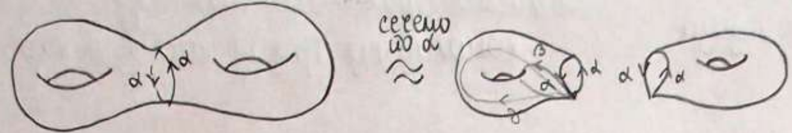
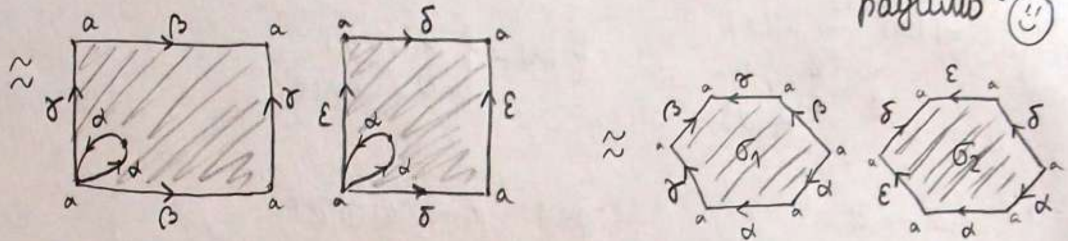
2 Дат је простор X: 

Одредити хомолошке групе простора X и испитати да ли је кружница α ретракт од X.

X: 

Желимо декомпозицију у равни, то увек радимо 🙂



0-ћелија: a

1-ћелије: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$

2-ћелије: σ_1, σ_2

$$\dots \to 0 \to \mathbb{Z}\langle\sigma_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\sigma_2\rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}\langle\varepsilon\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle \to 0$$ - ћелијски ланчасти комплекс

- $d_1(\alpha)=a-a=0, \dots, d_1(\varepsilon)=a-a=0$

  $\Rightarrow \boxed{d_1=0}$

🙂 Код путно повезаног увек можемо да претпоставимо да имамо 1 нула-ћелију

b — a — скупимо у тачку; не мења се хомотопски тип па се не мења ни хомологија

Тако смо радили и код фундаменталне групе

$d_1=0 \Rightarrow \boxed{H_0(X)\cong \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z}}$ - а да је $H_0\cong\mathbb{Z}$ знали смо и одмах јер је путно повезан. али свакако нам d_1 треба и због H_1 🙂

- $d_2(\sigma_1) = -2\alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma = -2\alpha$

  $d_2(\sigma_2) \overset{\text{сл.}}{\cong} -2\alpha$

  $\Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle$

  $$H_1(X) = \ker d_1/\operatorname{im} d_2 = \frac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle\beta\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle\gamma\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle\delta\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle\varepsilon\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle} \cong \boxed{\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^4}$$

- $H_2(X)\cong \ker d_2$

  $d_2(\lambda\sigma_1+\mu\sigma_2)=0 \iff \lambda \underbrace{d_2(\sigma_1)}_{-2\alpha} + \mu\underbrace{d_2(\sigma_2)}_{-2\alpha}=0 \iff -2(\lambda+\mu)\alpha=0 \iff \lambda+\mu=0$

  $\mu=-\lambda$

  $\Rightarrow \ker d_2 = \{\lambda(\sigma_1-\sigma_2) \mid \lambda\in\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}\langle\sigma_1-\sigma_2\rangle\cong\mathbb{Z}$

  $\Rightarrow \boxed{H_2(X)\cong\mathbb{Z}}$

- $H_k(X)\cong 0, \quad k\geq 3$

Да ли је α ретракт од X ?

пп. α ретракт од X

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "1"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \alpha \end{tikzcd}$$ r - ретракција

Можемо применити било коју хомолошку групу као функтор.

$$\begin{tikzcd} H_i(\alpha) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_i(X) \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & H_i(\alpha) \end{tikzcd}$$

$$H_i(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0,1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$i=0$: $$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$ може...

$i=1$: $$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "1"'] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4 \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$ и ово може...

шта ћемо сад ☹ ?

Задатак са часа: показали смо да важи:

А-ретракт од X $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ важи: $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X,A)$

ово смо доказали у сингуларној хомологији, али важи и у ћелијској

пп. α-ретр. од X

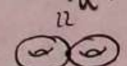
$n=1$: $H_1(X) \cong H_1(\alpha) \oplus H_1(X,\alpha)$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{Z} \oplus H_1(X,\alpha)$

- за CW-пар $(\underset{\text{комп.}}{X}, \underset{\text{поткомп.}}{A})$ важе услови да је A затворен и јаки деф. ретр. од неког V...

☺ (X,A) CW-пар $\Rightarrow$ $H_n(X,A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$

$H_1(X,\alpha) \cong \tilde{H}_1(X/\alpha) \cong \tilde{H}_1(T^2 \vee T^2) \cong \tilde{H}_1(T^2) \oplus \tilde{H}_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}^4$



$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4$ ↯

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha \text{ - није ретракт од } X}$

II начин: пп. $r: X \to \alpha$ ретракција $\quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z}_2([\alpha]) \oplus \mathbb{Z}^4$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "1"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \alpha \end{tikzcd} \xrightarrow{H_1} \begin{tikzcd} \underset{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle}{H_1(\alpha)} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_1(X) \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \underset{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle}{H_1(\alpha)} \end{tikzcd}$$

$\alpha \mapsto \alpha$

при i_* α иде у α тј. класа α у класу α

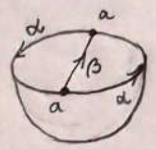
Али у $H_1(X)$ α је реда 2, па $r_*(\alpha) = 0$ (јер $r_*: H_1(X) \to \underset{\text{нема ел. реда од 2}}{\mathbb{Z}}$ ☺)

а то је у са ↻

3 X - сфера S^2 са једним пречником и још се идентификују антиподалне тачке сфере. X: 

одредити $H_k(X)$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Да ли је пречник са наслеђеном идентификацијом ретракт или деф. ретракт овог простора? Да ли овај простор има СФТ?

компактан подскуп који сече све класе: $X \approx$  - разбијамо на ћелије (CW-декомпозиција)

X^0: $\cdot a$

X^1: 

X^2:  $= X$

ланчасти комплекс:

$$0\to \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle\beta\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle\to 0$$

$d_1(\alpha)=d_1(\beta)=a-a=0 \Rightarrow \boxed{d_1=0} \Rightarrow H_0(X)\cong\mathbb{Z}$ (или из путне повезаности боље)

$d_2(\sigma)=2\alpha$

$$H_1(X)\cong \ker d_1/_{\operatorname{im} d_2} \cong \frac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle\beta\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle} \cong \mathbb{Z}_2\langle[\alpha]\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle[\beta]\rangle\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$$

$H_2(X)\cong \ker d_2 = 0$

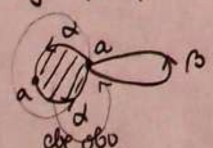
$\Rightarrow H_n(X)\cong 0,\ n\geq 2$

$$\Rightarrow \boxed{H_k(X)\cong} \begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}, & k=1\\ 0, & k\geq 2\end{cases}$$

Можемо видети и лакше:

$\boxed{X\approx \mathbb{R}P^2\vee S^1}$ и користити хомологију букета (редуковану: $\tilde{H}_n(X\vee Y)\cong\tilde{H}_n(X)\oplus\tilde{H}_n(Y)$, $n\in\mathbb{N}_0$) и познате хомол. $\mathbb{R}P^2$ и S^1 лако добијамо $H_k(X)$.

• Да ли је β ретракт од X?

X: 

све ово иде у a

јесте! цео „леви" део сликамо у a:

$$r: X\to\beta \quad r(x)=\begin{cases} x, & x\in\beta\\ a, & x\in\underbrace{(X\setminus\beta)}_{\text{није затв.}}\cup\{a\}\end{cases}$$

сад је затв.

r је непр. по т. о лепљењу ... ⇒ ретракција ✓

☺ генерално, увек ∃ ретракција

$$X\vee Y\xrightarrow{r} Y$$

• Да ли је β деформациони ретракт?

пп. јесте $\Rightarrow X\simeq\beta \Rightarrow H_1(X)\cong H_1(\beta)$

$H_1(X)\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$, $H_1(\beta)\cong\mathbb{Z}$ ↯ ⇒ није деф. ретракт!

СФТ? пп. X има СФТ $\Rightarrow$ $\forall$ ретракт има СФТ

Но $\beta \approx S^1$ нема СФТ $\Rightarrow$ $\boxed{X \text{ нема СФТ}}$

или:

$A \vee B$ има СФТ $\Leftrightarrow$ A има СФТ и B има СФТ

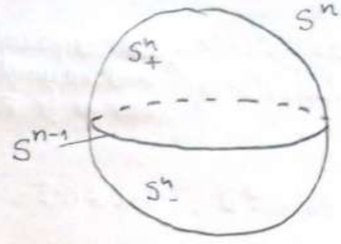
$\mathbb{R}P^2$ има СФТ, S^1 нема СФТ $\Rightarrow$ X нема СФТ $\square$

парна дим,
зад. са верни :)

4 $S^{n-1} = \{x\in S^n \mid x_{n+1}=0\}$ - посматрамо екваторијалну сферу

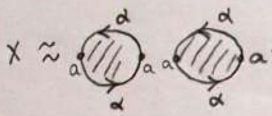
$X := S^n/_{x\sim -x,\ x\in S^{n-1}}$

$S^n_+ = \{x\in S^n \mid x_{n+1}\geq 0\}$



$H_k(X) = ?,\ k\geq 0$

да ли је $S^n_+/_\sim$ ретракт или деф ретракт од X?

за $n=2$: $X \approx$  - имамо ћелијску декомпозицију за $n=2$

$S^n_+ \approx D^n$

$S^n_+/_\sim = S^n_+/_{x\sim -x,\, x\in S^{n-1}} \approx D^n/_{x\sim -x,\, x\in S^{n-1}} \approx \mathbb{RP}^n$

$S^n_-/_\sim \approx \mathbb{RP}^n$ - слично

$\mathbb{RP}^n = e^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$ - лепи се e^n на $\mathbb{RP}^{n-1}$

а X добијемо тако што још једну n-ћелију залепимо по истом правилу како се овде e^n лепи на $\mathbb{RP}^{n-1}$

$X = e^0\cup e^1\cup\dots\cup e^{n-1}\cup e^n_1\cup e^n_2$

ту се види како су залепљене

$d_n(e^n) = (1+(-1)^n)\,e^{n-1}$ $\rightarrow 2,\ 2\mid n$; $\rightarrow 0,\ 2\nmid n$

ЛАНЧАСТИ КОМПЛЕКС: $0\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to\dots\to\mathbb{Z}\to 0$

1) $2\mid n$: $0\to \mathbb{Z}\langle e^n_1\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle e^n_2\rangle \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}\langle e^{n-1}\rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^{n-2}\rangle \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^2\rangle \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$

на сваког дејствује као за $\mathbb{RP}^n$ — све исто као за $\mathbb{RP}^n$

$d_n(e_1^n) = 2e^{n-1}$

$d_n(e_2^n) = 2e^{n-1}$

као за $\mathbb{RP}^n$ знамо: $H_0(X)\cong\mathbb{Z}$; $1\leq k\leq n-2$: $H_k(X)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & 2\nmid k\\ 0, & 2\mid k\end{cases}$

H_{n-1}: $H_{n-1}(X)\cong \mathbb{Z}\langle e^{n-1}\rangle/_{\mathbb{Z}\langle 2e^{n-1}\rangle}\cong\mathbb{Z}_2$

H_n: $H_n(X)\cong \ker d_n\cong\mathbb{Z}\langle e_1^n-e_2^n\rangle\cong\mathbb{Z}$

$d_n(\lambda e_1^n+\mu e_2^n)=0 \quad \lambda,\mu\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)2e^{n-1}=0$

$\Leftrightarrow \lambda+\mu=0 \Leftrightarrow \mu=-\lambda$

$\Rightarrow$ произв. ел. језгра је $\lambda\cdot(e_1^n-e_2^n)$

и још $H_k(X)\cong 0$ за $k\geq n+1$

2) $2 \nmid n$ $\quad 0 \to \mathbb{Z}\langle e_1^n\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle e_2^n\rangle \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}\langle e^{n-1}\rangle \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\langle e^{n-2}\rangle \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^2\rangle \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$

$d_n(e_1^n) = 0$, $d_n(e_2^n) = 0$ — оба генератора се понашају као да је $\mathbb{R}P^n$ $\Rightarrow d_n = 0$

$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$; $\quad 1 \leq k \leq n-2 \quad H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & 2 \nmid k \\ 0, & 2 \mid k \end{cases}$

$H_{n-1}(X) \cong \underbrace{\ker(\times 2)}_{=0} / \underbrace{\operatorname{im} d_n}_{=0} = 0$

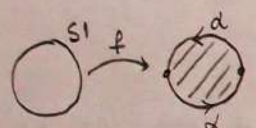
$H_n(X) \cong \ker d_n = \mathbb{Z}^2$

$H_k(X) \cong 0, \; k \geq n+1$

ДРУГИ НАЧИН да се ово уради:

$X = D^n \cup_f \mathbb{R}P^n \quad f : \underbrace{S^{n-1}}_{\text{граница од } D^n} \to \mathbb{R}P^n$

$\Rightarrow X = D^n \cup_f \mathbb{R}P^n \simeq C_f$ – конус пресликавања



f може да се прошири на диск

што значи да је f хомотопски тривијално тј. $f \simeq const$ (*)

$const : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$

важи: $f \simeq g \Rightarrow C_f \simeq C_g$

$X = D^n \cup_f \mathbb{R}P^n \simeq C_f \overset{(*)}{\simeq} C_{const} \simeq \overset{SS^{n-1}}{\overset{\shortparallel}{S^n}} \vee \mathbb{R}P^n$

важи: $const : X \to Y$

$\Rightarrow C_{const} \simeq SX \vee Y$

конус константног

$\Rightarrow H_k(X) \cong H_k(S^n \vee \mathbb{R}P^n)$ ☺

Да ли је $S^n_+/_\sim$ ретракт? деф. ретракт?

ретракт јесте – само пројектујемо:

$r([x]) = \begin{cases} [x], & x \in S^n_+ \\ [-x], & x \in S^n_- \end{cases} \quad x \in S^n$

r је ретракција ✓

пп. $S^n_+/_\sim$ деф. ретракт од $X \Rightarrow S^n_+/_\sim \simeq X$

$\Rightarrow H_n(\underbrace{S^n_+/_\sim}_{\approx \mathbb{R}P^n}) \cong H_n(X)$

$H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & 2 \nmid n \\ 0, & 2 \mid n \end{cases} \qquad H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & 2 \nmid n \\ \mathbb{Z}, & 2 \mid n \end{cases}$ ↯

$\Rightarrow$ није деф. ретракт!