~ Диференцијабилност – наставак ~

АНАЛИЗА 1И
ВЕЖБЕ за
8./ 9. април
(на видеу овде стоји погрешан датум :)

Вежбамо мало коришћење теореме о изводу инверзне функције:

1. Наћи изводе следећих функција:

(а) $g(x) = \operatorname{arctg} x, \ x \in \mathbb{R}$

(б) $g(x) = \arccos x, \ x \in (-1,1)$

(в) $g(x) = \arcsin x, \ x \in (-1,1)$

Са предавања знамо: $f : (a,b) \to (\alpha,\beta)$ бијекција и диференцијабилна у x_0, $f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1} : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ диференцијабилна у $y_0 = f(x_0)$

Тада важи: $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(а) $g(y) = \operatorname{arctg} y$ (узимамо y уместо x да би се уклапало са теоремом

$g(y) = f^{-1}(y)$ – arctg је инверз функције tg :

$$\left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \underset{\operatorname{arctg} y}{\overset{\operatorname{tg} x}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$$

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Применимо теорему о изводу инверзне фје:

$y_0 = \operatorname{tg} x_0$

$$(\operatorname{arctg})'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) \overset{T}{=} \frac{1}{f'(x_0)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{извод} \\ \text{тангенса}}}{=} \frac{1}{1/\cos^2 x_0} = \underbrace{\cos^2 x_0}$$

желимо да изразимо преко y_0, тј. преко $\operatorname{tg} x_0$

како се cos изражава преко tg ?

знамо да за $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ важи: $\cos^2 x_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0}$

$$\Rightarrow (\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

(б) $g(y)=\arccos y\ ,\ y\in(-1,1)$

инверзна фја функције $f(x)=\cos x$ на интервалима:

$$(0,\pi) \underset{g(y)=f^{-1}(y)=\arccos y}{\overset{f(x)=\cos x}{\rightleftarrows}} (-1,1)$$

$y_0\in(-1,1)\quad y_0=\cos x_0\ ,\ x_0\in(0,\pi)$

$$\Rightarrow\ (\arccos)'(y_0)=(f^{-1})'(y_0)$$

$$\overset{T}{=}\frac{1}{f'(x_0)} \qquad f'(x)=-\sin x$$

$$=\frac{1}{-\sin x_0}$$

треба изразити $-\sin x_0$ преко $\cos x_0=y_0$

за $x_0\in(0,\pi)$: $\quad \sin x_0=\sqrt{1-\cos^2 x_0}$

(позитиван је $\sin$)

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x_0}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

$$\Rightarrow\ (\arccos)'(y)=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

(в) – за вежбу.

~ Основне теореме диференцијалног рачуна ~

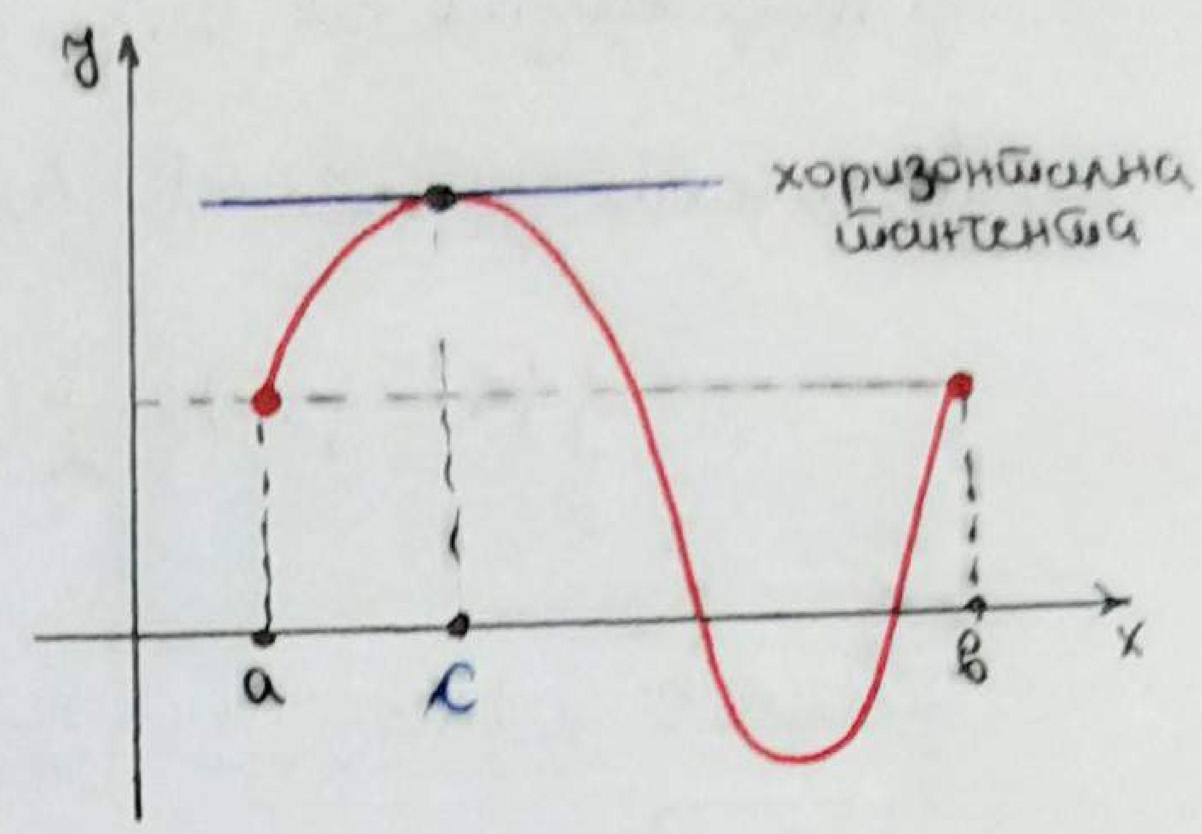
РОЛОВА ТЕОРЕМА

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

f диференцијабилна на (a,b)

$f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)\ \ f'(c)=0$



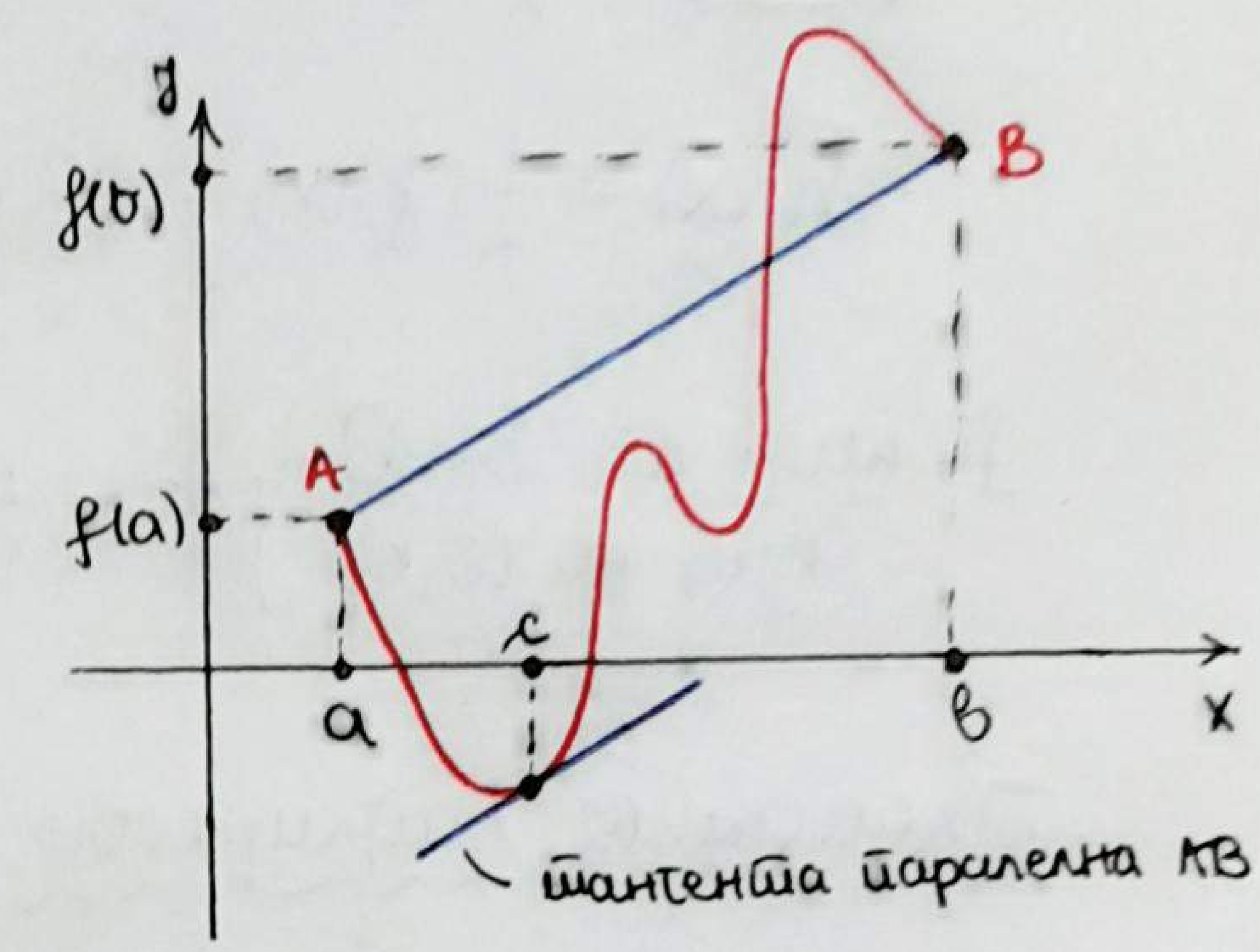
ЛАГРАНЖОВА ТЕОРЕМА

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

f диференцијабилна на (a,b)

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ тд.

$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$



1. $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ тако да важи: $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_n}{n+1}=0$ (*)

Доказати да полином: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ има нулу у $\mathbb{R}$.

Желимо да покажемо да $\exists c\in\mathbb{R}$ тд. $p(c)=0$

Ако $2\nmid n$ знамо да то важи јер је полином непарног степена, али иначе не знамо без додатног услова.

Посматрајмо полином $f(x)$ тако да $p(x)=f'(x)$ ← то је идеја ☺
„наместимо" знајући да $a_kx^k=\left(\frac{a_k}{k+1}\cdot x^{k+1}\right)'$:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=a_0\cdot x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\dots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

Заиста важи: $f'(x)=p(x)$, f је диференцијабилна на $\mathbb{R}$

Да бисмо доказали да $\exists c$ тд. $f'(c)=0$, потребне су нам (према Роловој т.) две тачке у којима f има исту вредност:

$f(0)=0$

$f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\dots+\frac{a_n}{n+1}\overset{(*)}{=}0$

↑ услов

$f(0)=f(1)$

f је непр. на $[0,1]$ и диф. на $(0,1)$ јер диф. на $\mathbb{R}$ $\xrightarrow[\text{Ролова т.}]{}$ $\exists c\ \ f'(c)=0$

тј. $\boxed{p(c)=0}$ ◻

$\boxed{2}$ $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

f непрекидна на $[0,1]$, диференцијабилна на $(0,1)$

Доказати да $\exists c\in(0,1)$ тако да важи

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}\left(f'(c)+f'(1-c)\right) \qquad \circledast$$

Уочимо функцију којој је извод десна страна $\circledast$:

$$\boxed{h(x)}:=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(1-x)\right) \qquad h:[0,1]\to\mathbb{R}$$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)-f'(1-x)\cdot(-1)\right)=\frac{1}{2}\left(f'(x)+f'(1-x)\right) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ непр. на } [0,1] \\ \text{диф на } (0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ и } h \text{ непр. на } [0,1] \ \&\ \text{диф. на } (0,1)$$

Применимо Лагранжову теорему на функцију h на $[0,1]$

$$\exists c\in(0,1): \quad h(1)-h(0)=h'(c)\cdot(1-0)$$

$h(1)=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))$

$h(0)=\frac{1}{2}(f(0)-f(1))$

$\Rightarrow h(1)-h(0)=f(1)-f(0) \qquad (2)$

из (1) и (2)

$$\boxed{f(1)-f(0)=\frac{1}{2}\left(f'(c)+f'(1-c)\right)}$$

што смо управо желели ⌣ □

3. Доказати да важи:

(а) За све $x,y>0$: $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|$

(б) За све $x,y \geq 1$: $\left|\frac{x}{1+e^{1/x}}-\frac{y}{1+e^{1/y}}\right| \geq \frac{|x-y|}{4}$

(а) Тврђење ћемо доказати применом Лагранжове теореме.

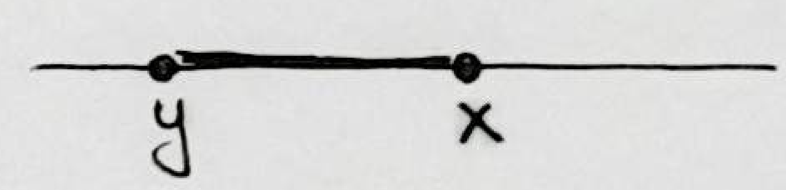
$$? \quad \left|\frac{1}{1+x}-\underbrace{\frac{1}{1+y}}_{\text{ово је тачно } f(y)}\right| \leq |x-y|$$

означимо са $f(x)$

Без умањења општости можемо посматрати случај $\underline{x \geq y}$

Уочимо функцију: $f:[y,x]\to\mathbb{R}$

$f(t)=\frac{1}{1+t}$



ово је непрекидна ф-ја и диференцијабилна на $(0,+\infty)$

ако $y=x$ тврђење је тачно, тако да нека $\underline{y<x}$

Лагранжова теорема за сегмент $[y,x]$ каже:

$\exists c\in(y,x)$ тако да $f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)$

$f'(c)=-\frac{1}{(1+c)^2}$

апс. вредност: $|f(x)-f(y)|=\underbrace{\frac{1}{(1+c)^2}}_{<1 \text{ јер је } y,x>0 \text{ па је и } c>0}\cdot|x-y| < |x-y|$

$\Rightarrow$ важи $\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|$, $\forall x,y>0$. □

(б) Аналогно претходном, посматрамо $y\leq x$ и функцију

$f:[y,x]\to\mathbb{R}$ $\quad f(t)=\frac{t}{1+e^{1/t}}$ - непрекидна на $[y,x]$ и диференцијабилна на (y,x) кад $x,y>0$ ✓

Лагранжова теорема на $[y,x]$:

$\exists c\in(y,x)$: $\quad f(x)-f(y)=f'(c)\cdot(x-y)$

$$f'(c)=\frac{1\cdot(1+e^{1/c})-c\cdot e^{1/c}\cdot\frac{-1}{c^2}}{(1+e^{1/c})^2}=\frac{1+e^{1/c}+\frac{e^{1/c}}{c}}{(1+e^{1/c})^2}$$

Узећемо апсолутну вредност јер нам треба тражена са апс вредношћу:

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y|$$

$$|f(x)-f(y)| = \underbrace{\left|\frac{1+e^{1/c}+\frac{e^{1/c}}{c}}{(1+e^{1/c})^2}\right|}_{\text{треба доказати да је ово } \geq 1/4}\cdot|x-y|$$

Под апсолутном вредношћу је позитиван број јер $x,y\geq 1$, а $c\in(y,x)$

$$\Rightarrow \boxed{c>1}$$

$$\frac{1+e^{1/c}+\frac{e^{1/c}}{c}}{(1+e^{1/c})^2} > \frac{1+e^{1/c}}{(1+e^{1/c})^2} = \frac{1}{1+e^{1/c}} \geq \frac{1}{1+e^{1}} > \frac{1}{4}$$

$\frac{e^{1/c}}{c} > 0$

јер је $e<3$

овде користимо:

$c>1$

$\Rightarrow \frac{1}{c}<1$

$\Rightarrow e^{1/c}<e^{1}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{1/c}} > \frac{1}{1+e^{1}}$ ✓

Дакле, заиста важи: $|f(x)-f(y)| \geq \frac{1}{4}|x-y|$

тј. $\left|\frac{x}{1+e^{1/x}} - \frac{y}{1+e^{1/y}}\right| \geq \frac{1}{4}|x-y|$ □

* за вежбу: Показати да за свако $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x-y|$$

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција

таква да постоји $a\in\mathbb{R}$: $f(a)=1$, $a\neq 0$

Доказати да $\exists c\in\mathbb{R}$ тако да важи: $c\cdot f'(c)+f(c)=1$

$$c\cdot f'(c)+f(c)=1$$

$$\underbrace{c\cdot f'(c)+f(c)-1}=0$$

приметимо да је ово
извод функције
$c\cdot f(c)-c$

Дакле, посматрајмо функцију:

$$F(x)=x\cdot f(x)-x$$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција $F'(x)=x\cdot f'(x)+f(x)-1$

посматрајмо је на сегменту $[0,a]$ (ако $a>0$) / $[a,0]$ (ако $a<0$)
и применимо <u>Ролову теорему</u> (диференцијабилност на $\mathbb{R}$
гарантује испуњене услове!)

$$F(0)=0\cdot f(0)-0=0$$

$$F(a)=a\cdot \underbrace{f(a)}_{1}-a=0$$

$$F(0)=F(a) \overset{\text{Рол}}{\Longrightarrow} \exists c \text{ између } 0 \text{ и } a \text{ тд. } F'(c)=0$$

тј. $c\cdot f'(c)+f(c)-1=0$ ✓ □

* за вежбу: f, g - непрекидне на $[a,b]$
диференцијабилне на (a,b)

$$f(a)=f(b)=0$$

$$g(a)\cdot g(b)\neq 0$$

$\forall x\in(a,b)$: $f'(x)\cdot g(x)\neq f(x)\cdot g'(x)$

Доказати да $\exists c\in(a,b)$ тако да $g(c)=0$.

5. Доказати да за свако $x>0$ важи:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Посматрајмо функцију: $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$F(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

ово је непрекидна и диференцијабилна функција

њен извод: $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$

$F'(x)=0, \ \forall x\in(0,+\infty)$

па према тврђењу са предавања $\Rightarrow$ F је константа

$F(x) = c, \ \forall x>0$

Шта је c?

нађимо неку тачку у којој умемо да израчунамо F

нпр. $x=1$ $\quad c = F(1) = (\operatorname{arctg} 1)\cdot 2 = \frac{\pi}{4}\cdot 2 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \ \forall x>0. \quad \square$$

~ Лопиталова правила ~

Неодређени изрази:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad +\infty-(+\infty), \quad 1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0$$

$\boxed{T}$ (Лопиталова правила)

$f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилне, $-\infty\leq a\leq b\leq+\infty$, $g'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$

Нека постоји $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ако је $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\infty$,

онда ће постојати и $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важиће $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

(* важи и за $\lim\limits_{x\to b-}$)

ВАЖНО: Ако $\nexists \lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то не значи ништа за $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$!

тј. не можемо ништа закључивати !

$\boxed{1}$ Израчунати лимесе:

(a) $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{arctg} x\right)^x$ ← ово је израз облика $\{1^\infty\}$ јер $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi/2} = 1$.

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg} x\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg} x\right)}$$

$=A$ – рачунамо овај лимес, важи $\boxed{L=e^A}$

$$A = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arctg} x\right)}{\frac{1}{x}}$$

– наместили смо да буде облик $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

$$\underset{\text{ако } \exists \to}{\overset{\text{Лопитал}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\cancel{2/\pi}\cdot\operatorname{arctg} x}\cdot\cancel{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\to \frac{\pi}{2}}} = -\frac{2}{\pi}$$

$A = -\frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow L = e^{-2/\pi}$ □

(б) $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$ израз је облика $\infty-\infty$

← намештамо да можемо да применимо Лопитала

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}$$ облика $\frac{0}{0}$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-x\cdot\sin x-\cancel{\cos x}}{x\cdot\cos x+\sin x}$$ поново облика $\frac{0}{0}$

$$\overset{\text{Лопитал}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cdot\cos x}{\underbrace{\underbrace{\cos x}_{\to 1}+\underbrace{x(-\sin x)}_{\to 0}+\underbrace{\cos x}_{\to 1}}_{\to 2}}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$ □

(в) $\underbrace{\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln x}_{}=\underbrace{\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}}_{\frac{-\infty}{+\infty}}\overset{\text{Лопитал}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$

облика $0\cdot(-\infty)$
намештамо за Лопитала

ВАЖАН ЛИМЕС ☺

$\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln x=0$

(г) $\underbrace{\lim_{x\to 0+}x^{x^x-1}}_{L}=\lim_{x\to 0+}e^{(x^x-1)\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\cdot\ln x}$ $=A$ $\quad L=e^A$

$$A=\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+}\left(e^{x\ln x}-1\right)\cdot\ln x$$

☺ не примењујемо одмах без размишљ., јер не желимо компликоване изводе!

$$=\lim_{x\to 0+}\underbrace{\left(\frac{e^{x\cdot\ln x}-1}{(x\ln x)}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{x\cdot(\ln x)^2}_{=?}$$

$(x\ln x)\to 0$ из претх.

← наместили смо знајући претх. задатак

израчунамо $\lim_{x\to 0+}x\cdot(\ln x)^2=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^2}{1/x}\overset{\text{Лопитал}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-2)x\ln x=0$

Дакле: $A=\lim_{x\to 0+}\underbrace{(\sim)}_{\to 1}\cdot\underbrace{x(\ln x)^2}_{\to 0}=0$ $\Rightarrow L=e^A=e^0=1$

Дакле, $\lim_{x\to 0+}x^{x^x-1}=1$ □