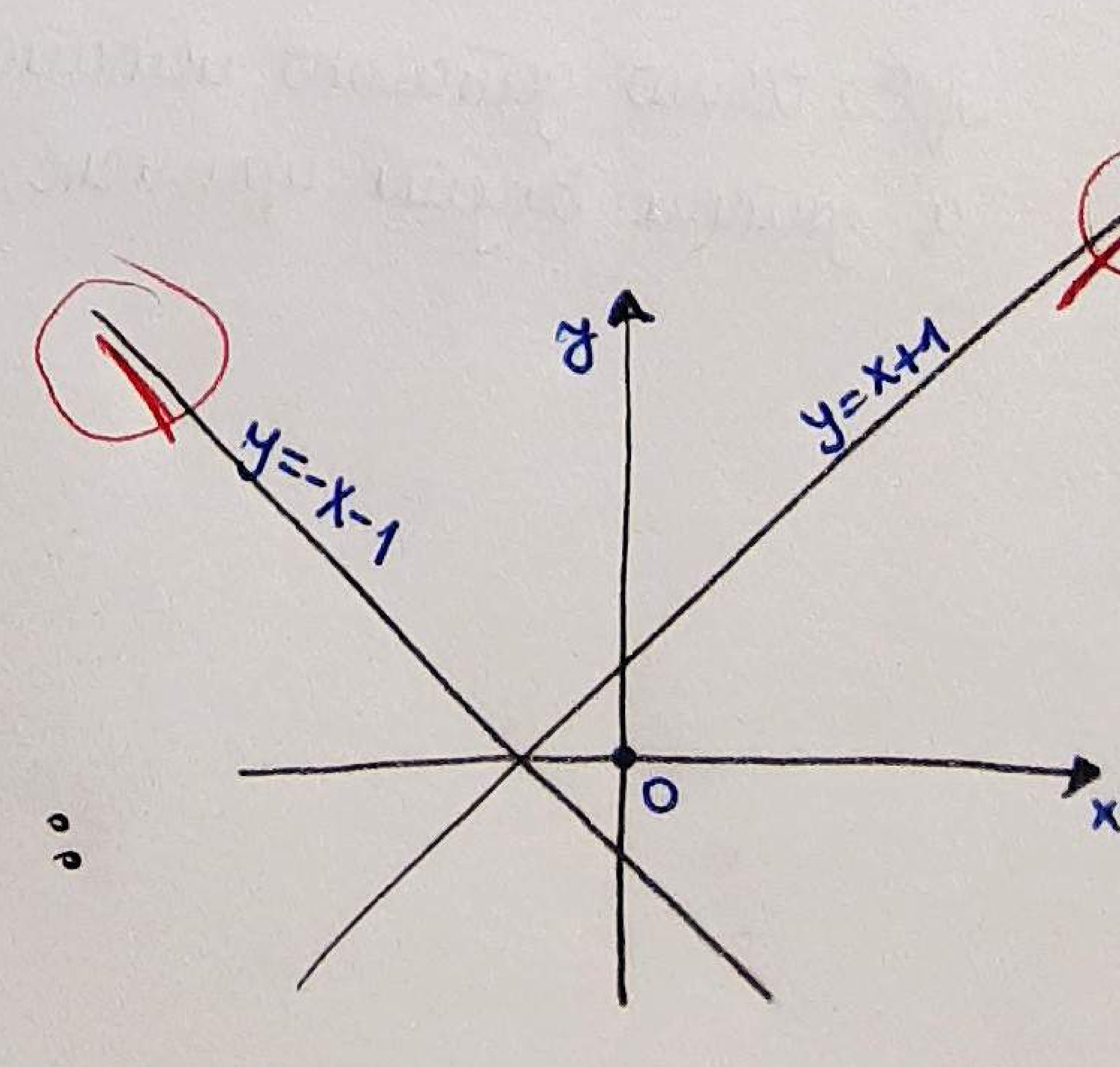
$x\to-\infty$ $\quad f(x)=-(x+2)\cdot e^{-1/x}$

= исти развој са минусом

$$=\underbrace{-x-1}+\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}}_{<0}+o\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \Gamma_f \text{ испод}$$

$y=-x-1$ је к.А. кад $x\to-\infty$

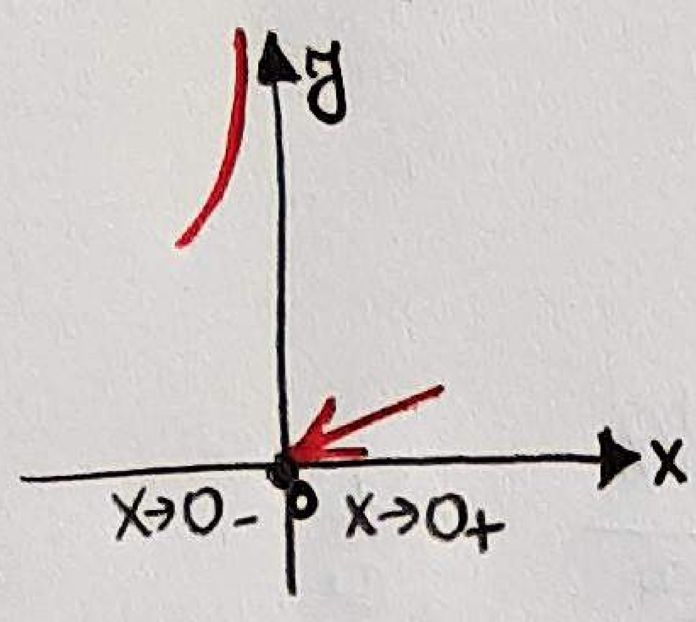
Скица за $-\infty$ и $+\infty$:



$x \to 0$ $\quad e^{-1/x}$ сугерише да ћемо имати различито понашање
за $x \to 0+$ и $x \to 0-$
па ћемо то раздвојити:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \underbrace{(x+2)}_{\to 2}\cdot e^{\overbrace{-1/x}^{\to +\infty}} = +\infty \Rightarrow \boxed{x=0}$$ вертикална асимптота за $\boxed{x\to 0-}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \underbrace{(x+2)}_{\to 2}\cdot \underbrace{e^{\overbrace{-1/x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow$$ функција са десне стране улази у нулу под којим углом? видећемо код извода (*)



5 $f'(x)$ и диференцијабилност: (!! пазимо тачку -2 због $|x+2|$)

$\underline{x\in(-2,0)\cup(0,+\infty)}$: $\quad f'(x) = \left((x+2)\cdot e^{-1/x}\right)' = e^{-1/x} + (x+2)\cdot e^{-1/x}\cdot \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = e^{-1/x}\cdot \frac{x^2+x+2}{x^2}$$

$\underline{x\in(-\infty,-2)}$: $\quad f'(x) = \left(-(x+2)\cdot e^{-1/x}\right)'$

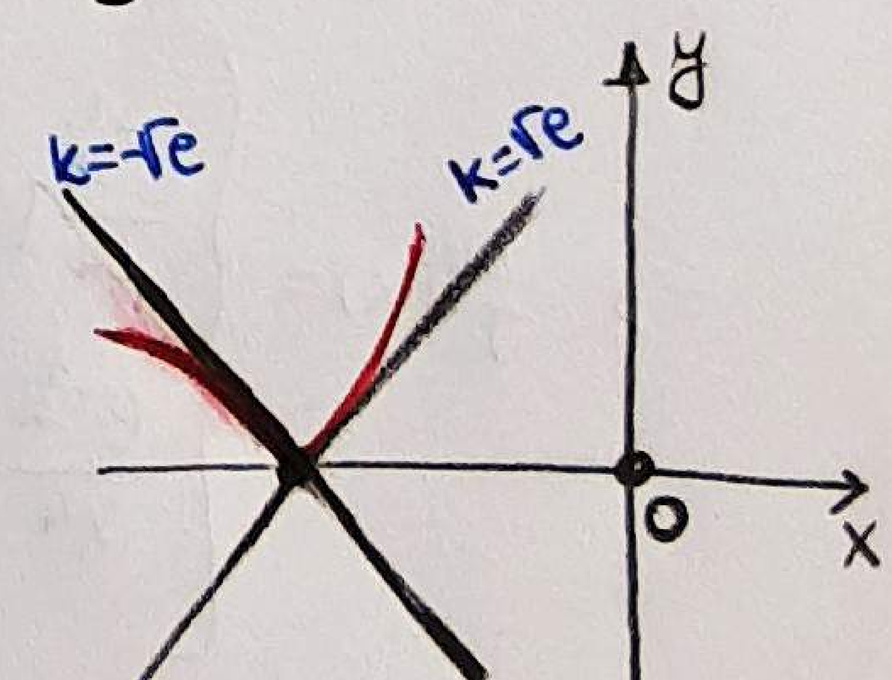
$$f'(x) = -e^{-1/x}\cdot \frac{x^2+x+2}{x^2}$$

$\underline{\text{шта се дешава у тачки } x=-2}$: $\quad \lim_{x\to -2+} f'(x) = \lim_{x\to -2+} e^{\overbrace{-1/x}^{\to 1/2}}\cdot\frac{x^2+x+2}{x^2} = \sqrt{e} \quad = f'_+(-2)$ десни извод

$$\lim_{x\to -2-} f'(x) = -\sqrt{e} = f'_-(-2)$$ леви извод

$f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f$ није диференцијабилна у тачки -2

са десне стране тангента има коеф. $= \sqrt{e}$
са леве −||− −||− −||− $= -\sqrt{e}$
скица →



напомена: у овом тренутку још не знамо да ли се тачно овако приљубљује Γ_f уз тангенте (тј. са које стране)
за то ће нам бити потребна конвексност

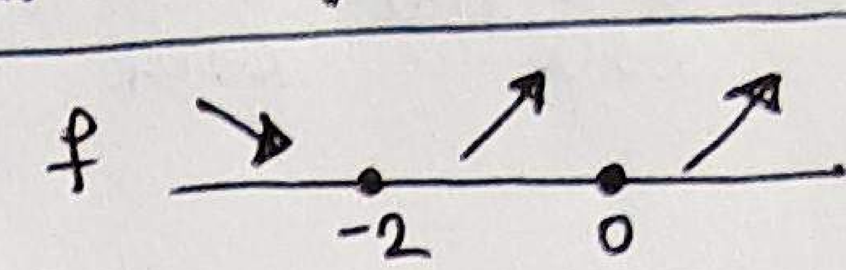
Дакле, $\boxed{f \text{ је диференцијабилна на } (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)}$

$\boxed{\text{ЗНАК } f'(x)}$:

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x^2+x+2}{x^2}, & x\in(-2,0)\cup(0,+\infty)\\ -e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x^2+x+2}{x^2}, & x\in(-\infty,-2)\end{cases}$$

$x^2+x+2>0$ увек (дискриминанта <0)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ за } x\in(-2,0)\cup(0,+\infty)\\ f'(x)<0 \text{ за } x\in(-\infty,-2)\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f \text{ расте на } (-2,0) \text{ и } f \text{ расте на } (0,+\infty)\\ f \text{ опада на } (-\infty,-2)\end{array}}$$



- Овде ћемо још видети део ⊛ из $\boxed{4}$, тј. како се функција приближује кад $\boxed{x\to 0+}$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x)=\lim_{x\to 0+} e^{\overset{\to -\infty}{-1/x}}\cdot\frac{\overset{\to 2}{(x^2+x+2)}}{\underset{\to 0+}{x^2}} = 2\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{„}\frac{0}{0}\text{“}$$

$$\underbrace{\text{смена } \tfrac{1}{x}=t\to+\infty} = 2\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t} \overset{t^2\ll e^t}{=} 0$$

$k=0$
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{функција се хоризонтално приближује за } x\to 0+ \text{ (уз x-осу)}}$

$\boxed{6}$ $f''(x)$ и превојне тачке, конвексност и конкавност

$$\left(e^{-1/x}\cdot\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2+x+2}{x^2} + e^{-1/x}\cdot\frac{(2x+1)\cdot x^2-(x^2+x+2)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{e^{-1/x}}{x^4}\cdot\left(x^2+x+2+\cancel{2x^3}+x^2-\cancel{2x^3}-2x^2-4x\right) = \frac{e^{-1/x}(2-3x)}{x^4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(2-3x), & x\in(-2,0)\cup(0,+\infty)\\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(3x-2), & x\in(-\infty,-2)\end{cases}$$

Знак $f''(x)$: за $x<-2$: $f''(x)<0$ очито $\to$ f конкавна на $(-\infty,-2)$

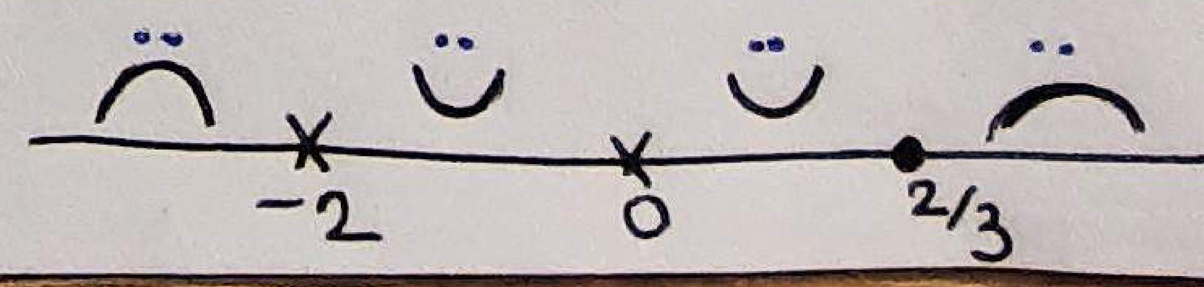
за $x>-2, x\neq 0$: зависи од $2-3x$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

тако видимо:

$f''(x)>0$ за $x\in(-2,0)\cup(0,\frac{2}{3})$ $\to$ f конвексна на $(-2,0)$, и конв. на $(0,\frac{2}{3})$

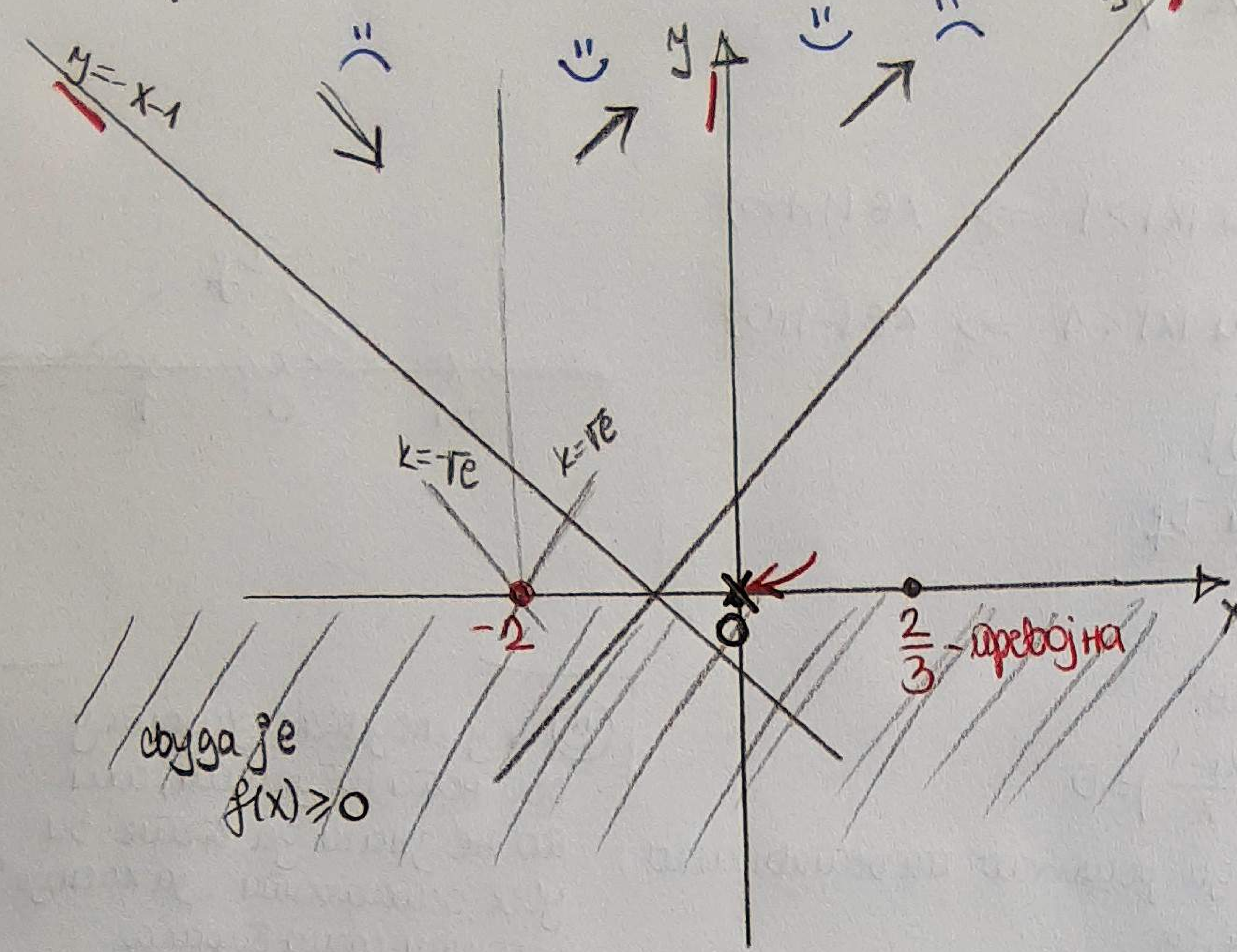
$f''(x)<0$ за $x\in(\frac{2}{3},+\infty)$ $\to$ f конкавна на $(\frac{2}{3},+\infty)$

$\boxed{x=\frac{2}{3}\text{ - превојна тачка}}$

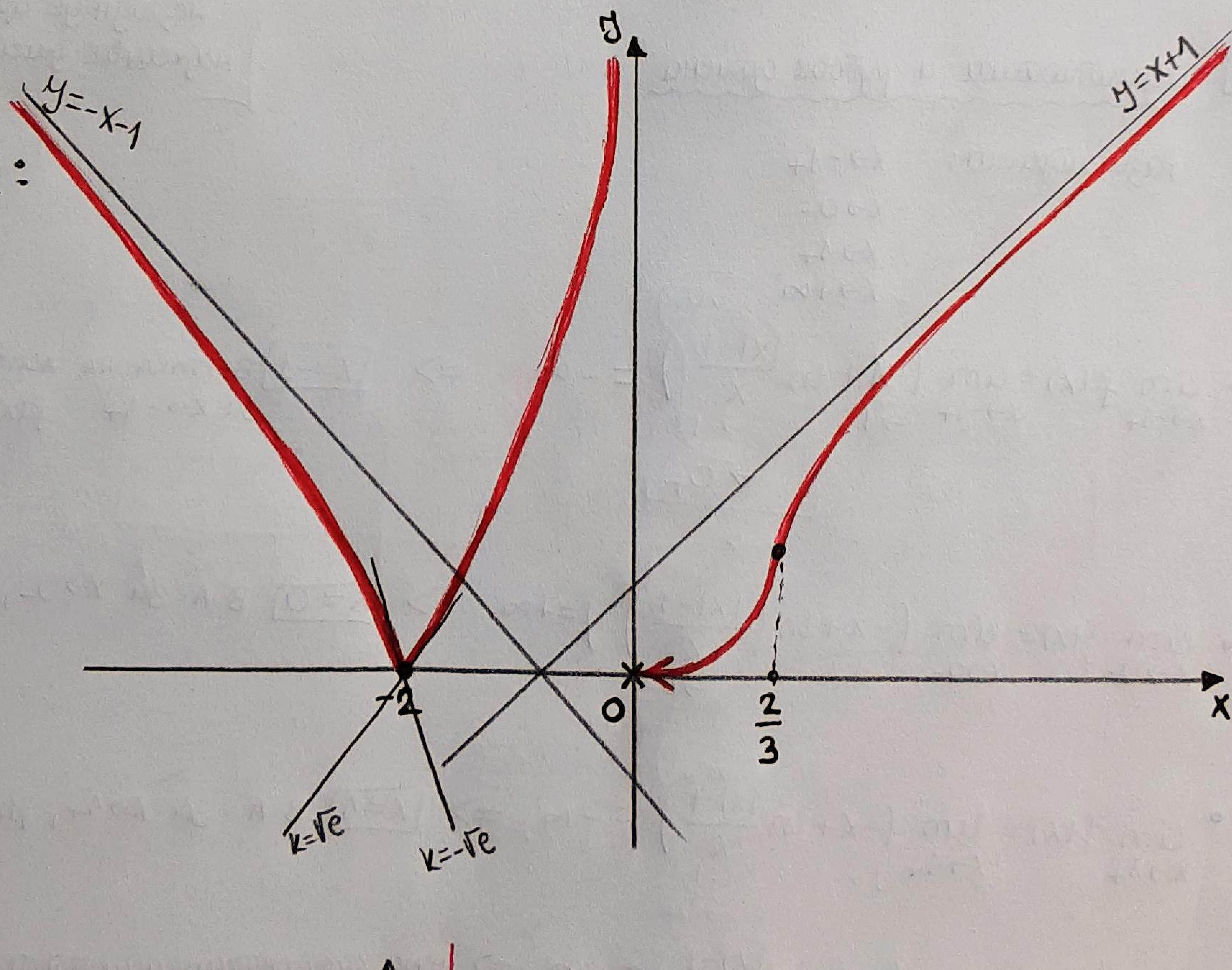


$\boxed{7}$ Сада цртамо график Γ_f :

прво „унесемо" све смернице:



⇒ Γ_f :

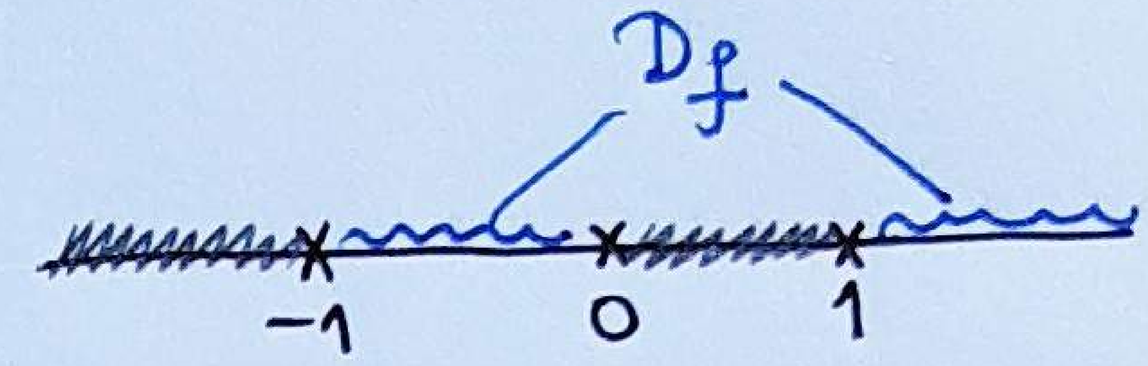


2. Испитати функцију:

$$f(x) = -x + \ln\left(\frac{|x|-1}{x}\right)$$

1 D_f: $x \neq 0$

$$\frac{|x|-1}{x} > 0 \quad \begin{cases} x>0 \text{ и } |x|>1 \Rightarrow x \in (1,+\infty) \\ x<0 \text{ и } |x|<1 \Rightarrow x \in (-1,0) \end{cases}$$



Дакле, $\boxed{D_f = (-1,0) \cup (1,+\infty)}$

f је непрекидна на D_f

2 //

3 Нуле и знак: решавамо

$$-x + \ln\left(\frac{|x|-1}{x}\right) = 0$$

не умемо да решимо па остављамо за касније

☺ и у следећем задатку ово нећемо умети, али то не значи да ћете ви увек остављати „за касније" већ сам само бирала незгодније примере ☺ најчешће умете ово решити!

4 асимптоте и рубови домена

Разматрамо: $x \to -1+$

$x \to 0-$

$x \to 1+$

$x \to +\infty$

- $$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \Big(\underbrace{-x}_{\to 1} + \underbrace{\ln \underbrace{\left(\frac{\overset{\to 0-}{|x|-1}}{\underset{\to -1}{x}}\right)}_{\to 0+}}_{\to -\infty}\Big) = -\infty \Rightarrow \boxed{x=-1}$$ вертикална асимптота за $x \to -1+$ $f(x) \to -\infty$

- $$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \Big(\underbrace{-x}_{\to 0} + \ln \underbrace{\left(\frac{\overset{\to -1}{|x|-1}}{\underset{\to 0-}{x}}\right)}_{\to +\infty}\Big) = +\infty \Rightarrow \boxed{x=0}$$ В.А. за $x \to 0-$, $f(x) \to +\infty$

- $$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \Big(\underbrace{-x}_{\to -1} + \ln \underbrace{\frac{\overset{\to 0+}{|x|-1}}{\underset{\to 1}{x}}}_{\to 0+}\Big) = -\infty \Rightarrow \boxed{x=1}$$ В.А. за $x \to 1+$, $f(x) \to -\infty$

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \Big(-x + \underbrace{\ln \underbrace{\frac{|x|-1}{x}}_{\to 1}}_{\to 0}\Big) = -\infty$$ $\Rightarrow$ нема хоризонталну асимптоту.

Да ли има косу?

Овде ћемо по дефиницији:

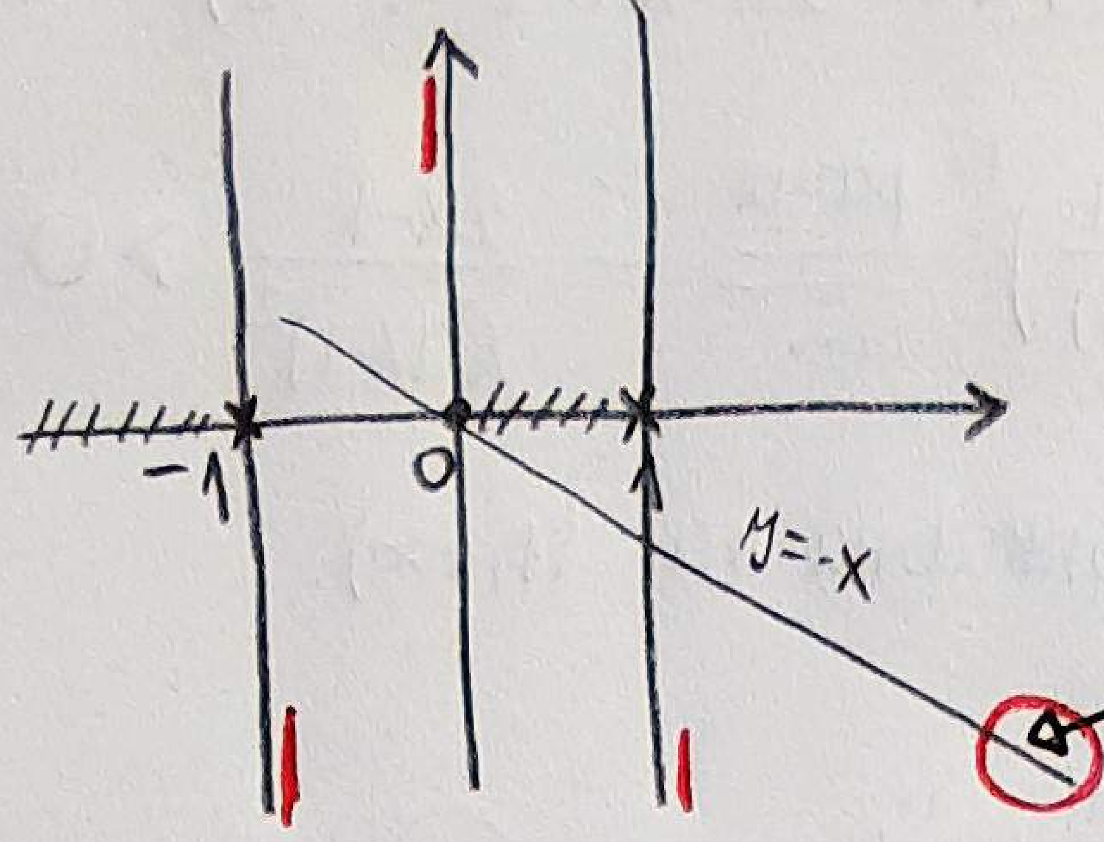
$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(-1 + \overbrace{\frac{\ln \frac{|x|-1}{x}}{x}}^{\to 0}\Big) = -1 \qquad \boxed{a=-1}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{|x|-1}{x}=0 \quad \boxed{b=0}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y=-x}$ је коса асимптота кад $x\to+\infty$

Скица асимптотике:



не знамо са које стране иде уз $y=-x$ али закључимо на основу других својстава

$\boxed{5}$ $f'(x)$ – раздвајамо за $x\in(-1,0)$ и $x\in(1,+\infty)$ због $|x|$:

<u>$x\in(-1,0)$</u> $\quad f'(x)=\Big(-x+\underbrace{\ln\Big(\frac{-x-1}{x}\Big)}_{\ln(-1-\frac{1}{x})}\Big)'=-1+\frac{1}{\frac{-x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-1-\frac{1}{x(x+1)}=-\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}$

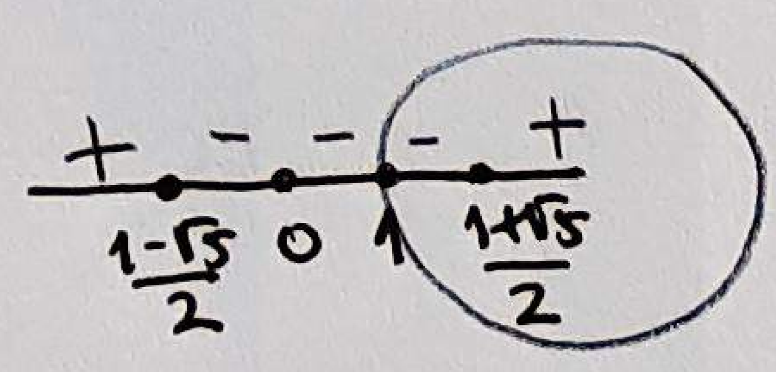
$f'(x)=-\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}>0$ за $x\in(-1,0)$ $\Rightarrow$ <u>f расте на $(-1,0)$</u>

<u>$x\in(1,+\infty)$</u> $\quad f'(x)=\Big(-x+\ln\frac{x-1}{x}\Big)'=-1+\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-1+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-x^2+x+1}{x(x-1)}$

$f'(x)=-\frac{x^2-x-1}{x(x-1)}>0$

знак од x^2-x-1:

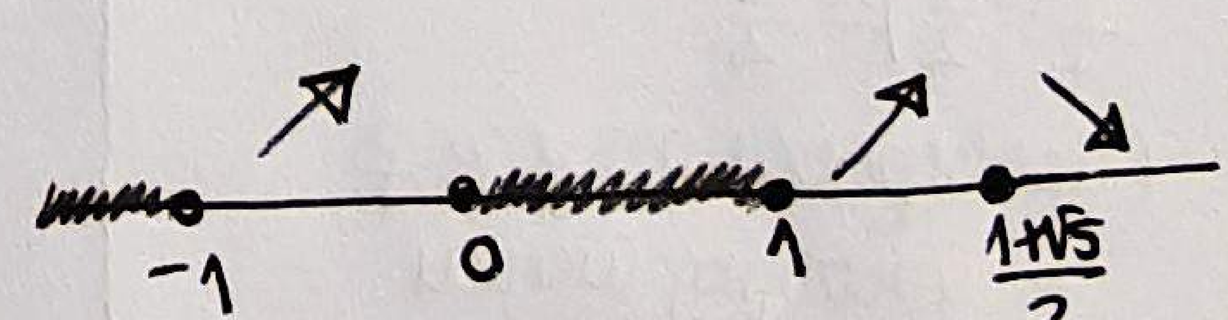
$x_{12}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$



због $-$

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ за $x\in\left(1,\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ $\quad f\nearrow$

$f'(x)<0$ за $x\in\left(\frac{1+\sqrt5}{2},+\infty\right)$ $\quad f\searrow$



$\boxed{x=\frac{1+\sqrt5}{2}}$ тачка локалног максимума

f је диференцијабилна на D_f ✓

$\boxed{6}$ $f''(x)$

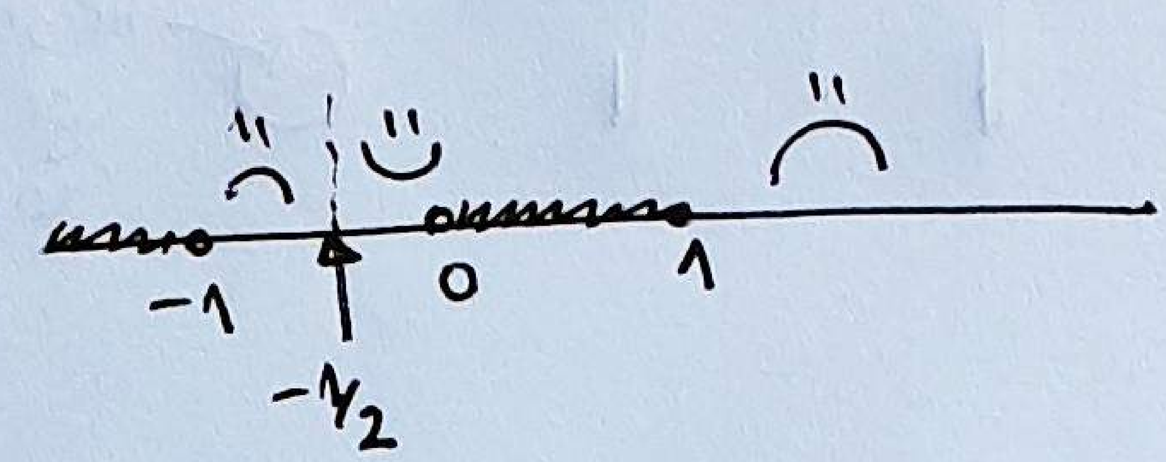
$x \in (-1,0)$: $f''(x) = -\left(\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}\right)' \underset{\dots}{\overset{\text{рачун}}{=\!=}} \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$

знак: $f''(x) > 0$ за $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ f конвексна $-\frac{1}{2}$ - превојна тачка

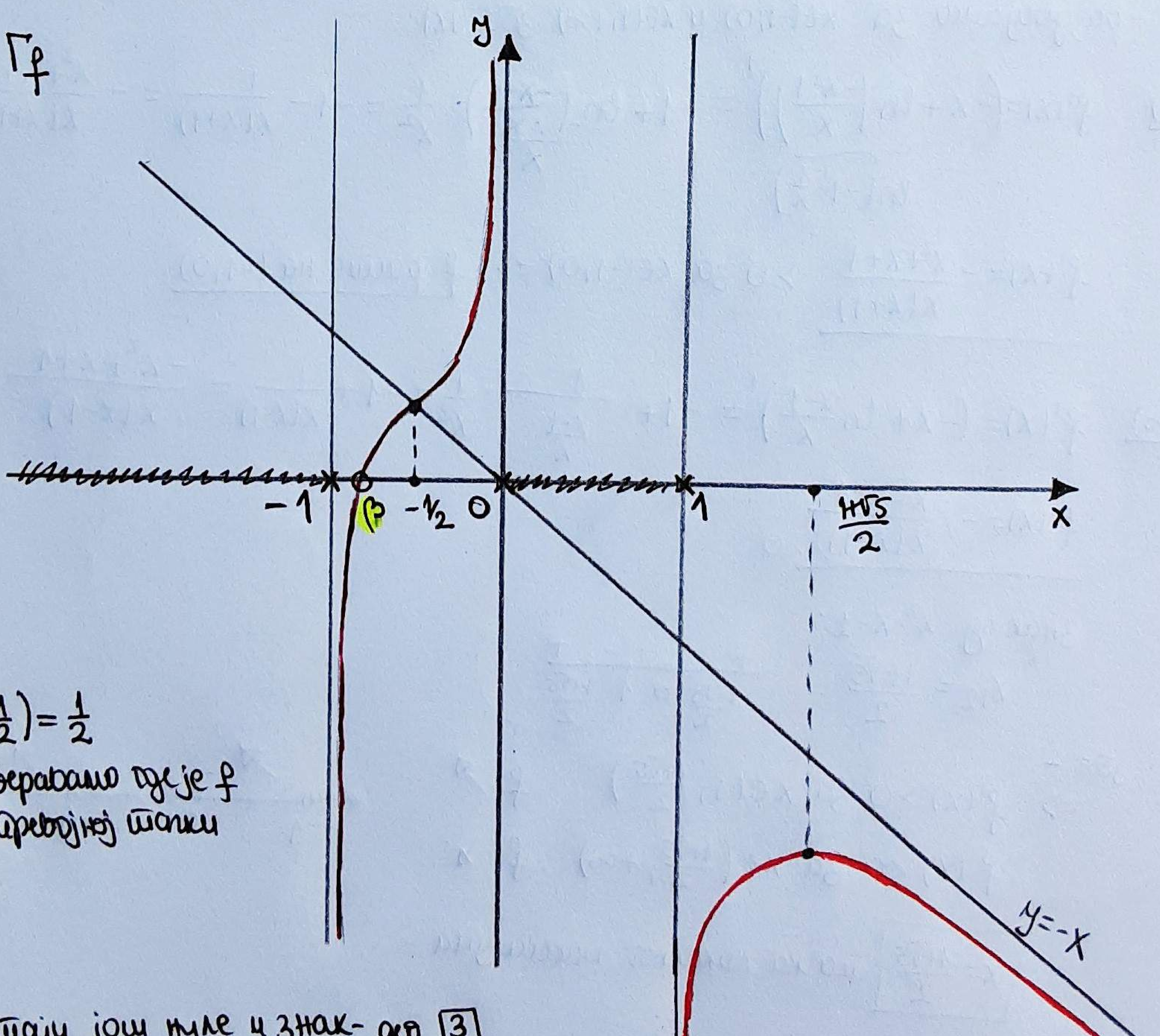
$f''(x) < 0$ за $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ f конкавна

$x \in (1,+\infty)$: $f''(x) = -\left(\dfrac{x^2-x-1}{x(x-1)}\right)' \underset{\dots}{\overset{\text{рачун}}{=\!=}} -\dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

$f''(x) < 0$ на $(1,+\infty)$ $\Rightarrow$ f конкавна на $(1,+\infty)$.



$\boxed{7}$ Γ_f



$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

(провјеравамо гдје је f у превојној тачки)

Остају још нуле и знак - део $\boxed{3}$

$\boxed{(-1,0)}$ $f \nearrow$, из $-\infty$ ка $+\infty$ $\Rightarrow$ $\exists$ тачно једна нула $(\beta \in (-1,0))$

$f(x) < 0$ за $x \in (-1, \beta)$, $f(x) > 0$ за $x \in (\beta, 0)$

$\boxed{(1,+\infty)}$ $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ је тачка максимума

$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 0$ за већу $\Rightarrow$ $f(x) < 0$ на $(1,+\infty)$

КРАЈ □

3. Испитати функцију:

$$f(x) = -\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}$$

1 D_f: $x \neq 0$

arctg је дефинисан свуда

$x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, -1$

$\Rightarrow$ домен је $\boxed{D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)}$

2 парност/непарност/периодичност – ништа од тога

3 нуле и знак ?

$-\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1} = 0 \qquad \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{|x|}$?

тешко решити ! ???
тако да ово остављамо за касније...

4 први извод:

$x \in D_f$: $\quad f'(x) = \left(-\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right)'_x$

⊛ шта је извод од $|x|$? $\quad |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ – приметимо то

$|x|' \underset{x\neq 0}{=} (x \cdot \operatorname{sgn} x)' = \operatorname{sgn} x \qquad \boxed{|x|' = \operatorname{sgn} x \ , x \neq 0}$

$$\Rightarrow f'(x) = +\frac{1}{|x|^2} \cdot |x|' + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{sgn} x + \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2+4x^2} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - 2 \cdot \frac{(x^2+1)}{\underbrace{x^4-2x^2+1+4x^2}_{=(x^2+1)^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - 2 \cdot \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - \frac{2}{x^2+1} \quad , x \neq 0, -1, 1$$

Дакле:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1} \ , & x > 0, x \in D_f \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1} \ , & x < 0, x \in D_f \end{cases} \underset{\text{средимо}}{=} \begin{cases} \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)} \ , & x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ \underbrace{-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2+1}\right)}_{\text{увек } <0} , & x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \end{cases}$$

знак: $\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

за $x \in (0,1)$ $f'(x) > 0$

за $x \in (1,+\infty)$, $f'(x) < 0$

$\boxed{\text{f је диференцијабилна (и непрекидна) у свим тачкама домена}}$

Дакле, имамо знак $f'(x)$:

$f'(x)$: $-$ $\times_{-1}$ $-$ $\times_{0}$ $+$ $\times_{1}$ $-$

f опада на $(-\infty,-1), (-1,0), (1,+\infty)$
f расте на $(0,1)$

⇒ понашање фје $f(x)$: ↘ ↘ ↗ ↘

5 АСИМПТОТИКА

Треба проверити шта се дешава око $-1, 0, 1; -\infty, +\infty$

$-\infty$

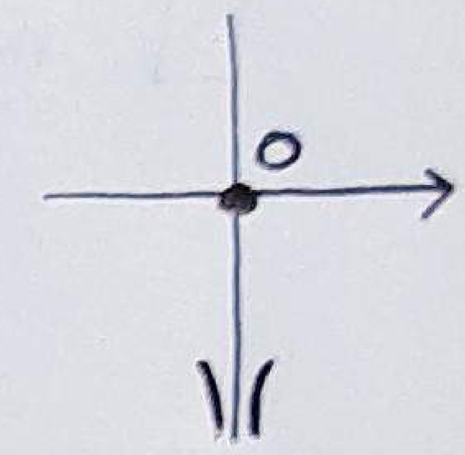
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{-1}{|x|}}_{\to 0} + \underbrace{\operatorname{arctg}\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\to 0}}_{\to 0}\right) = 0$$

⇒ права $\boxed{y=0}$ је хоризонтална асимптота кад $x\to-\infty$

0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{-1}{|x|}}_{\to -\infty} + \underbrace{\operatorname{arctg}\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\to 0}}_{\to -1}\right) = -\infty$$

⇒ $\boxed{x=0}$ вертикална асимптота



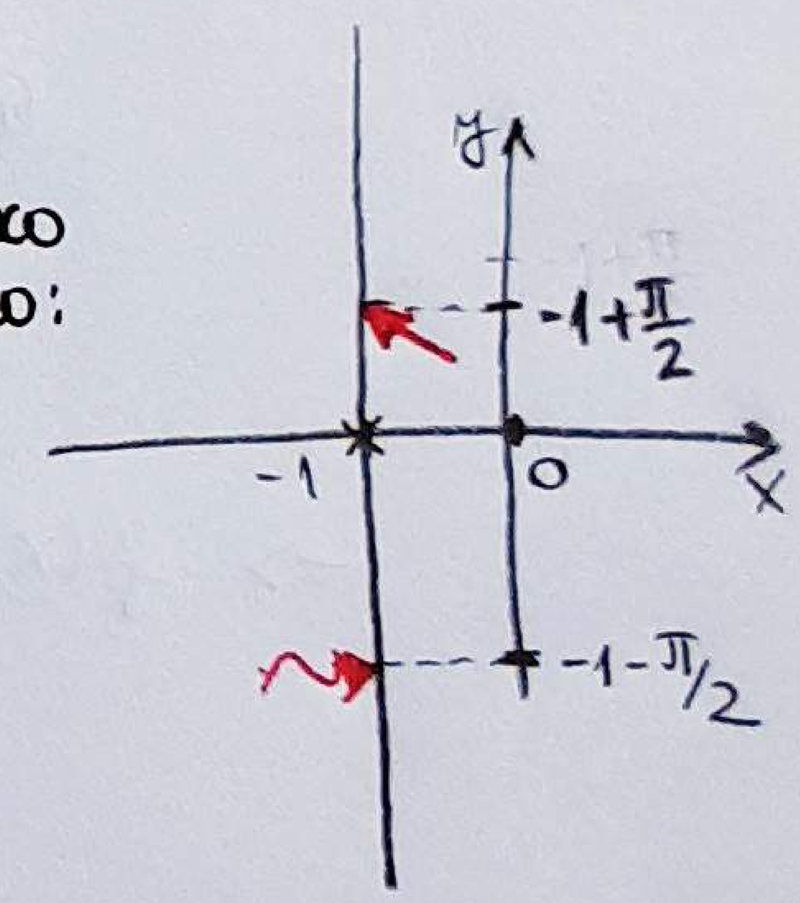
-1

x^2-1 ће $\to 0$, али са различитих страна ($x\to-1_+, x\to-1_-$)
ће различито тежити ка 0_+ или 0_-,
а пошто делимо са тим, (биће $+\infty/-\infty$)
раздвојимо одмах разматрање са које стране

$$\lim_{x\to-1_-} f(x) = \lim_{x\to-1_-}\left(\underbrace{\frac{-1}{|x|}}_{\to -1} + \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{\overset{<0}{2x}}{\underset{\to 0_+}{x^2-1}}}_{\to -\infty}\right) = -1-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-1_+} f(x) = \lim_{x\to-1_+}\left(\frac{-1}{|x|} + \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{\overset{<0}{2x}}{\underset{\to 0_-}{x^2-1}}}_{\to +\infty}\right) = -1+\frac{\pi}{2}$$

⇒ Некако овако:



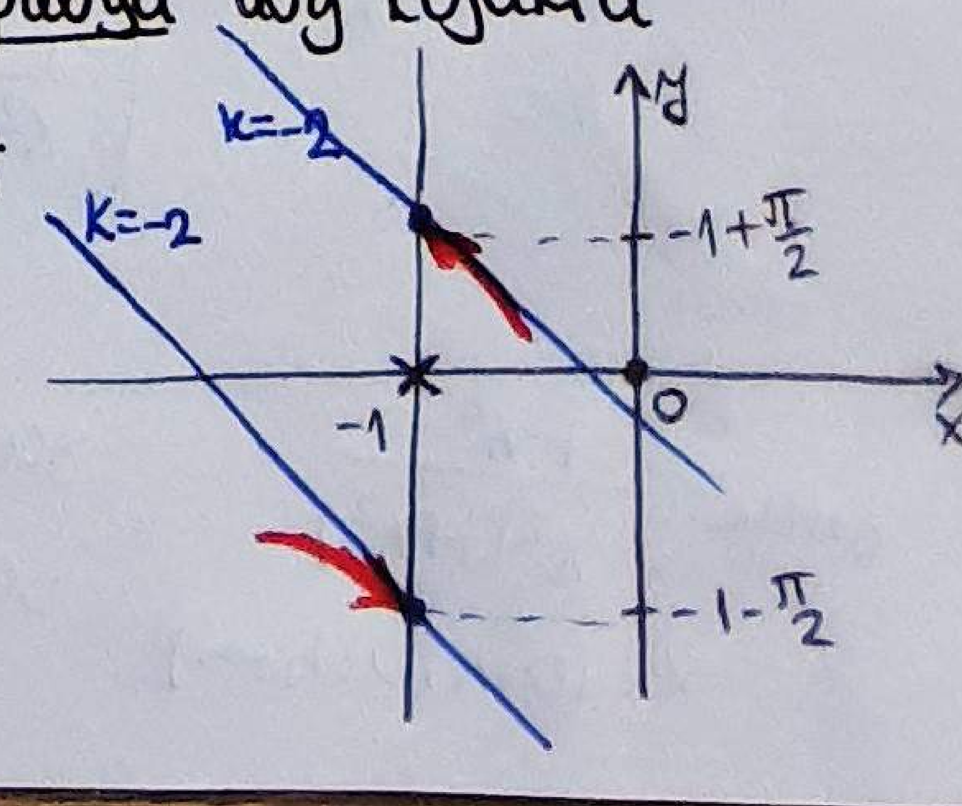
функција, тј. њен график „се забада" са обе стране, у различите вредности
„пришубљен"

$\boxed{\text{Под којим углом?}}$ Дакле, тражимо $\lim_{x\to-1_-} f'(x)$ и $\lim_{x\to-1_+} f'(x)$,
то ће бити коефицијенти правца под којима
график улази у граничне вред.

$$\lim_{x\to-1_-} f'(x) = \lim_{x\to-1_-}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}\right) = -1-1 = -2$$

$$\lim_{x\to-1_+} f'(x) = \lim_{x\to-1_+}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}\right) = -2$$

⇒



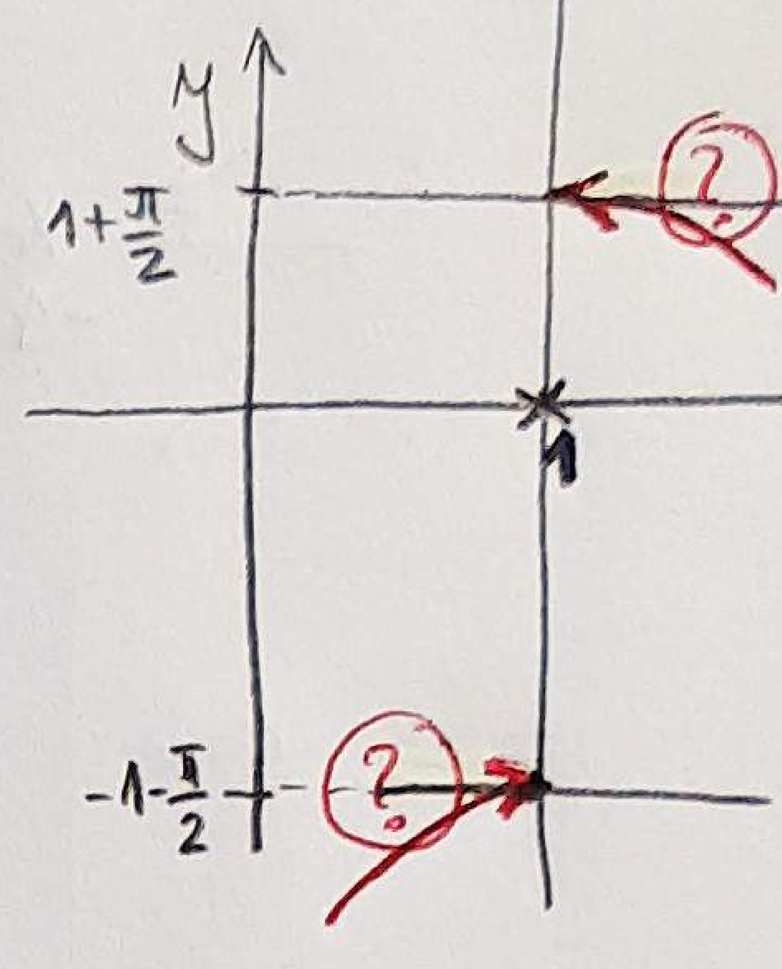
1 Поново раздвајамо $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ са леве и десне стране (јер делује да се разликује)

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left(-\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg}\underbrace{\left(\frac{\overset{>0}{2x}}{\underset{\to 0+}{x^2-1}}\right)}_{\to +\infty}\right) = -1+\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg}\underbrace{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}_{\to -\infty}\right) = -1-\frac{\pi}{2}$$

Под којим углом?

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)} = 0 \\ &\lim_{x\to 1-} f'(x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ хоризонтално улази са обе стране $(k=0)$



не знамо да ли испод или изнад али пошто $f'(x)<0$ ⇒ испод

$+\infty$ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{|x|}}_{\to 0} + \operatorname{arctg}\underbrace{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}_{\to 0}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$ х.а. кад $x\to+\infty$

6 Други извод:

$$f''(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn}x}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}\right)' = -2\operatorname{sgn}x\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{2}{(x^2+1)^2}\cdot 2x = \begin{cases} \frac{2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ -\frac{2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

$x\in D_f$

знак $f''(x)$:

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ очигледно $f''(x)<0$ ⇒ f конкавна на $(-\infty,-1)$ и конкавна на $(-1,0)$

$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$: $$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2+4x^4}{x^3(x^2+1)^2} \overset{?}{>} 0$$

$\Leftrightarrow 4x^4-2x^4-2-4x^2>0$

$\Leftrightarrow 2x^4-4x^2-2>0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2-1>0$ $\quad t=x^2$ – решимо по $t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2<1-\sqrt{2}}_{\text{немогуће}}$, или $x^2>1+\sqrt{2}$

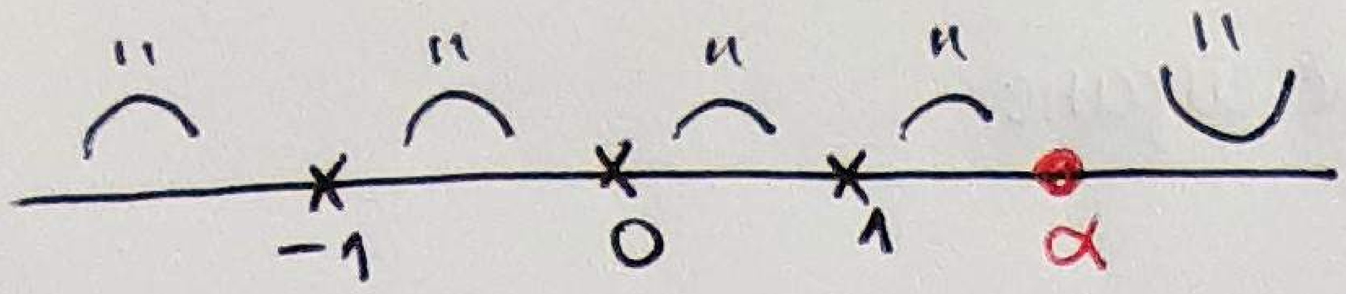
$\Leftrightarrow x^2>1+\sqrt{2}$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>\sqrt{1+\sqrt{2}}$ означимо са α

$\alpha>1$ очито

⇒ f конкавна на $(0,1)$ и $(1,\alpha)$
конвексна на $(\alpha,+\infty)$

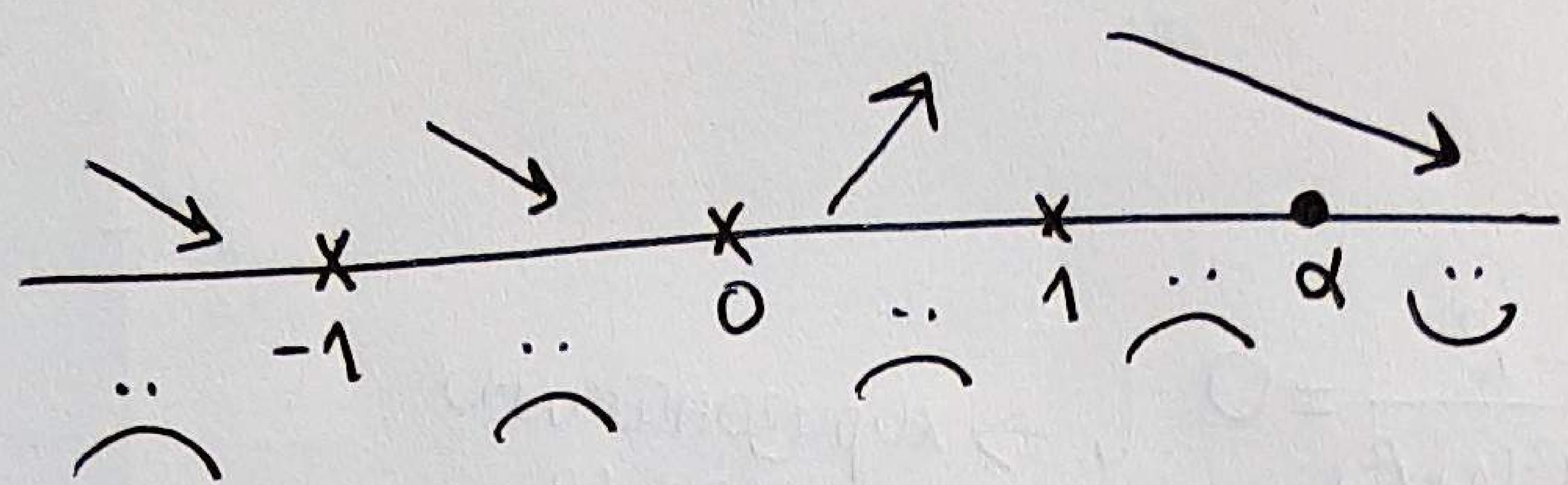
α-превојна тачка



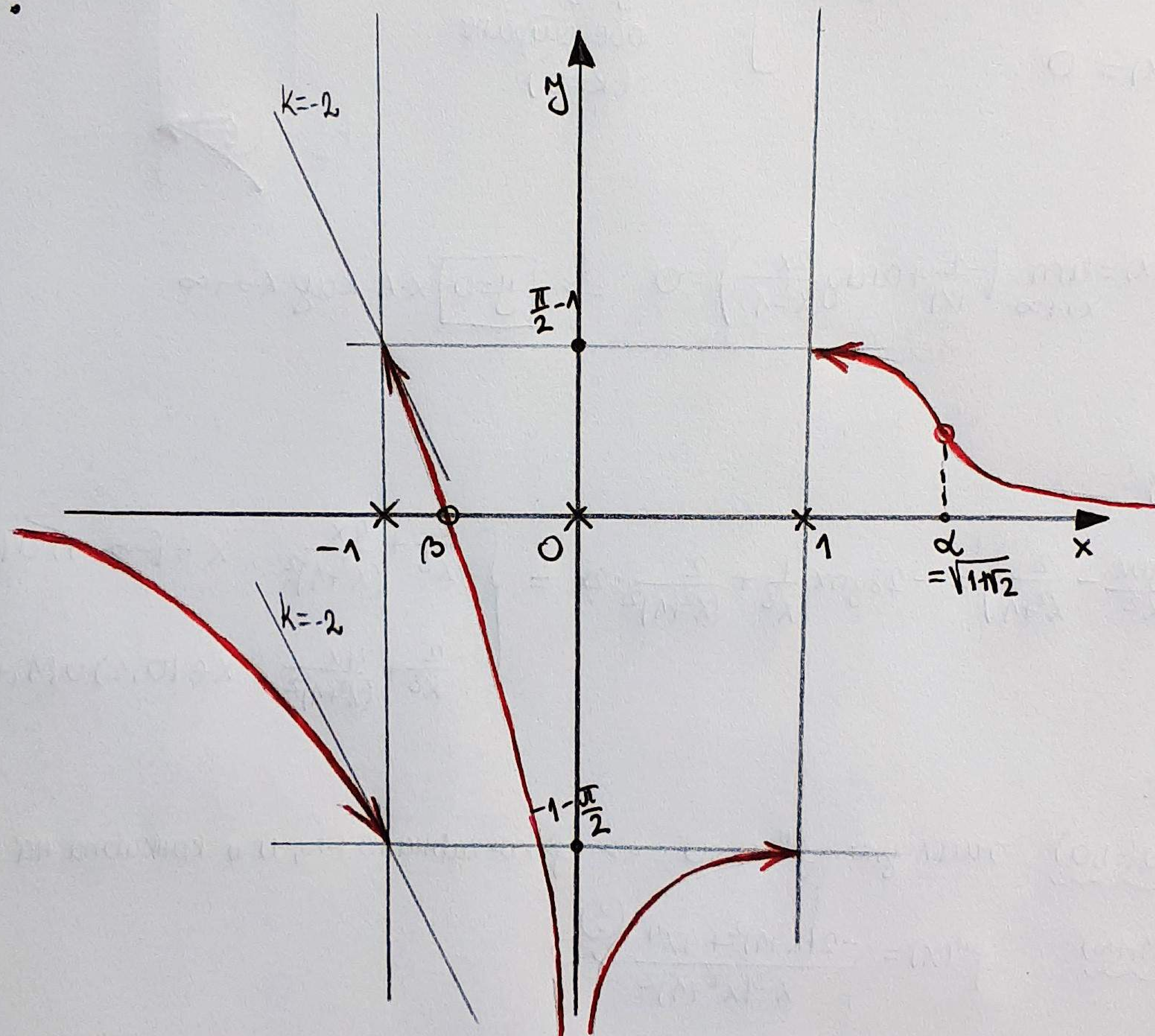
Нуле и знак (део $\boxed{3}$ који смо прескочили) ћемо из претходног свега закључити.

Нацртајмо прво график јер се тако лакше види:

Подсетимо се:



$\boxed{7}$ Γ_f :



$\boxed{3}$ • На $\underline{(-\infty,-1)}$: f опада, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\rightarrow$ $\underline{f(x)<0}$

• на $\underline{(-1,0)}$: f опада, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x)=-\infty$ $\Rightarrow$ мења знак, и то тачно једанпут, јер опада

$\Rightarrow$ $\exists$ нула $\underline{\beta\in(-1,0)}$, $\underline{f(x)=0}$

$\underline{f(x)>0 \text{ за } x\in(-1,\beta)}$, $\underline{f(x)<0 \text{ за } x\in(\beta,0)}$

• на $\underline{(0,1)}$: f расте, а $\lim\limits_{x\to1_-} f(x)<0$ $\Rightarrow$ $\underline{f(x)<0}$

• на $(1,+\infty)$: f опада, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\Rightarrow$ $\underline{f(x)>0}$

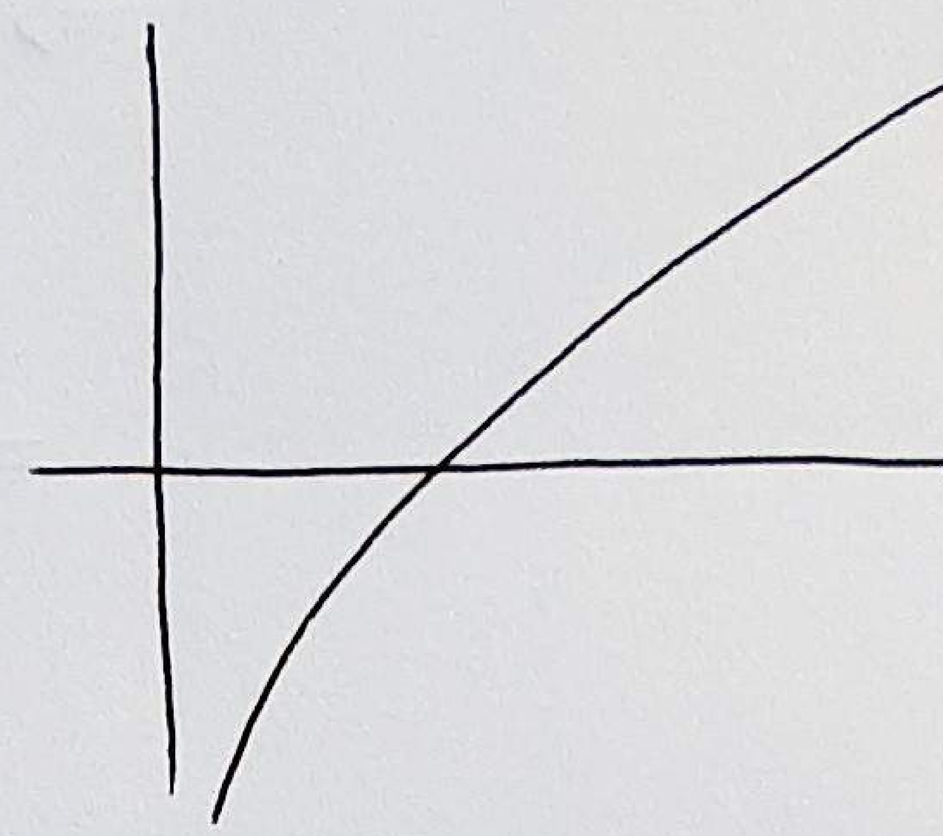
(свуда овде користимо непрекидност f)

Неке примене:

$\boxed{4}$ Доказати да једначина $\ln x = \frac{1}{x^2}$ има јединствено решење.

$\iff$ $f(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$ има јединствену нулу

домен функције f је $(0,+\infty)$



$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^3} > 0, \ \forall x \in (0,+\infty)$

$\Rightarrow$ f растена на $(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \Big(\underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\ln x} - \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x}}\Big) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\ln x} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x}}\Big) = +\infty$$

Непрекидна функција, расте из $-\infty$ ка $+\infty$ (строго)

$\Rightarrow$ $\exists$ јединствено $x_0 \in (0,+\infty)$ тд $f(x_0)=0$

(примена Болцано-Кошијеве теореме за постојање, а јединственост имамо јер строго расте). ∎

$\boxed{5}$ Доказати да за свако $x \geq 0$ важи неједнакост:

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x} \geq \frac{\sqrt{x}\cdot(5x+3)}{3(x+1)^2}$$

Посматрајмо: $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}\cdot(5x+3)}{3(x+1)^2}$ $\quad f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

Желимо да докажемо да $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.

Одредимо $f'(x)$: $(x \neq 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\left(5\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\cancel{3}(x+1)^{\cancel{2}} - \sqrt{x}\cdot(5x+3)\cdot\cancel{3}\cdot 2\cancel{(x+1)}}{\cancel{3}(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3(x+1)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\left(\frac{15}{2}x + \frac{3}{2}\right)(x+1) - 2x(5x+3)\right)$$

$$\overset{\text{средимо}}{=} \frac{1}{3\cdot 2\sqrt{x}\cdot(1+x)^3}\cdot\left(3(1+x)^2 - (15x+3)(x+1) + 4x(5x+3)\right)$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{x}(1+x)^3}\Big(\underbrace{\cancel{3} + 3x^2 + 6x - 15x^2 - 15x - 3x - \cancel{3} + 20x^2 + 12x}_{=8x^2}\Big) = \frac{8x^2}{6\sqrt{x}(1+x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2}{3\sqrt{x}(x+1)^3} > 0 \quad \text{за } x \in (0,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ расте на } (0,+\infty) \\ f \text{ непрекидна на } [0,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ расте на } [0,+\infty)}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \text{ за } \forall x \geq 0$$

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \geq 0,\ \forall x \geq 0} \qquad \square$$

За вежбу:

⊛ Показати да важи:

(а) $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ за свако $x>1$

упутство - посматрати $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ и онда као претходни задатак ☺

(б) $\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \ln 4 \cdot \ldots \cdot \ln n \leq \frac{\sqrt{n!}}{n}$ за свако $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

упутство: применити (а) на сваки $\underline{\underline{\ln k}}$ и измножити. ☺