~Лопиталова правила - наставак~

АНАЛИЗА 1И
ВЕЖБЕ за
15./16. април

На предавању смо видели да важи (за $\alpha>0$ и $a>1$):

$$\ln x \ll x^\alpha \ll a^x, \quad x\to+\infty \qquad (*)$$

тј. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$ док $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x}=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}$

тј. знамо да је „$\ln x$ најслабија, а експоненцијална најјача" :)

1 Израчунати:

(а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x - x^{700}+(\sqrt3)^x+\sin(x^4-x)}{x^{2020}-2(\sqrt3)^x+\log_5 x}$ $\quad :(\sqrt3)^x$

- „шта је најјаче у именоцу?"
- експоненцијална $(\sqrt3)^x$
- скратимо том функцијом

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{\log_2 x}{(\sqrt3)^x}}^{\to 0 \text{ из } (*)}-\overbrace{\frac{x^{700}}{(\sqrt3)^x}}^{\to 0 \text{ из } (*)}+1+\overbrace{\frac{\sin(x^4-x)}{(\sqrt3)^x}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{x^{2020}}{(\sqrt3)^x}}_{0 \text{ из } (*)}-2+\underbrace{\frac{\log_5 x}{(\sqrt3)^x}}_{\to 0 \text{ из } (*)}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{(\sqrt3)^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2 e\cdot\underbrace{\frac{\ln x}{(\sqrt3)^x}}_{\to 0 \text{ из } (*)}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sin(x^4-x)}^{\text{ограничена}}}{\underbrace{(\sqrt3)^x}_{\to+\infty}}=0$

$$=\frac{1}{-2}=\boxed{-\frac12}$$

(б) $\lim\limits_{x\to0_+}\sqrt{x}\cdot e^{\frac1x}$ уводимо смену $\frac1x=t$

$x\to0_+ \iff t\to+\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{\frac1t}\cdot e^t=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{\sqrt t}=+\infty$ јер знамо да је $t^{1/2}\ll e^t$ кад $t\to+\infty$

(за вежбу показати преко Лопитала)

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(x^{150}+3x^7)}{\sqrt[3]{x-2}}}_{f(x)}$

мало процењујемо (да покажемо да је горе слабија фја)

- $x^{150}+3x^7\leq 2\cdot x^{150}$ за довољно велико x, $x\geq x_0$

$\Rightarrow \ln(x^{150}+3x^7)\leq\ln(2\cdot x^{150})=\ln2+150\cdot\ln x$

- доња функција: за $x\geq x_1$ $\sqrt[3]{x-2}\geq\sqrt[3]{\frac x2}=\frac{1}{\sqrt[3]2}\cdot x^{1/3}$

Сада имамо:
за довољно велико x:

$$0\leq f(x)\leq\frac{\ln2+150\cdot\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]2}\cdot x^{1/3}}=\frac{\ln2}{\frac{1}{\sqrt[3]2}}\overbrace{\frac{1}{x^{1/3}}}^{\to0}+\frac{150}{\frac{1}{\sqrt[3]2}}\cdot\overbrace{\frac{\ln x}{x^{1/3}}}^{\to 0 \text{ из } (*)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

2 полицајца

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

2

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}}_{L} = ? \qquad a>0$$

израз је облика „$\frac{0}{0}$", примењујемо Лопиталово правило па нам је потребан извод од $(a+x)^x$ (израчунавамо га посебно да не би би комликован израз, иначе не мора)

$$((a+x)^x)' = (e^{x\cdot\ln(a+x)})' = e^{x\cdot\ln(a+x)}\cdot\left(\ln(a+x)+x\cdot\frac{1}{a+x}\right)$$

$$= (a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)$$

Дакле:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2} \overset{\text{лопитал}}{\underset{\text{ако } \exists \to}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)-a^x\ln a}{2x} =$$

(поново неодређен израз облика „$\frac{0}{0}$" јер: бројиоцу $\to$ $(a+0)^0\cdot(\ln a+0)-a^0\ln a) = 1\cdot\ln a-\ln a=0$)

поново лопитал:

$$\downarrow$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)}\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)+(a+x)^x\cdot\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)'-a^x(\ln a)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{(a+x)^x}_{\downarrow\, a^0=1}\cdot\left(\underbrace{\ln(a+x)}_{\downarrow\,\ln a}+\underbrace{\frac{x}{a+x}}_{\downarrow\,\frac{0}{a}=0}\right)^2+\underbrace{(a+x)^x}_{\downarrow\,1}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{a+x}}_{\downarrow\,\frac{1}{a}}+\underbrace{\frac{a}{(a+x)^2}}_{\downarrow\,\frac{1}{a}}\right)-\underbrace{a^x(\ln a)^2}_{\downarrow\,1\cdot(\ln a)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1\cdot(\ln a)^2+1\cdot\frac{2}{a}-(\ln a)^2\right) = \boxed{\frac{1}{a}} \quad \square$$

3. Одредити: $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{x\cdot\arcsin x}$

I начин – Лопитал (бар 2x)

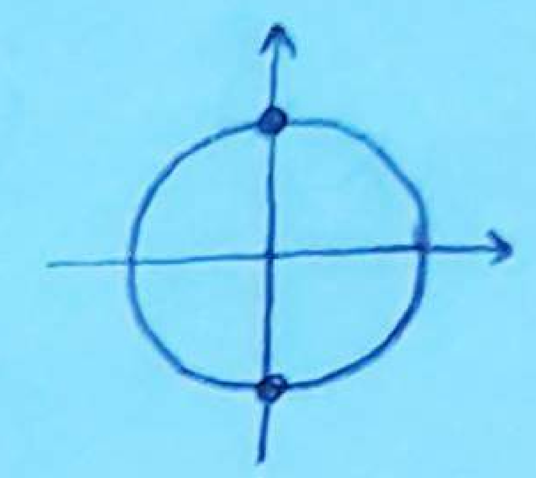
сређивање...

за вежбу урадити

II начин: смена :)

кад $x\to0$ можемо претпоставити $x\in(-1,1)$

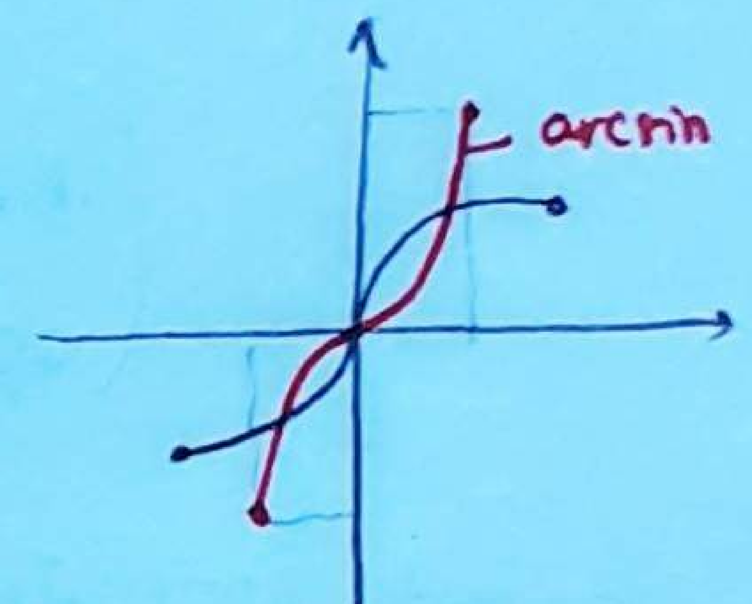
тада $x=\sin t$ за неко $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



и за $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ важи: $\underbrace{\arcsin(\sin t)=t}_{\circledast}$

! битно да $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$x\to0 \Leftrightarrow t\to0$



$$\Rightarrow L=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}-\arcsin(\sin t)}{\sin t\cdot\arcsin(\sin t)}$$

$$\overset{\circledast}{=}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}-t}{t\cdot\sin t}$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|\overset{t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{=\!=\!=}\cos t$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}-t}{t\cdot\sin t}\ \underset{\text{Лопитал}}{\overset{\text{„}0/0\text{"}}{=\!=\!=}}\ \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}-1}{\sin t+t\cdot\cos t}\ \overset{\text{„}0/0\text{"}}{=\!=}$$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{(-2)\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\cdot(-\sin t)}{\cos t+\cos t+t\cdot(-\sin t)}$$

бројилац $\to 0$

именилац $\to 1+1+0=2$

$$=\frac{0}{2}=0$$

$\boxed{L=0}$ □

Помоћу Лопиталовог правила можемо доказати следећу лему која у одређеним случајевима упрошћава испитивање диференцијабилности:

$\boxed{\text{ЛЕМА}}$ Ако је f непрекидна функција у тачки a, и извод $f'(x)$ постоји на $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$

и ако постоји $\lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$, онда важи $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$

(Аналогно важи за $f'_-(a)$ и $f'(a)$)

ДОКАЗ: $f'_+(a) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\to 0$ јер f непр. у a $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

по деф.

$\xlongequal[\text{Ако } \exists \to]{\text{Лопитал}} \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{f'(a+h)\cdot 1 - 0}{1}$ (изводи по h)

$= \lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$ □

$\boxed{\text{ВАЖНО}}$: Наравно да се може десити да $\lim\limits_{x\to a_+} f'(x)$ не постоји,

а да функција f буде диференцијабилна у a!

Ово је само ако постоји!

$\boxed{\text{Пример}}$ (када не може да се примени лема)

$\boxed{4}$ Доказати да функција $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ има прекидан извод у тачки 0.

* Најпре f јесте непрекидна на $\mathbb{R}$ јер:
  - на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ✓
  - $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$ ✓

* диференцијабилност:
  - $x\neq 0$: $f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\neq 0}$
  - $x=0$: ако бисмо покушали да применимо лему:

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\Big(\underbrace{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{не постоји}}\Big)$ ← не постоји!

$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ (нити постоје лимеси $x\to 0_+$ / $x\to 0_-$

Међутим, функција f јесте диференцијабилна у 0 јер по дефиницији:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\cdot\sin\frac{1}{h}=0$$

$$\boxed{f'(0)=0}$$

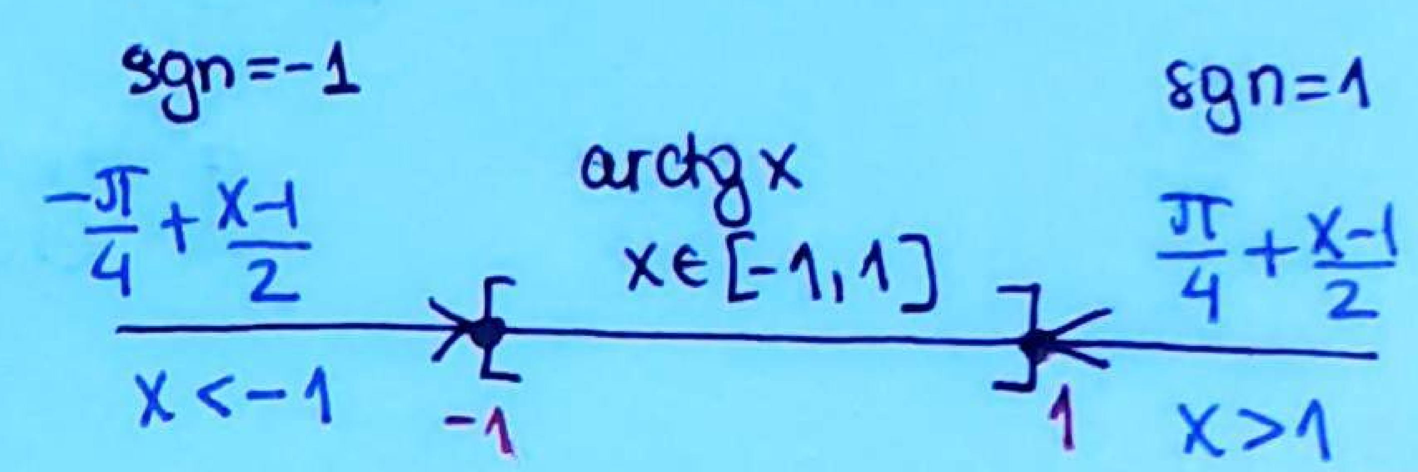
$\Rightarrow$ f је <u>диференцијабилна на $\mathbb{R}$</u>

Примећујемо да f' тј. извод функције f није непрекидан на $\mathbb{R}$ (не постоји $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$).

Урадимо сада један пример када лема може да се примени:

$\boxed{5.}$ Испитати диференцијабилност функције:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & |x|\leq 1\\ \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}x+\frac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$



* Прво проверавамо непрекидност

- за $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ јесте непрекидна и
- $\boxed{x=-1}$ $\lim\limits_{x\to -1_-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1_-}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}-1$

  $f(-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ $\neq$ $\Rightarrow$ није непр. у -1
- $\boxed{x=1}$ $\lim\limits_{x\to 1_+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1_+}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

  $f(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1_-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1_-}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow$ непр. у 1

  $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ непр. на } \mathbb{R}\setminus\{-1\}}$

* $\boxed{\text{ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ}}$ - проверавамо само где је непр., тј. за $\boxed{x\neq -1}$

одмах знамо: $$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & x\in(-1,1)\\ \frac{1}{2}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

Остаје још $\boxed{x=1}$ - ту рачунамо лимесе из леме, леви и десни:

$f'_+(1)\overset{\text{ако }\exists}{=\!=}\lim\limits_{x\to 1_+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1_+}\frac{1}{2}=1/2 \Rightarrow \exists\, f'_+(1)$

$f'_-(1)\overset{\text{ако }\exists}{=\!=}\lim\limits_{x\to 1_-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1_-}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, f'_-(1)$

једнаки су $\Rightarrow$ $\boxed{f'(1)=\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ је диференцијабилна на } \mathbb{R}\setminus\{-1\}}$ □

~ Изводи вишег реда ~

Извод функције (први извод): $f'(x)$

Други извод: $f''(x)=(f'(x))'$

$\vdots$

n-ти извод: $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ – извод $(n-1)$-ог извода

$\boxed{1}$ Израчунати други извод функције

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}$$

Прво рачунамо $f'(x)$:

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{1+x^2}+x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\underbrace{(1+x^2)'}_{\cancel{2}x}=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\underline{\underline{f''(x)}}=(f'(x))'=\left(\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x+\frac{2x\cdot\sqrt{1+x^2}-x^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\cancel{2}x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\cdot\left(2x\sqrt{1+x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

сад само средујемо, сводећи на заједнички именилац $\rightarrow \frac{1}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\underbrace{x\cdot(1+x^2)+2x\cdot(1+x^2)-x^3}_{x+\cancel{x^3}+2x+2x^3-\cancel{x^3}}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)^{3/2}}}}$$

$\boxed{2.}$ Израчунати n-ти извод функције $f(x)=a^x$:

Рачунамо првих неколико извода:

$$f'(x)=a^x\ln a,\quad f''(x)=a^x(\ln a)^2,\quad f'''(x)=a^x(\ln a)^3$$

примећујемо да важи: $\boxed{f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n}$

Показује се индукцијом:

1) $n=1$: ✓

2) $n\rightarrow n+1$: $\boxed{\text{И.Х.}}$ важи за n $\quad\boxed{\text{за } n+1}$ $\quad f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'\overset{\text{И.Х.}}{=}\left(a^x\ln^n a\right)'$

$$=a^x\cdot\ln a\cdot\ln^n a=a^x\ln^{n+1}a \quad\square$$

$\boxed{3.}$ $f(x)=\sin x \quad f^{(n)}(x)=?$

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f'''(x)=-\cos x$

$f^{IV}(x)=\sin x$ даље се понавља

Видимо да се понавља сваки четврти

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sin x, & n=4k\\ \cos x, & n=4k+1\\ -\sin x, & n=4k+2\\ -\cos x, & n=4k+3\end{cases}$$

$\boxed{4.}$ $f(x)=x^m \quad f^{(n)}(x)=?$

Првих неколико: $f'(x)=mx^{m-1},\ f''(x)=m(m-1)x^{m-2},\ f'''(x)=m(m-1)(m-2)x^{m-3},\ldots$

наставља се док се у производу не појави $\underline{m-m} \rightarrow$ од тад ће бити 0

Дакле:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\cdot x^{m-n}, & \text{за } (m\geq n \text{ и } m\in\mathbb{N}) \text{ или ако } \underbrace{(m\notin\mathbb{N})}_{\text{тада никад немамо 0}}\\ 0, & \text{ако } (m\in\mathbb{N} \text{ и } n>m)\end{cases}$$

(Доказ - индукцијом)

$\boxed{5.}$ $f(x)=(ax+b)^p,\ f^{(n)}(x)=?$

Првих неколико: $f'(x)=p\cdot(ax+b)^{p-1}\cdot a$

$f''(x)=p(p-1)\cdot(ax+b)^{p-2}\cdot a^2$

$\vdots$

* ако $p\in\mathbb{N}$ појавиће се $(p-p)$ за $f^{(p+1)}$ и од тада ће изводи бити 0
* ако $p\notin\mathbb{N}$ никада се неће појавити нула!

Дакле:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)\cdot(ax+b)^{p-n}\cdot a^n, & \text{за } (p\in\mathbb{N}, p\geq n) \text{ или } (p\notin\mathbb{N})\\ 0, & \text{за } (p\in\mathbb{N}, p<n)\end{cases}$$

(Доказ - индукцијом)

Лајбницова формула

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}}_{\text{k-ти извод од } u} \cdot \underbrace{v^{(n-k)}}_{\text{(n-k)-ти извод од } v}$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

6. Наћи n-ти извод функције $f(x) = (5x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-3x}$ у тачки $x_1 = 0$, и тачки $x_2 = 6$.

$$f(x) = \underbrace{(5x^2 - 2x + 1)}_{\text{означимо са } u(x)} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v(x)} = u(x) \cdot v(x)$$

Потребно је да знамо изводе функција u и v

$\boxed{u}$

$u^{(0)}(x) = u(x) = 5x^2 - 2x + 1$

$u'(x) = 10x - 2$

$u''(x) = 10$

$u'''(x) = 0$

$u^{(k)}(x) = 0, \ \forall k \geq 3$

$\boxed{v}$

$v^{(0)}(x) = e^{-3x}$

$v'(x) = (-3) e^{-3x}$

$v''(x) = (-3)^2 e^{-3x}$

$\vdots$

$v^{(k)}(x) = (-3)^k e^{-3x}$

Лајбницова формула: $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

$$f^{(n)}(x) = \Big(\binom{n}{0} u \cdot v^{(n)} + \binom{n}{1} u' \cdot v^{(n-1)} + \binom{n}{2} \cdot u'' \cdot v^{(n-2)} + \underbrace{\binom{n}{3} \overset{=0}{u'''} v^{(n-3)} + \ldots + \binom{n}{n} \overset{=0}{u^{(n)}} v}_{=0 \text{ јер су сви } u^{(k)}=0 \text{ за } k \geq 3} \Big)(x)$$

$$= 1 \cdot (5x^2 - 2x + 1) \cdot (-3)^n \cdot e^{-3x}$$
$$+ \binom{n}{1} \cdot (10x - 2)(-3)^{n-1} \cdot e^{-3x}$$
$$+ \binom{n}{2} \cdot 10 \cdot (-3)^{n-2} \cdot e^{-3x}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^{-3x} \cdot (-3)^{n-2} \cdot \left(9(5x^2 - 2x + 1) + n \cdot (-3)(10x - 2) + 10 \cdot \binom{n}{2} \right), \ \forall x$$

за конкретне тачке: $\boxed{x_1 = 0}$

$$f^{(n)}(0) = e^0 \cdot (-3)^{n-2} \cdot \left(9 + n \cdot (-3) \cdot (-2) + 10 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \right)$$
$$= (-3)^{n-2} \cdot (9 + 6n + 5n^2 - 5n)$$

$$\boxed{f^{(n)}(0) = (-3)^{n-2} \cdot (5n^2 + n + 9)}$$

$\boxed{x_2 = 6}$

$f^{(n)}(6) = \ldots$ израчунамо !!

7. Нађи 100-ти извод функције: $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

Користимо Лајбницову формулу:

$$f(x) = \underbrace{(1+x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{(1-x)^{-1/2}}_{v(x)}$$

$$f^{(100)}(x) = (u\cdot v)^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (1+x)^{(k)} \cdot \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100-k)}$$

само за $k=0$: $(1+x)^{(0)} = 1+x$

и $k=1$: $(1+x)^{(1)} = (1+x)' = 1$

за $k \geq 2$ $(1+x)^{k} = 0$

$$\Rightarrow f^{(100)}(x) \overset{\text{само } k=0,1}{=\!=\!=} \underbrace{\binom{100}{0}}_{=1} (1+x) \cdot \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100)} + \binom{100}{1} \cdot 1 \cdot \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(99)}$$

$$= (1+x)\left((1-x)^{-1/2}\right)^{(100)} + 100 \cdot \left((1-x)^{-1/2}\right)^{(99)} \quad ⊛$$

Потребни су нам, дакле, изводи функције $(1-x)^{-1/2}$

Применимо задатак 5: $a=-1$, $b=1$, $p=-1/2$

$p \notin \mathbb{N}$ па нећемо добити извод 0, већ „велики производ" из задатка 5:

$$\left((1-x)^{-1/2}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}\cdot(-1)^n$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}\cdot(-1)^n$$

$$= \cancel{(-1)^n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\underbrace{(1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1))}_{\substack{\text{производ свих} \\ \text{непарних } = (2n-1)!!}}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}\cdot\cancel{(-1)^n}$$

☺ $1\cdot2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n = (2n)!!$

$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1) = (2n-1)!!$

$$\Rightarrow \boxed{\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}}$$

Заменимо то у ⊛ за $n=100$ и $n=99$:

$$f^{(100)}(x) = (1+x)\cdot\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-100} + 100\cdot\frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-99}.$$

□