~ Тејлорова формула ~

АНАЛИЗА 1И ВЕЖБЕ за 22./23. април

Апроксимирамо функцију полиномом у околини неке тачке:

$\underline{a\in\mathbb{R}}$, f непрекидна, $f', \dots, f^{(n)}$ непр. у некој околини тачке a, $f^{(n+1)}$ постоји у тој околини. Тада важи:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Тејлоров полином степена } n \text{ у } a} + o((x-a)^n),\ x\to a$$

за $a=0$: Маклоренова формула:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),\ x\to 0$$

Ове формуле називамо Тејлоровим односно Маклореновим развојем n-тог реда.

Важни развоји:

$$\boxed{\sin x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{\substack{\text{овде знамо и више,} \\ \text{да је ово } 0+o(x^{2n+2})}},\ x\to 0$$

$$\boxed{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}_{\substack{\text{и више, овде} \\ \text{је } 0+o(x^{2n+1})}},\ x\to 0$$

$$\boxed{e^x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x\to 0$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}\cdot x^n + o(x^n),\ x\to 0 \quad \text{где } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

за све $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{\ln(1+x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x\to 0$$

Изведимо сада неке важне развоје које ћемо после доста користити у задацима:

* $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \ x \to 0$

$\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $\quad \alpha = -1$ па ће се појављивати $\binom{-1}{k}$

$\binom{-1}{k} = (-1)^k$ јер $\binom{-1}{k} = \dfrac{-1 \cdot (-2) \cdots (-k)}{k!} = (-1)^k$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1} x + \binom{-1}{2} x^2 + \dots + \binom{-1}{n} x^n + o(x^n)$$

$$= 1 + (-1)x + (-1)^2 x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \ x \to 0$$

* $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n), \ x \to 0$

$\dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = (1+(-x))^{-1}$ применимо претходни развој

$$= 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + \dots + (-1)^n \cdot (-x)^n + o((-x)^n)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n), \ x \to 0$$

Ова два развоја ћемо свуда користити без доказа, а ви на испиту треба да покажете овај доказ који смо навели (или неки други ☺).
Прелазимо на задатке.

$\boxed{1}$ Одредити Тејлоров развој функције $f(x) = \operatorname{arctg} x$ у тачки $a=3$, реда $n=2$.

Потребни су нам изводи f', f'':

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad f'(3) = \dfrac{1}{10}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$ $\qquad f''(3) = -\dfrac{1}{10^2} \cdot 2 \cdot 3 = -\dfrac{3}{50}$

Дакле: $\quad f(x) = f(3) + \dfrac{f'(3)}{1!}(x-3) + \dfrac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + o((x-3)^2), \ x \to 3$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 3 + \frac{1}{10}(x-3) + -\frac{3}{2 \cdot 50}(x-3)^2 + o((x-3)^2), \ x \to 3. \quad \square$$

<u>Напомена</u> сменом $x - a = t$ Тејлоров полином прелази у Маклоренов $t \to 0$
$x \to a$

$\boxed{2.}$ Одредити Маклоренов развој $(x \to 0)$ за функције:

(а) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, реда 3

(б) $f(x) = \ln(x + e^2)$, реда 2

(а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \overset{\text{(све остало)}}{o(x^3)}, \quad x \to 0$$

(б) $\ln(x+e^2) =$ (морамо свести на $\ln(1+\underset{\to 0}{t})$)

$$= \ln\left(e^2\cdot\left(1+\frac{x}{e^2}\right)\right)$$

$$= \ln e^2 + \ln\left(1 + \overset{\to 0,\ x\to 0}{\frac{x}{e^2}}\right)$$

$$= 2 + \frac{x}{e^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{e^2}\right)^2\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{e^2}x - \frac{1}{2e^4}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

⊛ Сада је важно подсетити се својстава ознаке o (мало o)

кад $\boxed{x \to 0}$: $\quad x^5 = o(x^3)$

$$x^5 + o(x^3) = o(x^3)$$

$$o(x^5) + o(x^3) = o(x^3)$$

такође подсетити се множења: $o(x)\cdot o(x^2) = o(x^3)$ ...

и наравно: $\dfrac{o(x)}{x} = o(1) \to 0, \ x \to 0.$

(знамо да кад $x \to +\infty$ имамо „обрнуто" $x^3 = o(x^5), x \to +\infty$ итд)

$\boxed{3.}$ Развити функцију $f(x)=(1+x)^{1/x}$ у облику $f(x)=a+bx+cx^2+o(x^2)$, $x\to 0$ ⊛

На овом примеру ћемо посветити пажњу питању „колико развити"

$$\boxed{f(x)}=(1+x)^{1/x}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)}$$

хајде да развијемо до реда 2
јер нам се тако тражи у ⊛

$$=e^{\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}$$

$$=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\cdot o(x^2)} \qquad \frac{1}{x}\cdot o(x^2)=o\left(\frac{1}{x}\cdot x^2\right)=o(x)$$

$$=e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}$$ — није довољно прецизно, видимо већ сад!

Дакле, није било довољно развити само до реда 2 $\ln(1+x)$ јер смо множењем са $\frac{1}{x}$ скратили једно x!

Развијмо зато $\ln(1+x)$ до реда 3:

$$\boxed{f(x)}=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$=e\cdot e^{\underbrace{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}_{t\to 0}}$$

ПАЖЊА не смемо одмах применити развој за e^t јер експонент не тежи нули! Већ извучемо e^1 да би остатак $\to 0$

$$=(\text{развој за } e^t)$$

$$=e\cdot\Bigg(1+\overbrace{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)}^{t}+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\overbrace{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2}^{t^2}}_{=\frac{x^2}{4}+o(x^2)}+\underbrace{o\Bigg(\overbrace{\underbrace{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2}_{\sim\frac{x^2}{4}}}^{t^2}\Bigg)}_{o\left(\frac{x^2}{4}\right)=o(x^2)}\Bigg)$$

$\frac{x^2}{4}+o(x^2)$ јер су сви остали чланови облика $c\cdot x^k$, $k>2$ или $o(x^2)$

$o\left(\frac{x^2}{4}\right)=o(x^2)$ сетимо се тога

$$=e\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+o(x^2)+o(x^2)\right)$$

$$=e-\frac{1}{2}e\cdot x+\frac{11e}{24}\cdot x^2+o(x^2), \quad x\to 0$$

$a=e$, $b=-\frac{1}{2}e$, $c=\frac{11e}{24}$ □

$\boxed{4.}$ Развити $f(x)=\operatorname{tg}x$ до реда 5, кад $x\to 0$.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x\cdot(\cos x)^{-1}$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)\cdot\Big(1\underbrace{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)}_{t\to 0}\Big)^{-1}$$

користимо развој $(1+t)^{-1}$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\cdot\Bigg(\overset{1}{1}\overset{-t}{-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)}+\underbrace{\overset{+t^2}{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2}}_{\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{24^2}+o(x^5)\cdot o(x^5)+2\cdot\frac{-x^2}{2}\cdot\frac{x^4}{24}+2\cdot\frac{-x^2}{2}\cdot o(x^5)+2\cdot\frac{x^4}{24}\cdot o(x^5)}-\underbrace{\overset{-t^3}{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^3}}_{o(x^5)}+\underbrace{\overset{o(t^3)}{o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3\right)}}_{o(x^6)}\Bigg)$$

$$\frac{x^8}{24^2}+o(x^5)\cdot o(x^5)+2\cdot\frac{-x^2}{2}\cdot\frac{x^4}{24}+2\cdot\frac{-x^2}{2}\cdot o(x^5)+2\cdot\frac{x^4}{24}\cdot o(x^5)=o(x^5)$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)+\frac{x^4}{4}+o(x^5)+o(x^5)+o(x^6)\right)$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)\right)$$

сада множимо сваки са сваким али само „памтимо" оне који нису $o(x^5)$:

$$\begin{aligned}
= \;& x+\frac{x^3}{2}+\frac{5}{24}x^5+x\cdot o(x^5)\\
&-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}-\frac{5}{6\cdot 24}x^7+o(x^5)\\
&+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\\
&+o(x^6)
\end{aligned}$$

$$x\cdot o(x^5)-\frac{5}{6\cdot 24}x^7+o(x^5)+o(x^5)+o(x^6)=o(x^5)$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\underbrace{\frac{1}{120}\cdot(25+1-10)}_{\frac{16}{120}=\frac{2}{15}}x^5+o(x^5)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5),\ x\to 0}\quad\blacksquare$$

☺ ово смо и очекивали да има само непарне чланове јер је $\operatorname{tg}x$ непарна функција.

$\boxed{5.}$ Израчунати лимес: $\quad L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}\cdot \cos(\sin x) - 1 - x}{x^3}$

- облика „$\frac{0}{0}$"
- компликовани изводи (за Лопитала)
- радимо преко Тејлорове формуле
- колико развијамо? Доле је полином x^3, па горе желимо <u>до реда 3</u> (свакако може и више)

Биће нам потребно:

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ (овде је $o(x^4)$, али не треба нам толико)

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\cdot \cos\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - 1 - x}{x^3}$$

(сада користимо развој за e^t и $\cos t$ кад $t \to 0$)

прво e^t

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \overbrace{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}^{t} + \frac{1}{2!}\cdot \overbrace{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}^{t^2} + \frac{1}{3!}\overbrace{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}^{t^3} + \overbrace{o(x^3)}^{o\left(\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)}\right)\cdot \cos\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - 1 - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3 + o(x^3)\right)\cdot \cos\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - 1 - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\cdot \cos\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - 1 - x}{x^3}$$

сада $\cos t$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{4!}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^4 + o(x^4)}_{=o(x^3)}\right) - 1 - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right) - 1 - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3) + x - \frac{1}{2}x^3 + \overbrace{x\cdot o(x^3)}^{=o(x^4)} + \frac{1}{2}x^2 \underbrace{- \frac{1}{4}x^4}_{=o(x^3)} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2\cdot o(x^3)}_{=o(x^5)} + \underbrace{o(x^3)\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)}_{=o(x^3)}\right] - 1 - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right) - 1 - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{=o(1)}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \square$$

6 Испитати диференцијабилност функције:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

Прво $\boxed{\text{непрекидност:}}$

- $x\neq 0$ ✓
- $x=0$: $a=f(0)$

потребно је да $a=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, па одредимо тај лимес:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \quad „\frac{0}{0}"$$

$$\underset{\text{ако }\exists\to}{\overset{\text{Лопитал}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x} \quad „\frac{0}{0}"$$

$$\underset{\text{ако }\exists\to}{\overset{\text{Лопитал}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+x\cdot e^x+e^x}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ је непр. у } 0 \text{ ако и само ако } a=\frac{1}{2}}$

тада је непр. на целом $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Диференцијабилност}}$

- $x\neq 0$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(e^x-1)^2}\cdot e^x$ ✓
- $x=0$: $\boxed{a=\frac{1}{2}}$ (само у случају непрекидности испитујемо диф.)

$$f'(0): \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}\right) \quad \text{радимо преко развоја } e^x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{x\cdot\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}=\frac{1}{x}\cdot\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}_{t}\right)^{-1}}_{\text{развијамо } (1+t)^{-1} \text{ кад } t\to 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\Big(\underbrace{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}_{t}\Big)^{-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2 + \underbrace{o\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2\right)}_{=o(x^2)}\right) - \frac{1}{2x}\right)$$

средимо до на $o(x^2)$:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \underbrace{\frac{1}{x^2}\cdot\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)} - \frac{1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \cancel{\frac{1}{2x}} + \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{x^2}\cdot o(x^2)}_{o(1)} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+o(1)\right)$$

$$= -\frac{1}{12}$$

Дакле, $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{12}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ је диференцијабилна на } \mathbb{R} \text{ за } a=\frac{1}{2}}$ $\square$

7. Израчунати:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^5+5x^4} - \sqrt{x^2-2x}$$

облика „$\infty - \infty$"

☹ рационалисање не може за $\sqrt[5]{\ }$ и $\sqrt{\ }$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}\Big)^{1/5} - \underbrace{|x|}_{\substack{\| \\ x \text{ за } x>0}}\cdot\Big(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\Big)^{1/2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x + 1 + o(1) - x + 1 + o(1)$$

* ту смо „скратили бесконачности" ☺

$$= \lim_{x\to+\infty}(2+o(1))$$

$$= 2$$

$\boxed{8.}$ Одредити n-ти извод у нули функције

$$f(x) = (3x+1)\cdot \ln(1+2x)$$

I начин: Лајбницова формула за извод производа две функције

то урадити за вежбу – овде ћемо видети други начин.

$$u = 3x+1$$
$$v = \ln(1+2x)$$
$$v'(x) = \frac{1}{1+2x}\cdot 2$$
$$v^{(n)}(x) = 2\cdot 2^{n-1}\cdot \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+2x)^n} \quad n \geq 1$$

← уверити се да ово важи :)

$$(u\cdot v)^{(n)} = \cdots$$

II начин: Маклоренов развој

! овај начин може само за $f^{(n)}(0)$, не за друге тачке али је предност што не морамо рачунати $u^{(k)}, v^{(k)}$ ако су компликовани

$f(x) = (3x+1)\cdot \ln(1+2x)$ развијмо:

$$= \underbrace{(3x+1)\cdot\left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2x)^n}{n} + o(x^n)\right)}_{\circledast}$$

знамо да је облика:

$$= f(0) + f'(0)\cdot x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + o(x^n)$$

тј. коефицијент уз x^n у производу $\circledast$ (кад се среди) је тачно $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

како добијамо тај коефицијент?

* помножити $3x$ и $(-1)^{n-2}\cdot\frac{(2x)^{n-1}}{n-1}$ $\Rightarrow$ $3\cdot(-1)^{n-2}\cdot\frac{2^{n-1}}{n-1}\cdot x^n$
* помножити 1 (из 1. заграде) и $(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2x)^n}{n}$ $\Rightarrow$ $(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n}\cdot x^n$

Дакле:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 3\cdot(-1)^{n-2}\cdot\frac{2^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n} \quad /\cdot n!$$

$$f^{(n)}(0) = 3\cdot(-1)^{n-2}\cdot 2^{n-1}\cdot n\cdot(n-2)! + (-1)^{n-1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!$$

$$\boxed{f^{(n)}(0)} = 2^{n-1}\cdot(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot\left(\underbrace{3n-2(n-1)}_{n+2}\right) \quad \square$$

~ Асимптоте функција ~

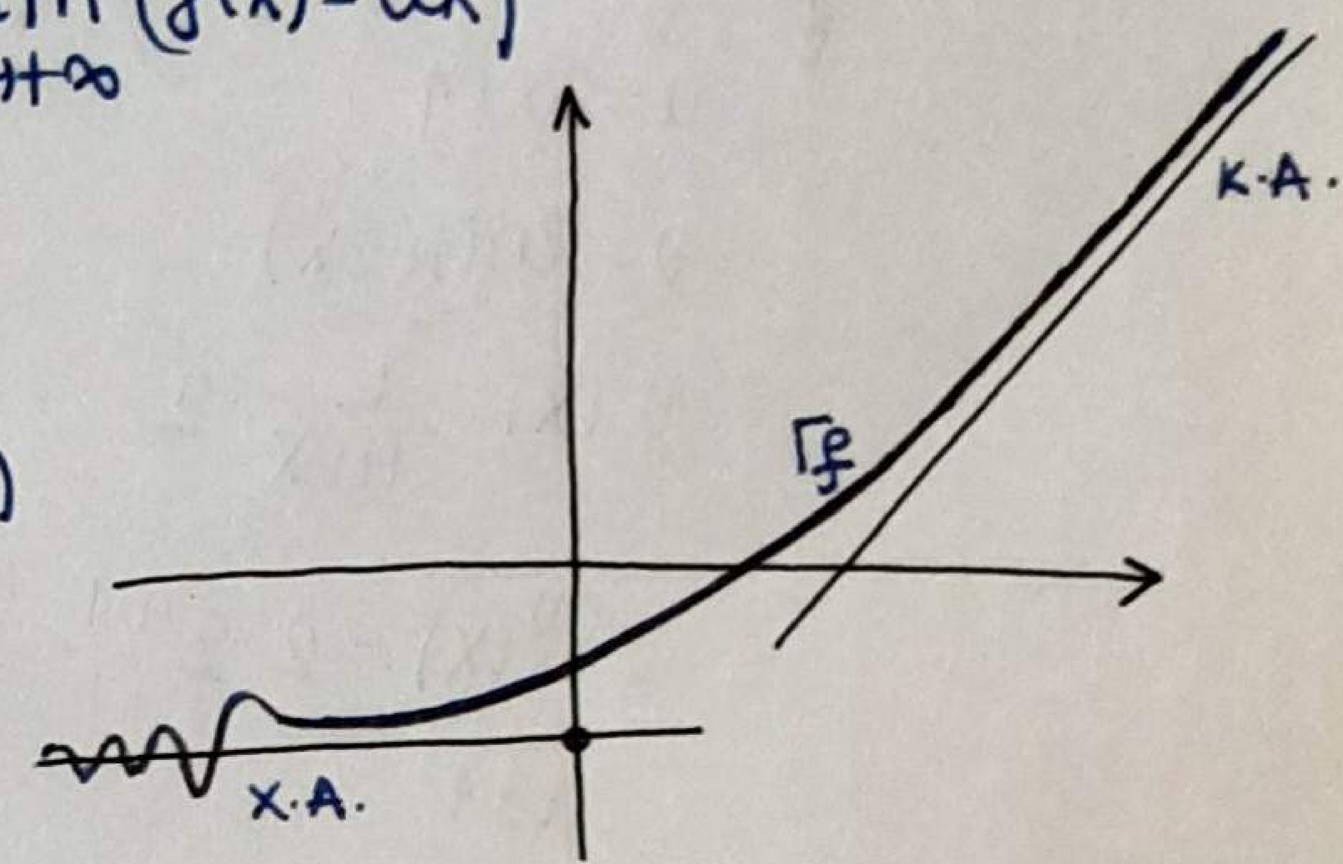
$\boxed{\text{за } x\to+\infty \text{ или } x\to-\infty}$ права $y=ax+b$ је асимптота

$$\Longleftrightarrow \quad f(x)=\underbrace{ax+b}_{\text{права}}+\underbrace{o(1)}_{\substack{\text{разлика}\\ \text{када}\to 0}}, \quad x\to+\infty \quad (x\to-\infty)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

$a\neq 0$: $y=ax+b$ је КОСА АСИМПТОТА (К.А.)

$a=0$: $y=b$ је ХОРИЗОНТАЛНА АСИМПТОТА (Х.А.)



$\boxed{x\to a}$ – КОНАЧНА ТАЧКА

функција може имати вертикалну асимптоту (В.А.)

ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $-\infty$ или су такви једнострани лимеси

(детаљно на предавањима)

$\boxed{9.}$ Ако постоје одредити асимптоте функције $f(x)=2\ln|e^x-1|-\ln|e^x-2|$ кад $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$

$\boxed{x\to-\infty}$ проверимо да ли постоји коначан лимес:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\underbrace{\ln|\underset{\to 0}{e^x}-1|}_{\to \ln 1=0}-\underbrace{\ln|\underset{\to 0}{e^x}-2|}_{\to \ln 2}=2\cdot 0-\ln 2=-\ln 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\ln 2 \Rightarrow \boxed{y=-\ln 2 \text{ је Х.А. кад } x\to-\infty}$$

$\boxed{x\to+\infty}$ овде се лако проверава да $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{(e^x-1)^2}{e^x-2}=+\infty$

па сигурно нема Х.А.

$f(x)=2\ln(e^x-1)-\ln(e^x-2)$ ☺ „издвојимо бесконачни део"

$$=2\left(\ln e^x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right)-\left(\ln(e^x)+\ln\left(1-\frac{2}{e^x}\right)\right)$$

$$=2\cdot x+2\underbrace{\ln\Big(\underbrace{1-\frac{1}{\underset{\to+\infty}{e^x}}}_{\to 1,\,x\to+\infty}\Big)}_{\to 0,\,x\to+\infty}-x-\underbrace{\ln\Big(\underbrace{1-\frac{2}{e^x}}_{\to 1,\,x\to+\infty}\Big)}_{\to 0,\,x\to+\infty}=x+\overset{(\text{део који}\to 0)}{o(1)}$$

$$f(x)=x+o(1),\ x\to+\infty \Rightarrow \boxed{y=x \text{ је К.А. кад } x\to+\infty}$$

10 Наћи асимптоте функције $f(x) = |3x+1| \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ за $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ и видети са које стране је функција у односу на асимптоту.

Дакле, потребан нам је развој ове функције облика:

$$f(x) = \underbrace{ax + b}_{\substack{\downarrow \\ y = ax+b \\ \text{је асимптота}}} + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{(за сваку од бесконачности)}$$

говори са које стране је функција:

$\frac{c}{x} > 0 \to \Gamma_f$ је изнад асимптоте

$\frac{c}{x} < 0 \to \Gamma_f$ је испод —||—

Прво ћемо развити $e^{\frac{1}{x-2}}$

развој је исти за обе бесконачности:

кад $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ тада $\frac{1}{x} \to 0$ тј. $\frac{2}{x} \to 0$ па можемо развити као $(1-t)^{-1}$, $t \to 0$

$= 1 + t + t^2 + o(t^2)$

$$e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1-2/x)}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-1}}$$

$$= e^{\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \underbrace{\frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}_{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}}$$

доста је да нам неће бити потребно прецизније јер у $f(x)$ само множимо са $3x$ и са 1.

$x \to +\infty$
$x \to -\infty$

$$= e^{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$t = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $t \to 0$

$$= 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \underbrace{\frac{1}{2!} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}_{\| \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} + \underbrace{o\left(\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2\right)}_{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Дакле за $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ важи $\boxed{e^{\frac{1}{x-2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

Сада одвајамо случајеве за различите бесконачности:

$\boxed{x \to +\infty}$ $\quad 3x+1>0$

$$f(x) = (3x+1)\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= (3x+1)\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= 3x+3+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x}+\underbrace{3x\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{o\left(\frac{1}{x}\right)} + 1+\frac{1}{x}+\underbrace{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{све иде у } o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= 3x+4+\underbrace{\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{x}}_{>0 \text{ за } x>0}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to+\infty$$

$y=3x+4$ је к.а. кад $x\to+\infty$ $\quad \Rightarrow$ f је изнад асимптоте

$\boxed{x \to -\infty}$ $\quad 3x+1<0$

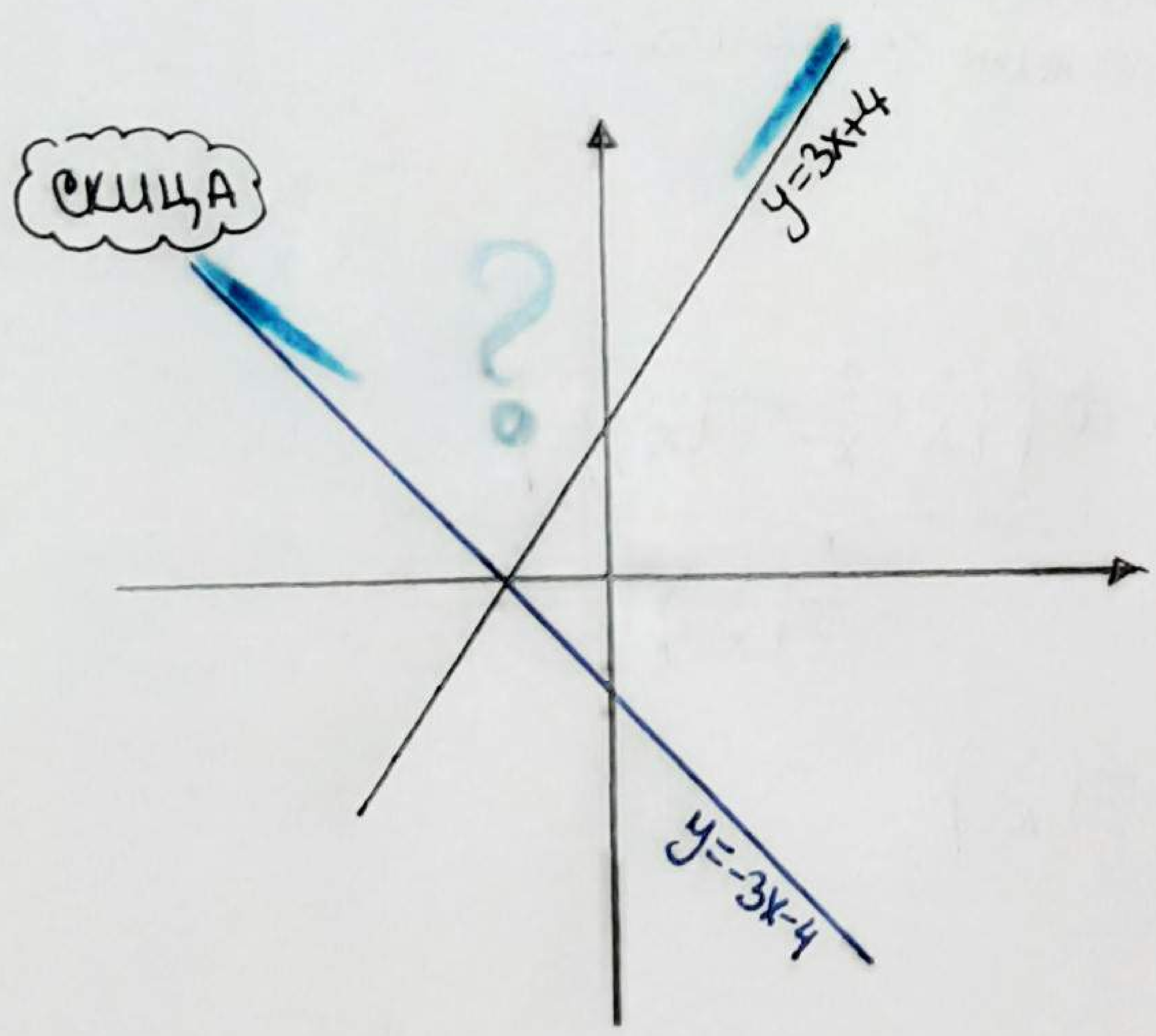
$\Rightarrow f(x) = -(3x+1)\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ исти рачун као горе, само са минусом

$$\ldots = -3x-4-\underbrace{\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{x}}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y=-3x-4$ је к.а. кад $x\to-\infty$

$-\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{x}$ је >0 за $x<0$

$\Rightarrow$ f је изнад асимптоте



$\boxed{\text{ЗА ВЕЖБУ}}$ Наћи асимптоте функције: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$

Почетак: $f(x)=\sqrt{\underset{\uparrow\,\geq 0}{x^2}\cdot\underset{\uparrow\,\text{мора бити}\,\geq 0}{\dfrac{x}{x-1}}} = |x|\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = |x|\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}} = |x|\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2}}$

$t=-\frac{1}{x}\to 0$ па развијамо као $(1+t)^{-1/2}$, $t\to 0$

...