

~ Диференцијабилност ~

АНАЛИЗА 111
ВЕЖБЕ ЗА
1.4./2.4.

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција

$x_0 \in (a, b)$

Да ли постоји тангента на график f -е у тачки $(x_0, f(x_0))$?

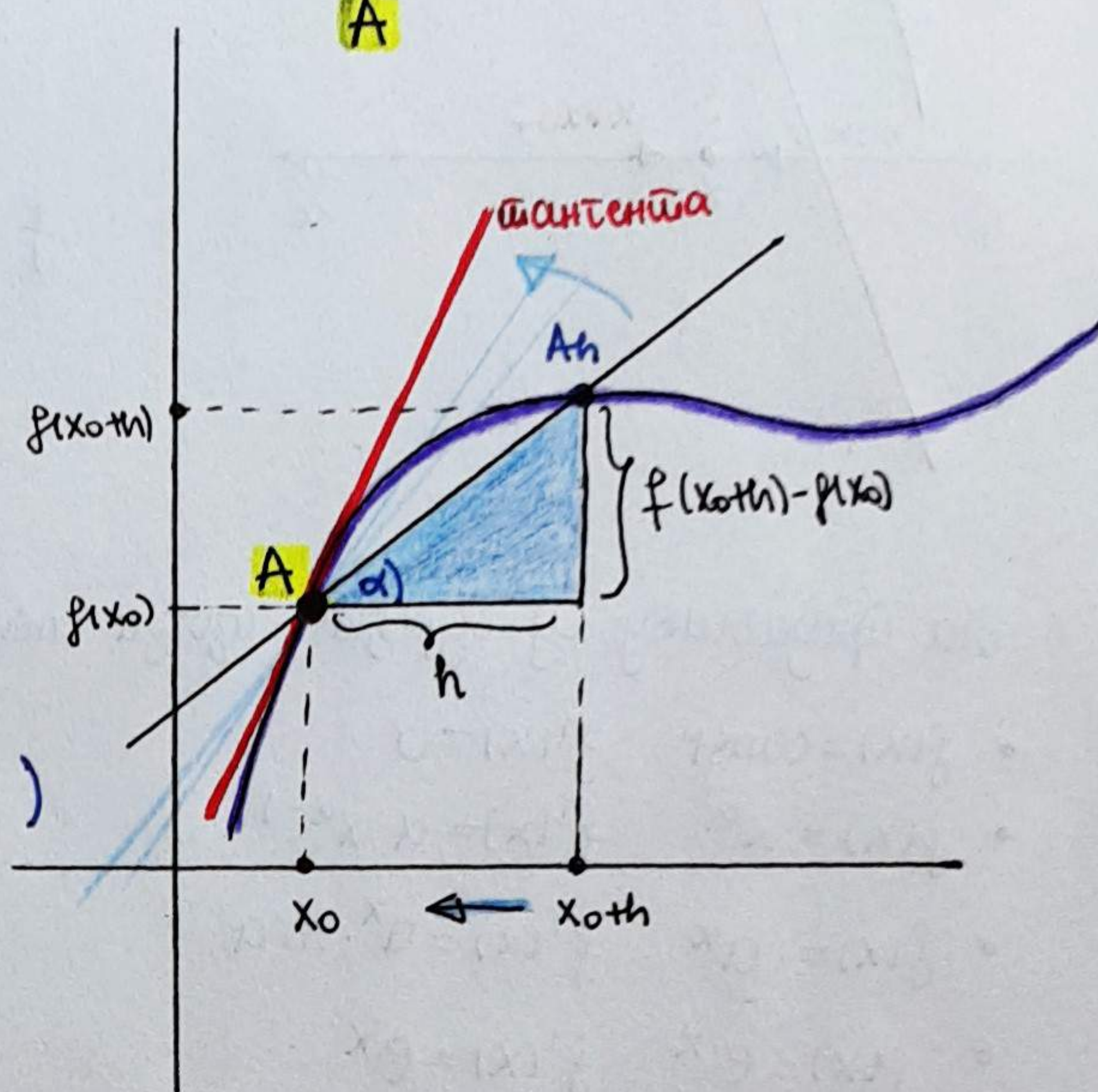
Ако $\exists$, њен коефицијент правца је:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(видети предавања:

$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ је коеф. правца (=tg α)
шешиве AA_n

кад $h \rightarrow 0$, шешива $\rightarrow$ тангенту у A)



Ако $\exists$ коначан лимес

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

кажемо да је f **диференцијабилна** у тачки x_0 , а $f'(x_0)$ се назива **извод** у x_0

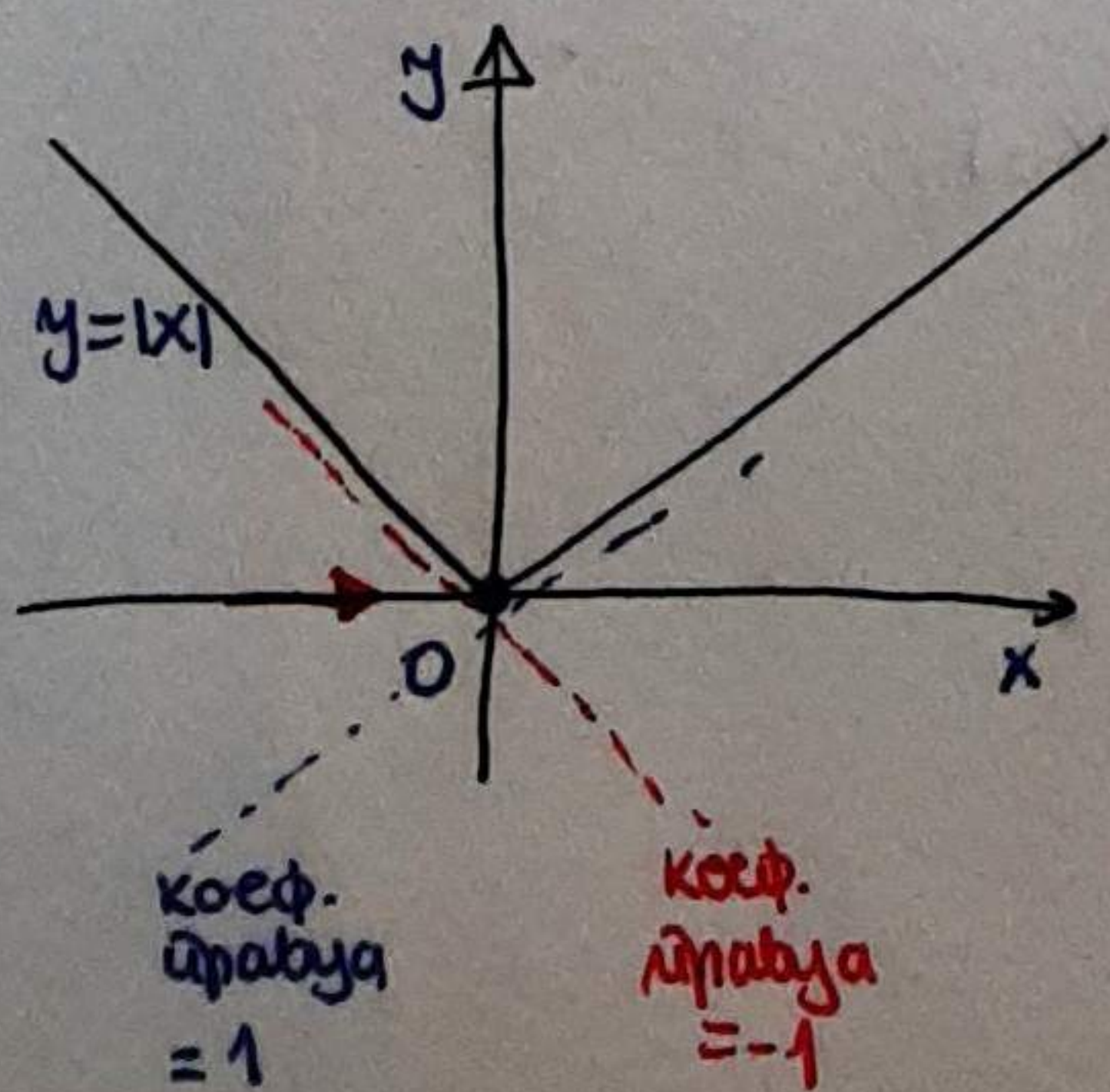
(коеф. правца тангенте је $f'(x_0)$)

Подсећање са предавања:

[Т] f диференцијабилна у $x_0 \Rightarrow f$ непрекидна у x_0

! увек прво проверавати непрекидност

[Пр] $f(x) = |x|$ није диференцијабилна у тачки $x_0 = 0$ - јер је „шпиз“ (шмек)



нeмaмo тaнгeнтy у oвoј тaчкaм!

јер разлику са леве и десне стране:

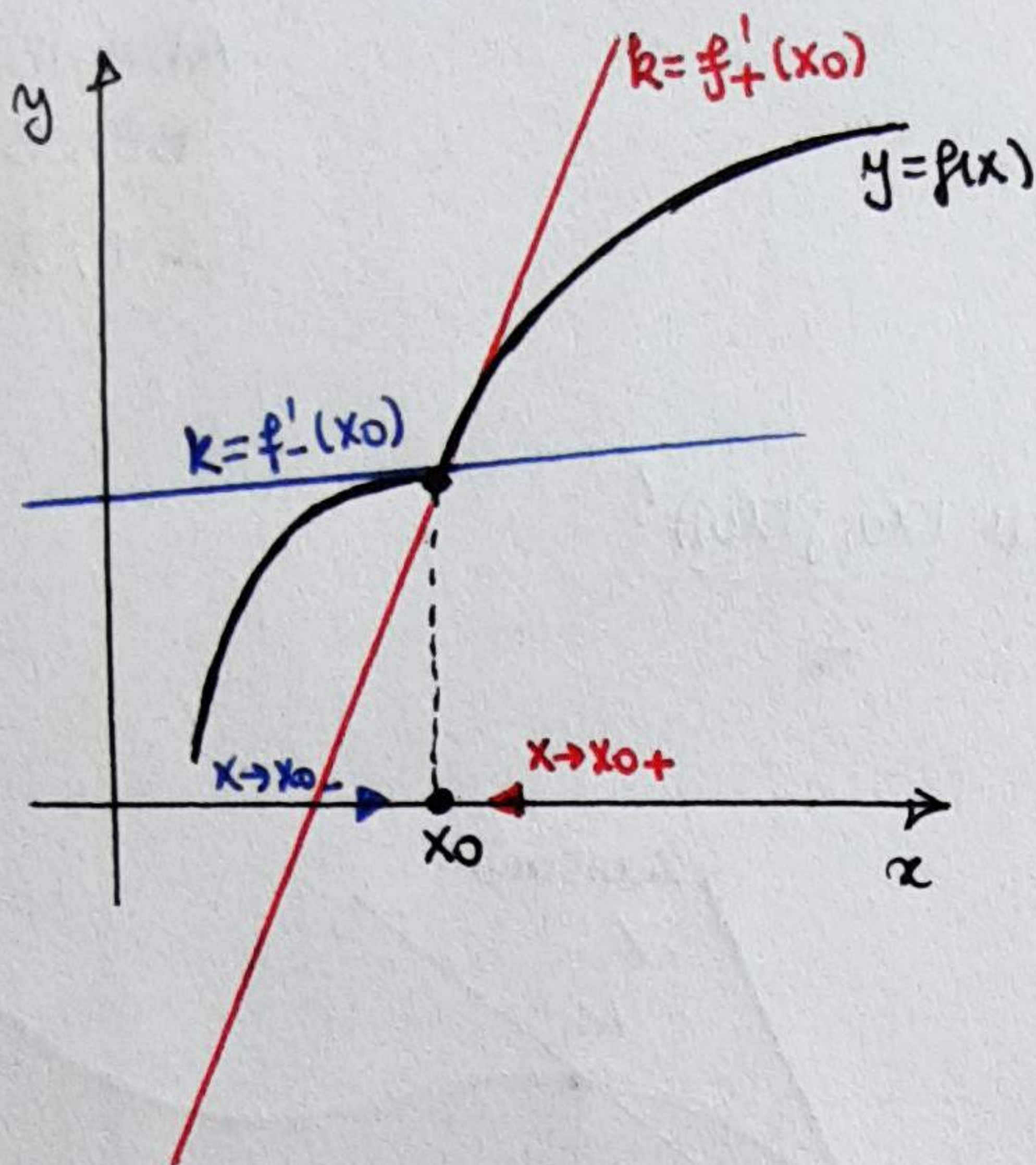
$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-1) = -1$$

$$1 \neq -1 \Rightarrow \text{не постоји лимес } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

та $f(x)$ није диференцијабилна у тачки 0.

Али наћи је ово поштом за убојство и десно узбога



лево узбога: $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

десно узбога: $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

f је диференцијабилна у x_0 тј. $\exists f'(x_0)$

$\Leftrightarrow \exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

На предавању су одређени узбоги елементарних функција:

- $f(x) = \text{const}$ $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^\alpha$ $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- $f(x) = a^x$ $f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a x$ $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- ...

дане видеће у
таблицу узбога
(следећи лист)

Правила диференцијабилних функција:

- $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
($g(x_0) \neq 0$)
- узбога сложене функције: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

~ Таблица извода ~

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
1.	$c = const$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \text{ непарно}, x \neq 0$ $\alpha = \frac{p}{q} > 1, q \text{ непарно}, x \in \mathbb{R}$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
9.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
11.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
12.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

1. израчунајте извод функције:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \ln x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 \cdot e^x) \cdot \ln x)' \xrightarrow[\text{извод производа за } x^2 \cdot e^x \text{ и } \ln x]{=} (x^2 \cdot e^x)' \cdot \ln x + (x^2 \cdot e^x) \cdot (\ln x)' \\ &\xrightarrow[\text{извод производа за } x^2 \cdot e^x]{=} (x^2)' \cdot e^x + x^2 (e^x)' \cdot \ln x + x^2 \cdot e^x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \cdot e^x \cdot \ln x + x^2 \cdot e^x \cdot \ln x + x^2 \cdot e^x \cdot \frac{1}{x} \quad \square \end{aligned}$$

* Приметимо да смо по аналогiji са: $(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$ добили за три функције:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$$

за већу индукцијом показало да важи:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = \underline{f_1'} \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 \cdot \underline{f_2'} \cdot f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 \cdots f_{n-1} \cdot \underline{f_n'}$$

2. Наћи извод функције:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1+x^4}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{1+x^4}}} \cdot (1 + \sqrt[3]{1+x^4})'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{1+x^4}}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x^4)^{2/3}} \cdot (1+x^4)'$$

← користимо став о изводу сложене функције
прво извод корена:

$$(\sqrt{g})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \underbrace{g'}_{\text{па онда извод од } g}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{1+x^4}}} \cdot \frac{1}{(1+x^4)^{2/3}} \cdot 4x^3$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{g})' &= (g^{1/3})' = \frac{1}{3} \cdot g^{1/3-1} \cdot g' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{g^{2/3}} \cdot g' \end{aligned}$$

□

3. Наћи извод функције:

$$f(x) = x^x$$

!! кад имамо $f(x) = u(x)^{w(x)}$
скоро увек представимо: $f(x) = e^{w(x) \cdot \ln(u(x))}$
(јер је извод од e^u леи)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' \\ &= \underbrace{e^{x \cdot \ln x}}_{x^x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = \underline{x^x \cdot (\ln x + 1)} \quad \square \end{aligned}$$

4. Наћи извод функције:

$$f(x) = x^{x^x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{x^x})' = (e^{x^x \cdot \ln x})' = e^{x^x \cdot \ln x} \cdot (x^x \cdot \ln x)' \\ &= \underbrace{e^{x^x \cdot \ln x}}_{x^{x^x}} \cdot \left(\underbrace{(x^x)'}_{\substack{\text{знамо} \\ \text{из задатка 3.}}} \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$= x^{x^x} \cdot \left(x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) \quad \square$$

За вежба:

$$* f(x) = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right)^{\arctan^2(x)} \quad f'(x) = ?$$

$$* f(x) = (\arctan x)^x \quad f'(x) = ?$$

5. Наћи тангенту на криву:

$$f(x) = 3x^2 + e^x - x \text{ у тачки } x_0 = 1$$

одредимо: $f(1) = 3 + e^1 - 1 = 2 + e \Rightarrow$ тачка графика је $(1, 2+e) = A$
 $x_0 \quad y_0$

коэф. праве тангенте:

$$f'(x) = 3 \cdot 2x + e^x - 1 = 6x + e^x - 1$$

у тачки A:

$$f'(1) = 6 + e - 1 = \underline{5+e}$$

једначина праве кроз тачку (x_0, y_0) са коэф. k:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$\Rightarrow$ изражена тангента:

$$y - (2+e) = (5+e) \cdot (x - 1)$$

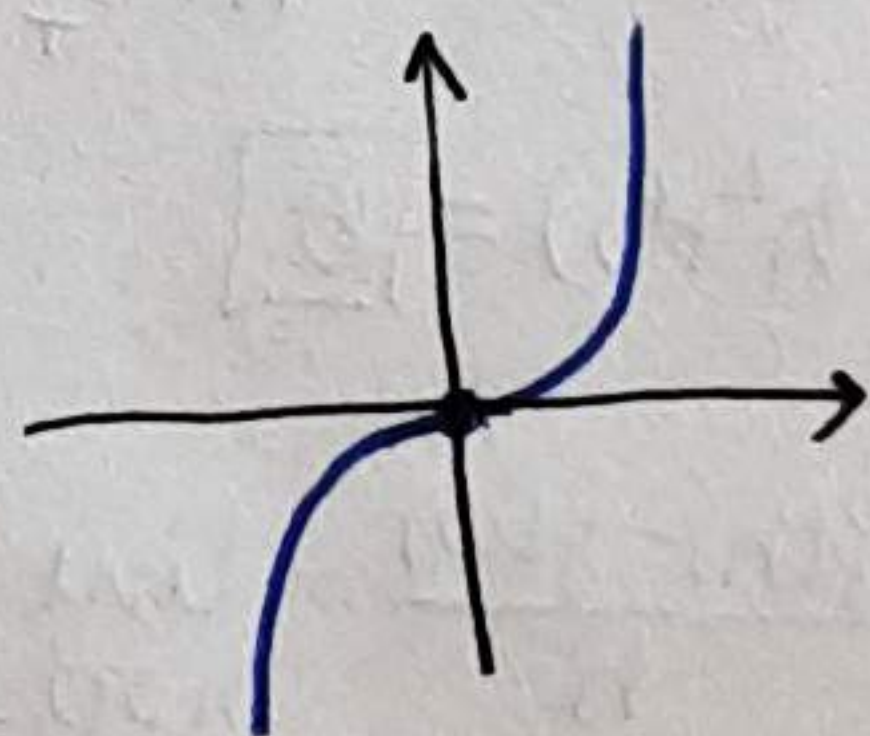
средио: $y = (5+e)x - 5 - e + 2 + e$

$$\boxed{y = (5+e)x - 3}$$

6. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = x \cdot |x|$$

примићемо: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$



прво примићемо да је непреступна на целом $\mathbb{R}$ (неопходан услов) ✓

• за $x \neq 0$ f је диференцијабилна у x :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

• $x = 0$: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 \Rightarrow f$ диференцијабилна у 0

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ диференцијабилна на целом } \mathbb{R}}$$

7. Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da fja f bude diferencijabilna na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-bx} + a, & x < 0 \\ x^3 + bx, & x \geq 0 \end{cases}$$

• прво мора бити непреривна:

за $x \neq 0$: $\checkmark$

за $x=0$: $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^3 + bx = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow f$ непреривна на $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \boxed{a=0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x \cdot e^{-bx} + a = \underset{0}{\lim_{x \rightarrow 0-} x} \cdot \underset{e^0=1}{\lim_{x \rightarrow 0-} e^{-bx}} + a = a$$

• сада диференцијабилност:

за $x \neq 0$: $\checkmark$ за $x < 0$: $f'(x) = e^{-bx} + x \cdot e^{-bx} \cdot (-b)$

за $x > 0$: $f'(x) = 3x^2 + b$

за $x=0$: природно је да рачунамо леву и десну извод:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^3 + bh - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h^2 + b) = \boxed{b}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h \cdot e^{-bh} + a - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} e^{-bh} = \boxed{1}$$

$$\begin{array}{c} x \cdot e^{-bx} + a \quad x^3 + bx \\ \leftarrow \quad \bullet \quad \rightarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ глф. у } 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{b=1} \end{array} \right\}$$

Дакле: $\boxed{a=0, b=1}$ $\square$

8. Истражити диференцијабилност f на домену:

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

Домен: $1 - e^{-x^2} \geq 0$

$$1 \geq e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{T}$$

НЕПРЕКИДНОСТ: непрекидна свуда $\checkmark$

ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ: за $1 - e^{-x^2} \neq 0$ можемо израчунати извод:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \cdot (1 - 1) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = \frac{x \cdot e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$$

$$1 - e^{-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Дакле, за $\underbrace{x \neq 0}$ $f'(x) = \frac{x \cdot e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$ f диференцијабилна у x

за $\underline{x=0}$: $f'(0) = (\text{ако } \exists \text{ лимес}) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - \overset{=0}{f(0)}}{h}$
 $\overset{\text{ако } \exists}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h}$

Пошто h треба да "уђе под корен", разликујемо рачунање левог и десног лимеса $h \rightarrow 0_+$ и $h \rightarrow 0_-$:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h \underset{= \sqrt{h^2}}{=}} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \sqrt{\frac{1 - e^{-h^2}}{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = \boxed{1}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}{h \underset{= -\sqrt{h^2}}{=}} = \lim_{h \rightarrow 0_-} - \sqrt{\frac{1 - e^{-h^2}}{h^2}} = \boxed{-1}$$

иisto као горе

$$\boxed{\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f$ није диференцијабилна у тачки 0

Дакле, f је диференцијабилна на $\boxed{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$ $\square$

9. Испитати диференцијабилност функције:

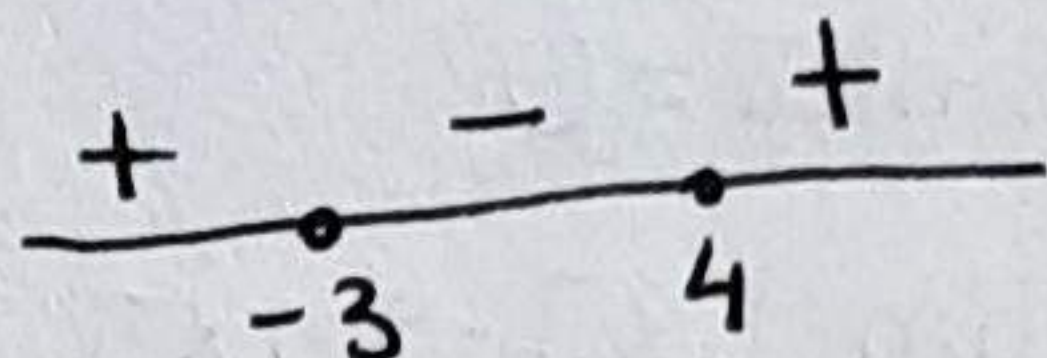
$$f(x) = |x^2 - x - 12| \cdot \cos \frac{x\pi}{2}$$

- f је непрекидна на $\mathbb{R}$ (неопходан услов је испуњен)
- диференцијабилност: „критичне“ су тачке у којима је сва амс. вред. = 0.

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$x_1 = -3, x_2 = 4$$



Дакле, за $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$: $f(x) = (x^2 - x - 12) \cdot \cos \frac{x\pi}{2}$ диференцијабилна као производ две диференц.

$x \in (3, 4)$: $f(x) = -(x^2 - x - 12) \cdot \cos \frac{x\pi}{2}$ —||—

Само проверавамо x_1 и x_2 :

$x_1 = -3$ рачунамо до дефиниције:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|9 - 6h + h^2 - (-3+h) - 12| \cdot \cos \frac{(-3+h)\pi}{2} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-|h^2 - 7h| \cdot \sin \frac{h\pi}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{-|h^2 - 7h|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{h\pi}{2}}{\frac{h\pi}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

$-\sin \frac{h\pi}{2}$ јер $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$

$\Rightarrow \exists$ извод $f'(-3) = 0$, f диференцијабилна у -3 ✓✓

$x_2 = 4$ Поново рачунамо до дефиниције:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|16 + 8h + h^2 - 4 - h - 12| \cdot \cos \frac{(4+h)\pi}{2} - 0}{h} = \cos \frac{h\pi}{2} \text{ јер } \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|7h + h^2| \cdot \cos \frac{h\pi}{2}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|7h + h^2|}{h} \end{aligned}$$

видимо да нам је битан знак од h због скраћивања унутар $| \cdot |$, па рачунамо одвојено као $h \rightarrow 0^+$ и $h \rightarrow 0^-$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|7h + h^2|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} |7 + h| = 7 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|7h + h^2|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -|7 + h| = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(4) = 7 \neq f'_-(4) = -7$$

$\Rightarrow f$ није диференцијабилна у тачки 4

Закључак: f је диференцијабилна на $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ □

10. Истопити неперекидност и диференцијабилност функције

$$f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$$

- НЕПРЕКИДНОСТ
- функција $[x]$ је неперекидна на скупу $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$, и у свим тачкама $x \notin \mathbb{Z}$
 - $\sin \pi x$ је неперекидна на $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ је сигурно неперекидна на $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$ као производ две неперекидне фје

остаје да по дефиницији проверимо неперекидност у целобројним тачкама:

$$|x = k \in \mathbb{Z}| \quad f(k) = k \cdot \sin k\pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \underbrace{[x]}_{k-1} \cdot \underbrace{\sin x\pi}_{\rightarrow \sin k\pi = 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \underbrace{[x]}_k \cdot \underbrace{\sin x\pi}_{\rightarrow \sin k\pi = 0} = 0$$



пошто су $f(k), \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$

једнаки, f је неперекидна у k

за $\forall k \in \mathbb{Z}$, а знамо за $x \notin \mathbb{Z}$ већ

$\Rightarrow f$ је неперекидна на $\mathbb{R}$

ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ: (имамо потребан услов неперекидности)

Поново разликујемо да ли $x \notin \mathbb{Z}$ или $x \in \mathbb{Z}$:

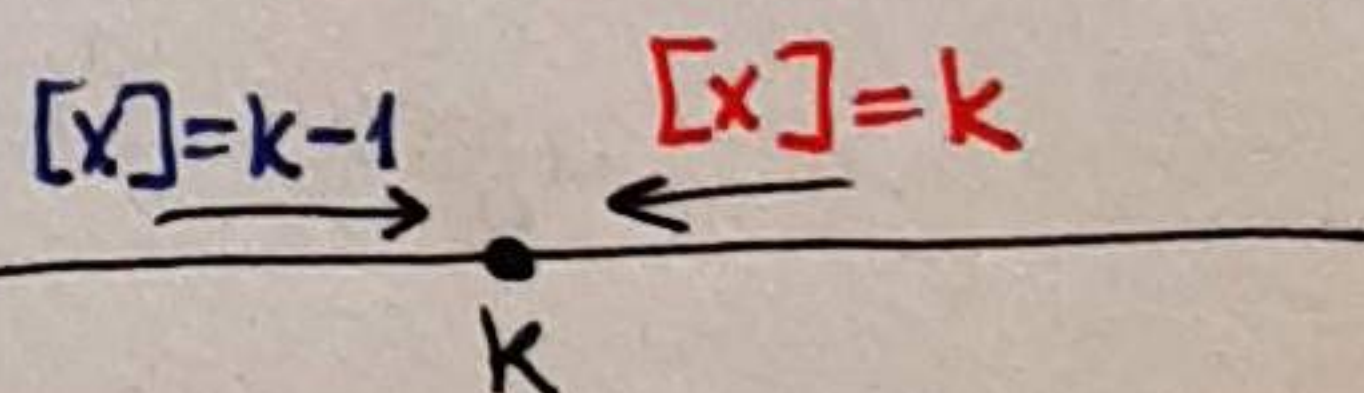
- за $x \notin \mathbb{Z}$ f је диференцијабилна у x јер:

$$x \in (k, k+1) : f(x) = \underbrace{k}_{\text{const на } (k, k+1)} \cdot \sin \pi x \text{ - јер } \sin \pi x \text{ диференцијабилна у } x$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна на $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$

- $x = k \in \mathbb{Z}$: разгледамо десну и леву извод по дефиницији:

$$f'_+(k) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{[k+h]}^k \cdot \sin \pi(k+h) - \underbrace{[k]}_{\text{red circle}} \cdot \underbrace{\sin \pi k}_{\text{red circle}}}{h}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot \sin(\pi k + \pi h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot (-1)^k \cdot \underbrace{\sin \pi h}_{\pi h \rightarrow 1}}{\pi h} \cdot \pi = \underline{k \cdot (-1)^k \cdot \pi}$$

користимо:

$$\sin(\alpha + \pi k) = (-1)^k \cdot \sin \alpha$$

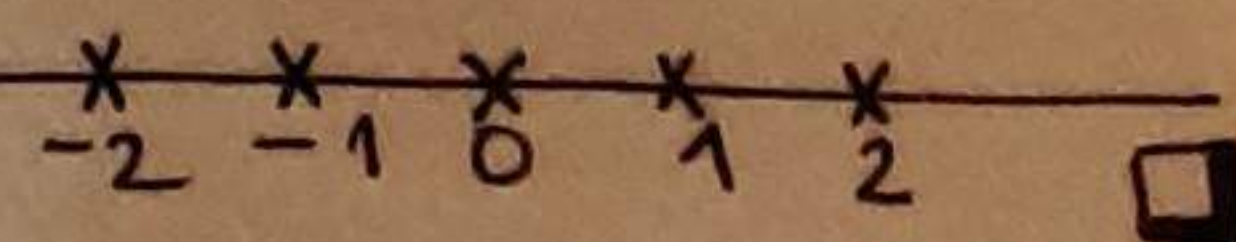
(добива се из адитивне формуле јер $\cos \pi k = (-1)^k$)

$$f'_-(k) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{[k+h]}^{k-1} \cdot \sin(\pi k + \pi h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(k-1) \cdot (-1)^k \cdot \underbrace{\sin \pi h}_{\pi h \rightarrow 1}}{\pi h} \cdot \pi = \underline{(k-1) \cdot (-1)^k \cdot \pi}$$

Пошто $f'_+(k) \neq f'_-(k)$ за свако $k \in \mathbb{Z}$, фја f није диференцијабилна

у целобројним тачкама, већ само на скупу $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$



За венту:

* иллитити диференцијабилити:

$$f(x) = \sin x \cdot |\sin x|$$

(пробано да да знамо што да урадимо јер смо урадили задатке 6. и 10. 😊)

скица доказа:

- ако $\sin x \neq 0$ - јесће гмах ✓ $\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2\sin x \cdot \cos x, & \text{кад } \sin x > 0 \text{ ил. } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi + \pi) \\ -2\sin x \cdot \cos x, & \text{кад } \sin x < 0 \text{ ил. } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi) \end{cases}$
- ако $\sin x = 0$ - по гсф.

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k\pi + h) - \overset{0}{f(k\pi)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{= (-1)^k \cdot \sin h}{\sin(k\pi + h)} \cdot \overset{= |\sin h|}{|\sin(k\pi + h)|}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-1)^k \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{|\sin h|}_{\rightarrow 0} = 0 \quad \begin{matrix} \exists f'(k\pi) \\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$\Rightarrow f$ диференцијабилна на $\mathbb{R}$ Δ