Данас ћемо вежбати разне задатке из досадашњег градива ☺

АНАЛИЗА 1И
Вежбе за
25.3./26.3.

1. Доказати да једначина

$$7x^5-5x^3+3x-2=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad (*)$$

има решење на интервалу $(0,1)$.

$$(*) \iff \underbrace{7x^5-5x^3+3x-2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}_{\text{означимо са } F(x)}=0$$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$F(x)=7x^5-5x^3+3x-2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

F је непрекидна функција на $\mathbb{R}$

Желимо да докажемо да постоји тачка x_0 у којој $F(x_0)=0$.
нађимо две тачке у којима је ф-ја F различитог знака (ако умемо ☺):

$F(0)=-2<0$

$F(1)=7-5+3-2-\sin\frac{\pi}{2}=2>0$

Применимо Болцано-Кошијеву теорему на сегмент $[0,1]$ ($F(0)<0$, $F(1)>0$)
(можемо јер је F непрекидна)

$\Rightarrow \exists x_0\in(0,1)$
$F(x_0)=0$

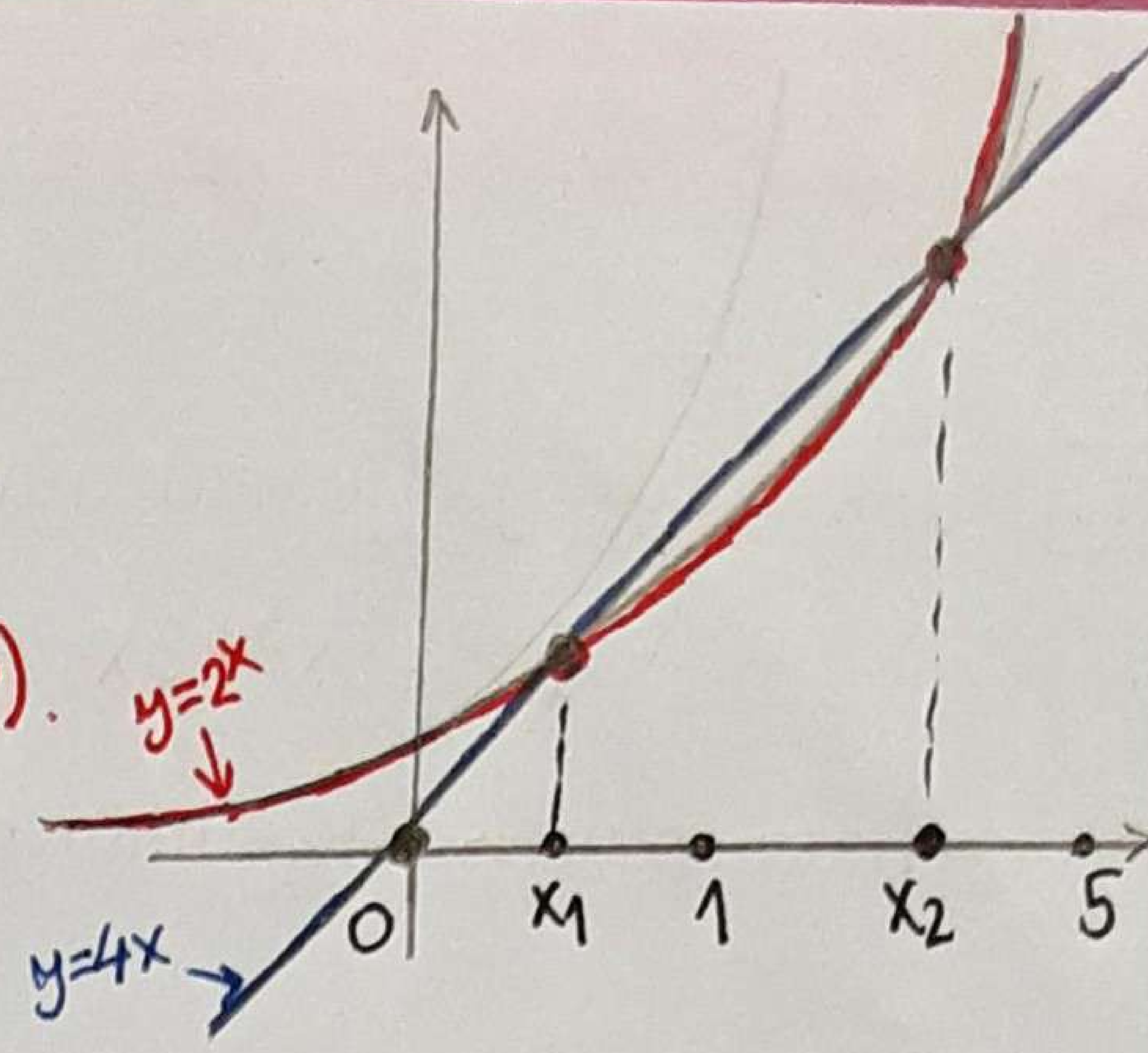
то x_0 је тражено решење. □

☺ напомена: са досадашњим знањем не можемо одредити колико тачно решења $(*)$ има, али ћемо то моћи кад научимо извод и монотоност ф-ја

2. Доказати да једначина

$$2^x = 4x$$

има бар 2 решења на скупу $[0,+\infty)$.



$2^x = 4x \iff 2^x - 4x = 0$

Посматрајмо функцију $F(x) = 2^x - 4x$ на $[0,+\infty)$, F је непрекидна

Приметимо да:

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = 2^0 - 0 = 1 > 0 \\ F(1) = 2^1 - 4 = -2 < 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Болцано-Коши на } [0,1]]{F \text{ непр.}} \boxed{\exists x_1 \in (0,1) \quad F(x_1) = 0}$$

С обзиром на то да $F(1) < 0$, довољно је наћи неко $b > 1$ тд. $F(b) > 0$ и добићемо још једну тачку у којој фја F има вредност 0.

2^x је „много веће" од $4x$ кад x расте, па је лако наћи такво b нпр. $b = 5$: $F(5) = 2^5 - 4 \cdot 5 > 0$

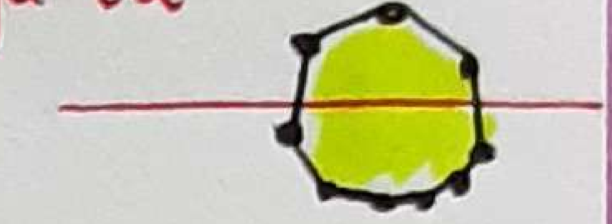
$$\text{Дакле } \left.\begin{array}{l} F(5) > 0 \\ F(1) < 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Болц.-Коши } [1,5]]{} \boxed{\exists x_2 \in (1,5) \quad F(x_2) = 0}$$

Тиме су пронађена та два решења □

☺ лако се види да $F(4) = 0$, тј. 4 је једно решење.

Сада ћемо урадити једну веома интересантну примену Болцано-Кошијеве теореме :).

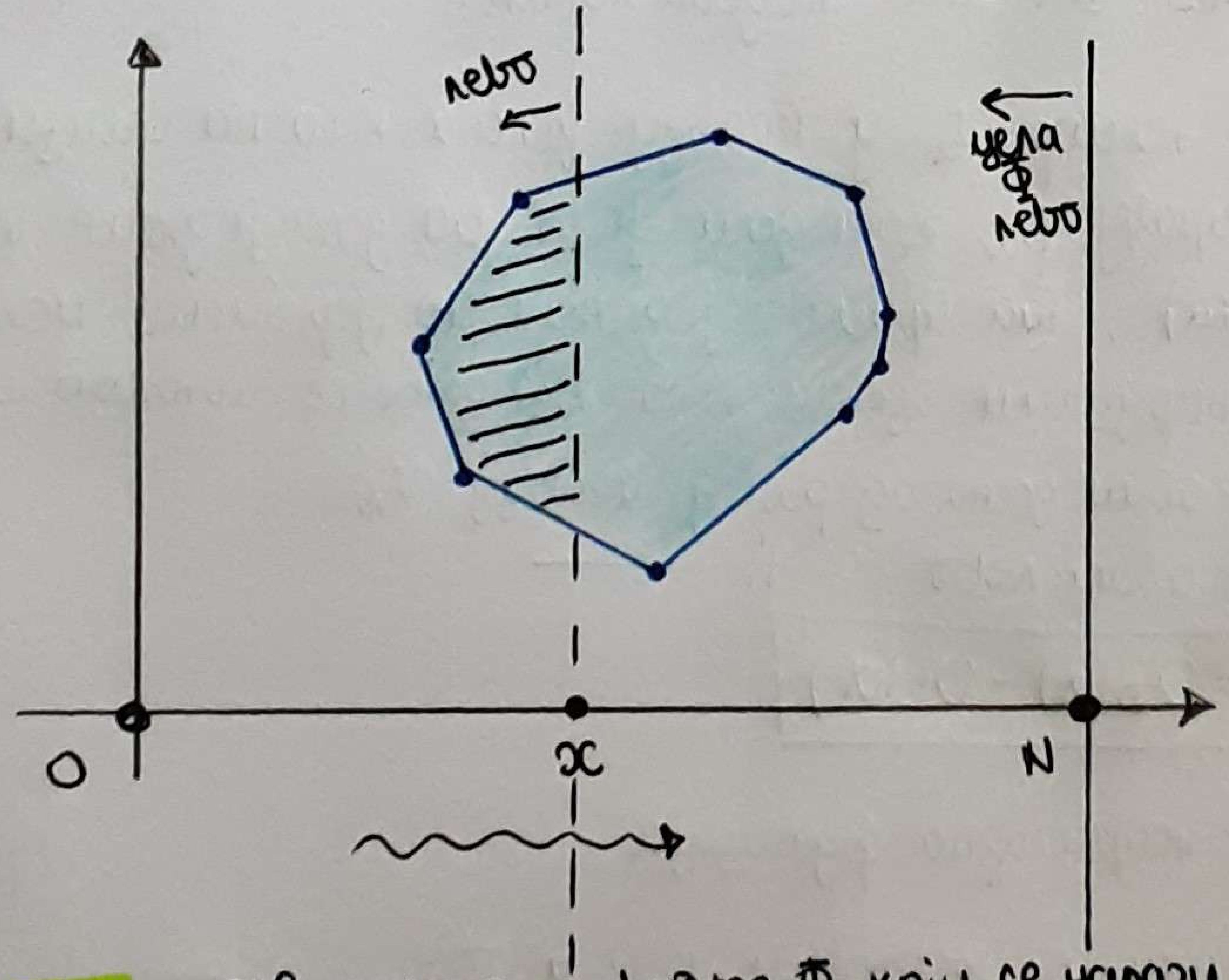
3. Нека је Φ полигон у равни. Доказати да постоји права која га дели на два дела једнаког обима и једнаке површине.



* можемо претпоставити да $P(\Phi) = 1$, без умањења општости.
површина
(ради лакшег рачуна)

* Прво примећивање: за сваки правац у равни (вектор $\vec{v} \neq 0$) $\exists$ права паралелна том правцу која дели Φ на два дела једнаке површине.

ДОКАЗ:
Б.У.О. можемо претпоставити да је $\vec{v}$ вертикалан
тј. тражимо праву ортогоналну на x-осу која „полови" Φ



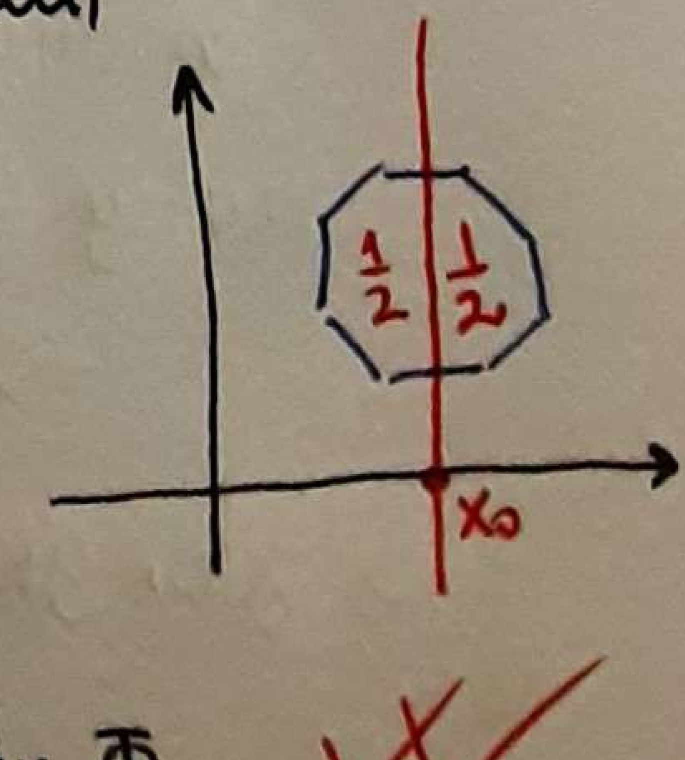
(довољно је доказати за случај када је Φ у првом квадранту) као на слици

Посматрајмо следећу фју f:

$f(x) :=$ површина дела фигуре Φ који се налази лево од нормале у тачки x на x-осу
(осенчени део на слици)

изаберимо N тако да је цела Φ лево од нормале $x=N$
и посматрајмо фју f на сегменту $[0,N]$: $f: [0,N] \to \mathbb{R}$

f је непрекидна (јер малим померањем x, мало се помери права, па се мало промени површина)



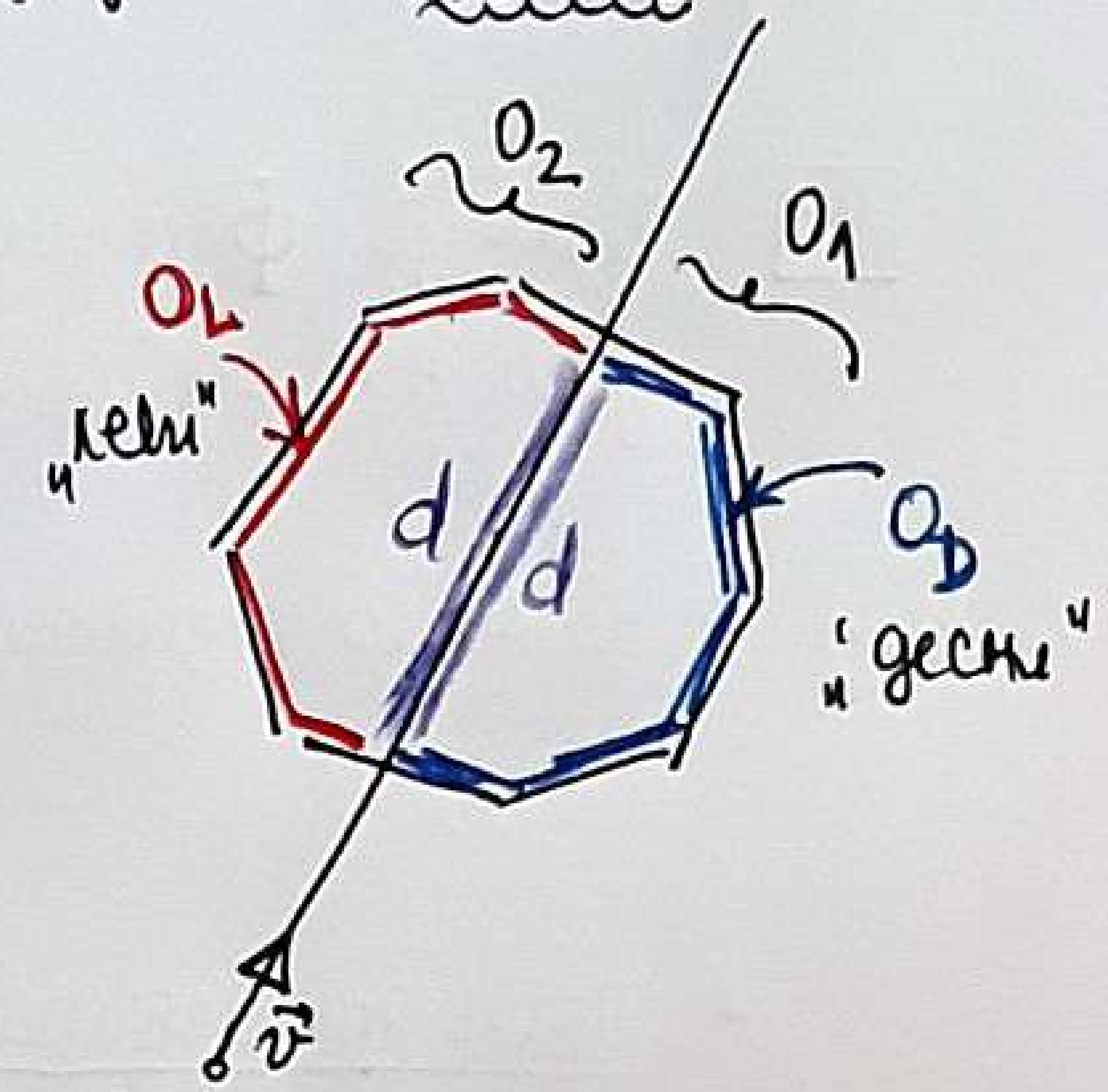
$f(0) = 0$ јер је цела фигура десно

$f(N) = P(\Phi) = 1$

Болцано-Коши $\Rightarrow$ $\exists x_0$ тд. $F(x_0) = \frac{1}{2}$ тј. нормала у x_0 са сваке стране има по $1/2$, тј. полови Φ.
$\frac{1}{2} \in [0,1]$

Дакле, површину фигуре можемо преполовити дуж сваког правца.

Остаје да нађемо правац у ком имамо и делове једнаког обима



* Друго: Приметимо да када посматрамо обиме делова на које права дели Φ, O_1 и O_2 они се састоје од дела обима Φ, и једне заједничке дужи d:

$$O_1 = O_D + d$$
$$O_2 = O_L + d$$

па $O_1 = O_2 \iff O_D = O_L$

па је довољно постићи да $O_D = O_L$

* Треће запажање: Још једном користимо Болцано-Кошијеву теорему да бисмо имали и једнаке обиме

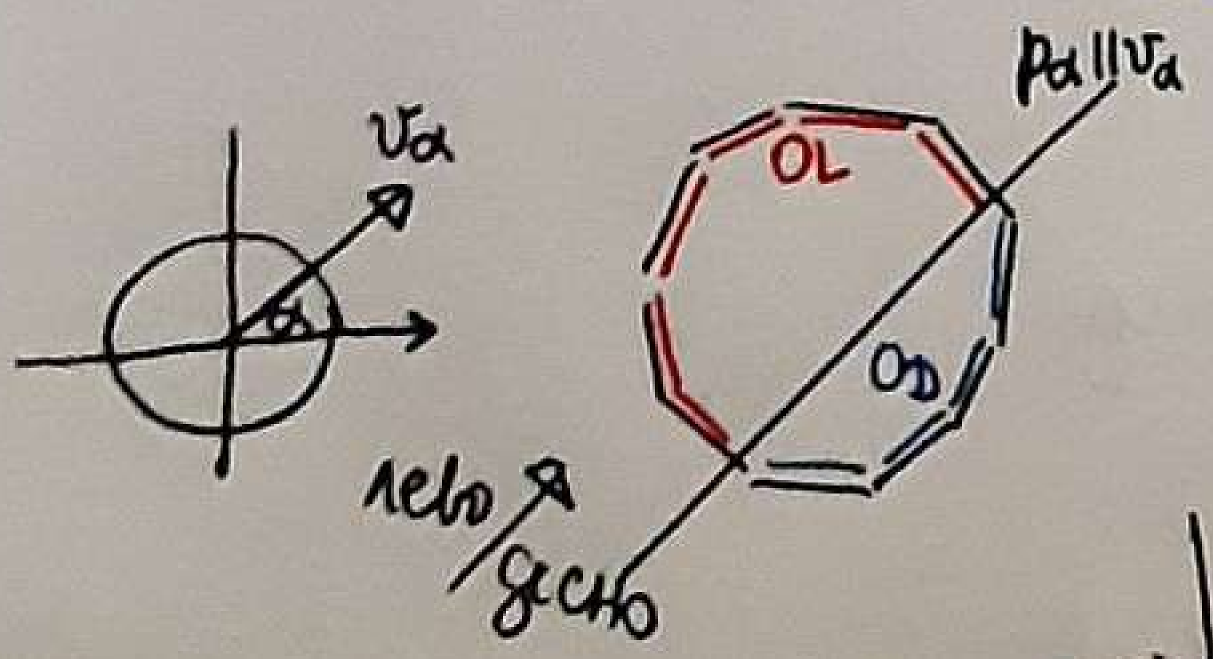
Дефинишемо ф-ју $g: [0,\pi] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$\alpha \in [0,\pi]$ → посматрамо вектор v_α у правцу угла α као на слици и уочимо праву p_α која дели Φ на два дела једнаке површине (из првог дела); та права је јединствена (јер бисмо малим померањем нарушили однос делова, а однос се монотоно мења)

нека $O_D(\alpha)$ = обим десно од p_α у правцу v_α

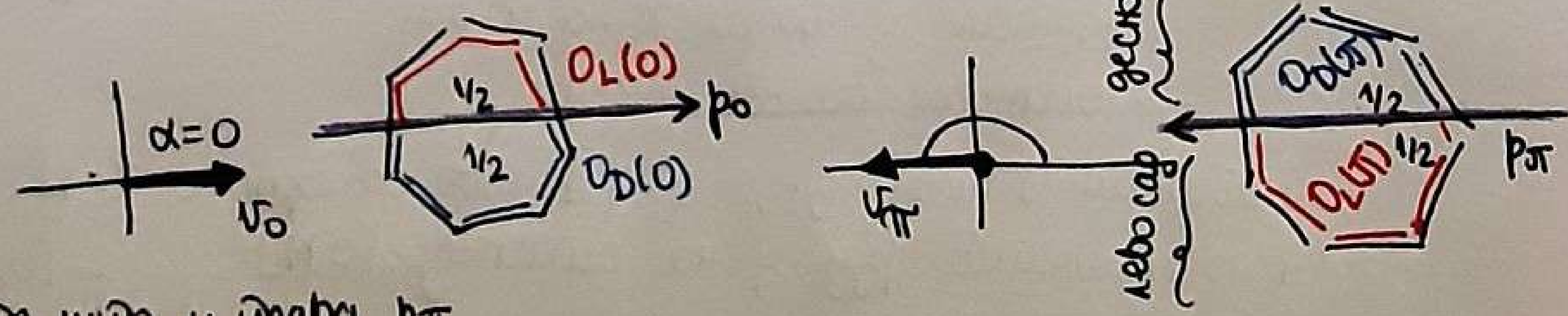
$O_L(\alpha)$ = обим лево — || —

и $\boxed{g(\alpha) := O_D(\alpha) - O_L(\alpha)}$



g је непрекидна функција

Погледајмо вредности у 0 и π:



☺! права p_0 је исто што и права p_π јер само једна хоризонтална права полови површину!

али су десно и лево „замениле места" тј. $O_D(\pi) = O_L(0)$, $O_L(\pi) = O_D(0)$!

$$\Rightarrow g(0) = O_D(0) - O_L(0) = O_L(\pi) - O_D(\pi) = -g(\pi)$$

$\Rightarrow g(0)\cdot g(\pi) \le 0 \overset{\text{Б.К.}}{\Longrightarrow} \exists \alpha_0$, т.д. $g(\alpha_0) = 0$ тј. $O_D(\alpha_0) = O_L(\alpha_0)$,

тј. p_{α_0} полови и површину и обим Φ ✓ □

$\boxed{4.}$ Одредити домен функције

$$f(x) = ctg(2x) \cdot \frac{\arcsin(\log_{10}(x+1))}{x^2-1} + \sqrt[6]{2x^2-3x-2}$$

- дељење са x^2-1: $\boxed{x \neq \pm 1}$
- $\log_{10}(x+1)$: $x+1>0$ $\boxed{x>-1}$
- $\arcsin(\log_{10}(x+1))$:

$$-1 \leq \log_{10}(x+1) \leq 1 \quad / 10^{\sqcup}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq x+1 \leq 10$$

$$\boxed{x \in \left[-\frac{9}{10}, 9\right]}$$

- $ctg\, 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$: $\sin 2x \neq 0$

$$2x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}}$$

- $\sqrt[6]{2x^2-3x-2}$: 6 је паран број, па је овај корен дефинисан само за

$$\underbrace{2x^2-3x-2}_{\underset{(2x+1)(x-2)}{=}} \geq 0$$

$+ \quad -\frac{1}{2} \quad - \quad 2 \quad +$

$$\boxed{x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)}$$

Пресек услова које смо добили:

$$D_f = \left(\left[-\frac{9}{10}, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, 9]\right) \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

погледамо које тачно елементе избацујемо:

$$\dots, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{9}{10}, \quad 0 > -\frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < 2, \quad \pi > 2, \quad \frac{5\pi}{2} < 9, \quad 3\pi > 9$$

$$\Rightarrow \boxed{D_f = \left(\left[-\frac{9}{10}, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, 9]\right) \setminus \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}}$$

□

$\boxed{5.}$ Ако је $f(x) = (1-(\cos x)^2) \cdot \sqrt[3]{x}$, а $g(x) = x^2$, доказати да је $f = o(g)$, кад $x \to 0$.

доказаћемо:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{па} \Rightarrow f = o(g),\ x \to 0$$

рачунамо:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-(\cos x)^2) \cdot \sqrt[3]{x}}{x^2}$$

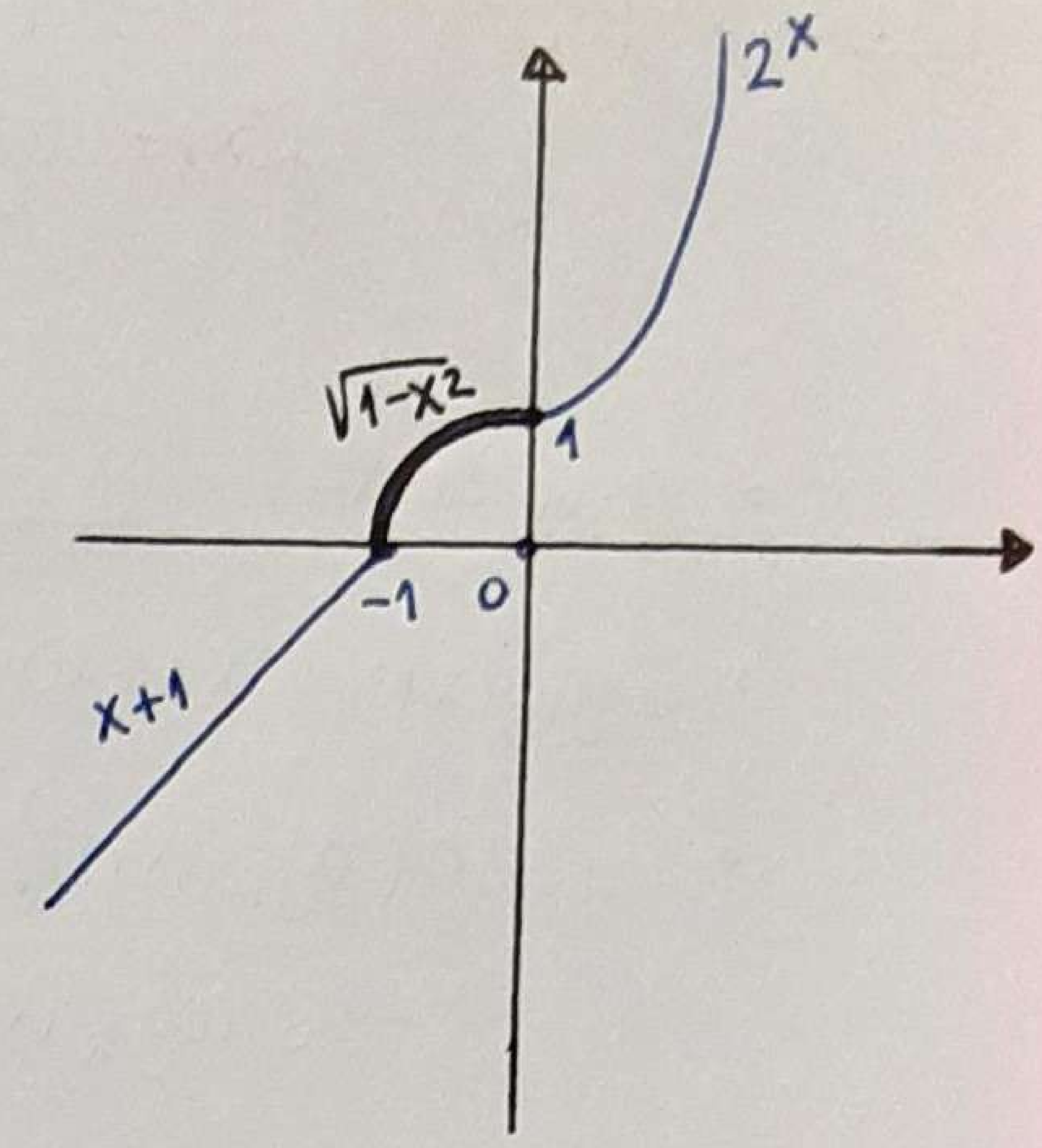
$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1^2} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

✓ □

$\boxed{6.}$ Наћи инверзну функцију следеће функције (ако $\exists$)

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0 \\ 2^x, & x\geq 0 \end{cases}$$



* за вежбу можете формално доказати да је бијекција
овде то „видимо" са графика: НА ✓
1-1 ✓

$x \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y=f(x)$

* како тражимо инверзну?

нека је ф-ја $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ инверзна функцији f: $g(\underbrace{f(x)}_{y})=x, \ \forall x\in\mathbb{R}$

посматрамо „делове" дефиниције f:

$x \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y=f(x)$

$\boxed{x\leq -1}$ $f(x)=x+1$

$y=f(x)$ које вредности узима y?

$x\in(-\infty,-1] \xrightarrow{+1} \boxed{y\in(-\infty,0]}$ узима све те вредности

$g(y)=x, \ y=x+1$

$\Rightarrow x=y-1$

$\Rightarrow \boxed{g(y)=y-1}$ за $y\in(-\infty,0]$

$\boxed{x\in(-1,0)}$ $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$

y тачно узима вредности $(0,1)$ (све те вредности!)

Дакле, за $\boxed{y\in(0,1)}$ $g(y)=x$

$y=\sqrt{1-x^2}$ – решавамо по x

$y^2=1-x^2$

$x^2=1-y^2$

$x<0$ овде $\Rightarrow x=-\sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow \boxed{g(y)=-\sqrt{1-y^2}}$ за $y\in(0,1)$

$\boxed{x\in[0,+\infty)}$ $y=f(x)=2^x$ узима све вредности $\geq 2^0=1$

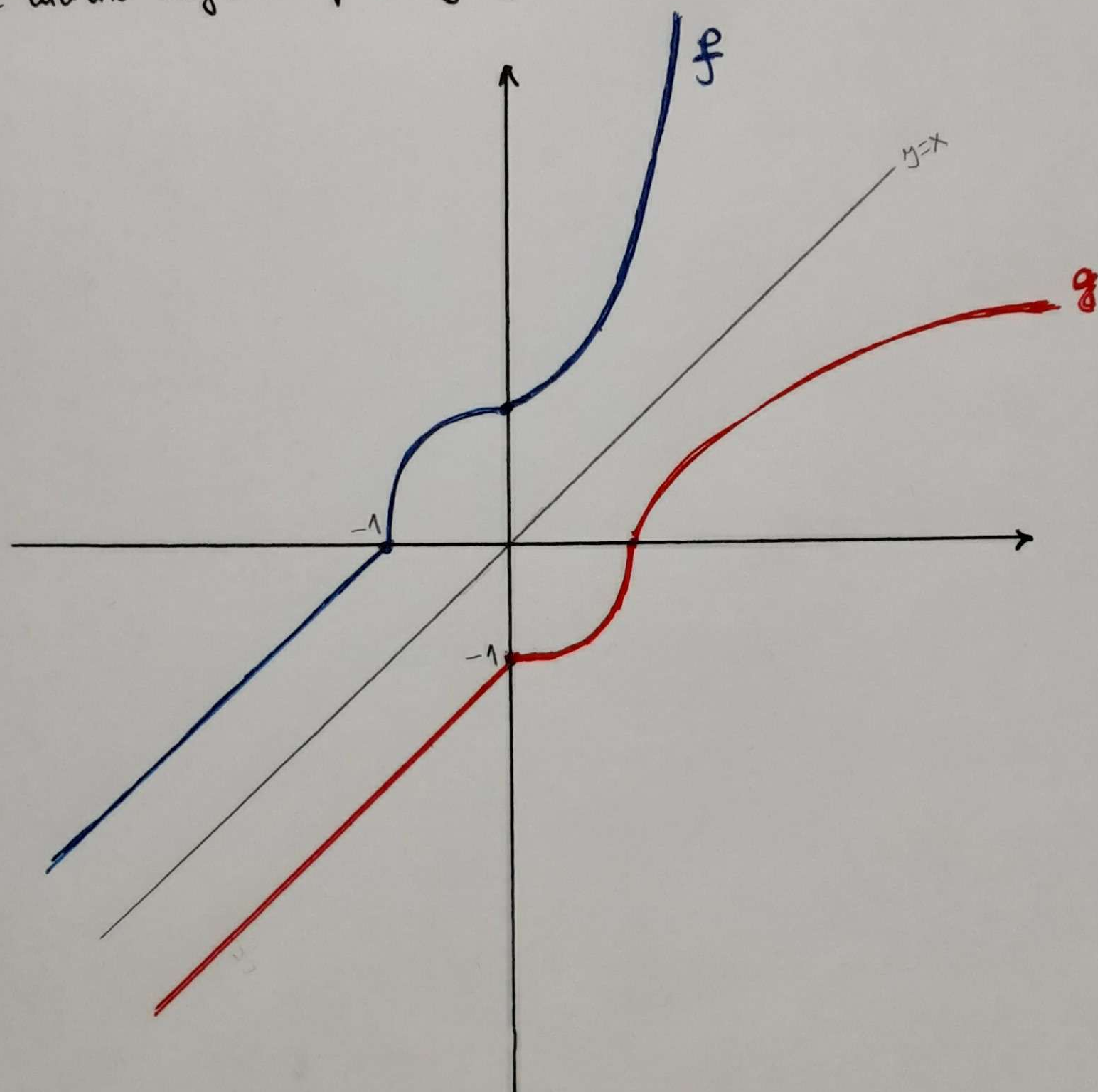
Дакле, за $\boxed{y\in[1,+\infty)}$: $g(y)=x \quad y=2^x \Rightarrow x=\log_2 y$

$\Rightarrow \boxed{g(y)=\log_2 x}$

Све заједно: фја g инверзна фји f има облик

$$g(y)=\begin{cases} y-1, & \text{за } y\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{1-y^2}, & \text{за } y\in(0,1) \\ \log_2 y, & \text{за } y\in[1,+\infty) \end{cases}$$

што се тачно види на графику ☺



7. Наћи sup, inf, min и max следећих скупова (ако $\exists$):

(а) $A=\left\{\frac{m}{n}+\frac{n}{k}+\frac{k}{m} \mid m,n,k\in\mathbb{N}\right\}$

(б) $B=\left\{\frac{m}{|m|+n} \mid m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$

(а) <u>доње ограничење:</u> сетимо се неједнакости аритметичке и геом. средине за 3 броја:

$$a,b,c>0: \quad \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$$

овде је то погодно применити „јер се све скрати":

$$\frac{\frac{m}{n}+\frac{n}{k}+\frac{k}{m}}{3}\geq\sqrt[3]{\cancel{\frac{m}{n}}\cdot\cancel{\frac{n}{k}}\cdot\cancel{\frac{k}{m}}}=1$$

$\Rightarrow \frac{m}{n}+\frac{n}{k}+\frac{k}{m}\geq 3$ – сви елементи скупа A су ≥ 3

$3\in A$ јер за $m=n=k$ $\frac{m}{m}+\frac{m}{m}+\frac{m}{m}=3$

$\Rightarrow \boxed{3=\min A}$ па $\boxed{3=\inf A}$

<u>горње ограничење:</u> не постоји (A није ограничен одозго)

нпр. $N\in\mathbb{N}$ произв. $\underbrace{\frac{N}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{N}}_{>N}\in A$

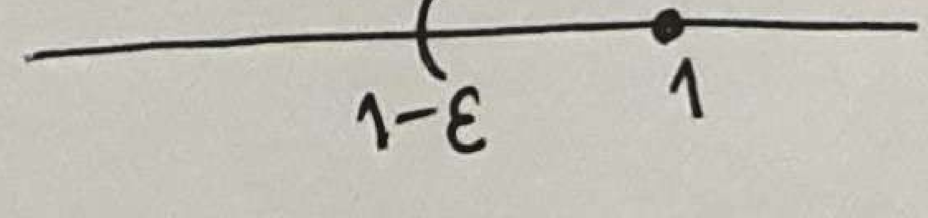
$\Rightarrow \boxed{\neg\exists \sup A, \neg\exists \max A}$

(б) $B: \frac{m}{|m|+n}$ $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$

<u>горње ограничење:</u> довољно је гледати позитивне, тј. $m>0$

$$\frac{m}{|m|+n}\overset{m>0}{=}\frac{m}{m+n}<1 \quad ⊛$$

докажимо да је $\boxed{1=\sup B}$



1° 1 јесте горње ограничење (⊛)

2° $\varepsilon>0$? m_0,n_0 тд. $\frac{m_0}{|m_0|+n_0}>1-\varepsilon$

узмимо $n_0=1$, $m_0>0$: $\underbrace{\frac{m_0}{m_0+1}}_{1-\frac{1}{m_0+1}}>1-\varepsilon \iff \frac{1}{m_0+1}<\varepsilon$

такво m_0 постоји ✓

(било које $m_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$)

$\Rightarrow \boxed{1 = \sup B}$ $\quad 1 \notin B \Rightarrow \boxed{\neg\exists \max B}$

доње ограничење: слично, само гледамо $m<0$

$m<0: \ m = -m_1, \ m_1 > 0$

$$\frac{m}{|m|+n} = \frac{-m_1}{m_1+n} = -\Big(\underbrace{\frac{m_1}{m_1+n}}\Big)$$

видели смо да је sup
ових елемената $= 1$

па како $\inf(-X) = -\sup(X)$
важи за сваки скуп X

$\Rightarrow \boxed{\inf B = -1}$

$-1 \notin B \Rightarrow \boxed{\neg\exists \min B}$
(сви су >-1) $\square$

$\boxed{8.}$ За све $x>-1$, $x \neq 0$ дефинисана је фја

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

Да ли се може додефинисати у тачки $x=0$ тд. f буде непр. у 0?

Ако може да се додефинише, онда је

$$f(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ако } \exists \\ \text{лимес}}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{x}{(1+x)^{1/3}-1}}_{\to \frac{1}{1/3}=3} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ може ✓

$f(0) = 3/2$ $\square$