

~ Келијски комплекси и Келијска хомологија ~

са предавања (неформално :))

CW-комплекс је топ. простор X са низом потпростора

$$\emptyset \subset X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset X$$

заданим скуновима n-келја: $e_\alpha^n, \alpha \in I_n, n=0,1,2,\dots$

и заданим фрјаша келберга: $f_\alpha^n: \underbrace{S_\alpha^{n-1}}_{\partial e_\alpha^n} \rightarrow X^{(n-1)}, \alpha \in I_n, n \in \mathbb{N}_0$

шг. важи:

$$\textcircled{1} X^{(0)} = \bigsqcup_{\alpha \in I_0} e_\alpha^0 \neq \emptyset$$

$$\textcircled{2} X^{(n)} = \bigsqcup_{\alpha \in I_n} D_\alpha^n \cup \bigsqcup_{\alpha \in I_n} f_\alpha^n X^{(n-1)}$$

$\textcircled{3} e_\alpha^n$ су сличне унутрашњости дискова D_α^n , за све n , све $\alpha \in I_n$ и називају се (отворени) n-келја

$\textcircled{4} X = \bigcup_n X^{(n)}$ и имају исту топологију:

$F \subset X$ затворен $\Leftrightarrow F \cap X^{(n)}$ затворен у $X^{(n)}, \forall n$

Пример

• $X^{(0)}$

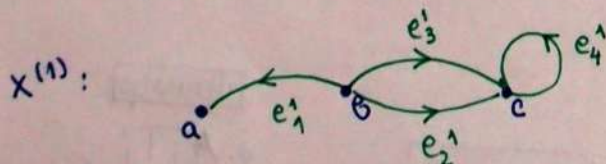
$a \quad b \quad c$

• $X^{(1)}$

4 1-келје добијемо фрјаша келберга

$$p_i: S^0 \rightarrow X^{(0)} \quad i=1,\dots,4$$

$$p_1: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad p_2: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad p_3: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad p_4: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & c \end{pmatrix}$$



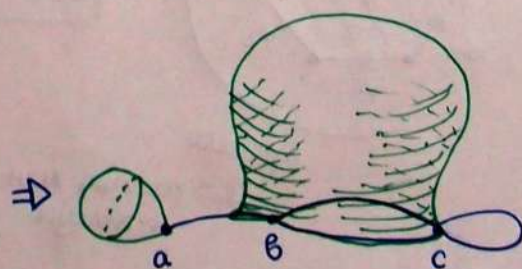
• $X^{(2)}$

2 2-келје

фрје келберга:

$$S_1^1 \xrightarrow{p_1^2} a$$

$$S_2^1 \xrightarrow{p_2^2} \text{arc from } a \text{ to } c$$



ХОМОЛОГИЈА

$$C^{cw}(X): \dots \rightarrow C_n^{cw}(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}^{cw}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_0^{cw}(X) \rightarrow 0$$

$$C_n^{cw}(X) = \bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z} \langle e_\alpha^n \rangle$$

- генерисана скудом свих n -келуја

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in I_{n-1}} \lambda_{\alpha, \beta} e_\beta^{n-1}$$

где је $\lambda_{\alpha, \beta} = \deg(q_\beta \circ f_\alpha^n)$ за $\alpha \in I_n, \beta \in I_{n-1}$

$$S^{n-1} \xrightarrow{f_\alpha^n} X^{(n-1)} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1}$$

дја пелуења

копичико дресел. које скута $X^{(n-1)} \setminus e_\beta^{n-1} \rightarrow$ мачку z .

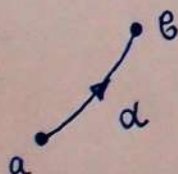
e_β^{n-1} (ошворена) $\rightarrow \approx \text{smiley face} \rightarrow S^{n-1} \setminus \{z\}$

* I_{n-1} може бити бесконачан скут али је ова сума коначна јер копичикна слика сете коначно линио.

* $X^{(n-1)} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1}$ је заправо: $X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n-1)} / X^{(n-2)} \approx \bigvee_{\beta \in I_{n-1}} S_\beta^{n-1} \rightarrow S_\beta$
/скупина две ошворене S_β

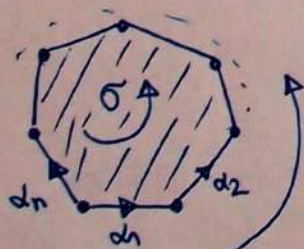
Мале димензије

d_1



$$d_1(\alpha) = b - a$$

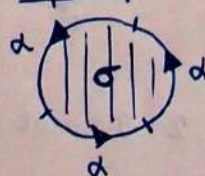
d_2



$$d_2(\sigma) = \mathbb{P}$$

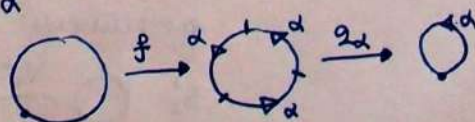
уравно $\mathbb{P}$ - коначна мин. копичикција 1-келуја

у пример:



$$d_2(\sigma) = \lambda \cdot \alpha \quad \lambda = ?$$

$$\lambda = \deg(q_\alpha \circ f) = 3$$



$$\Rightarrow d_2(\sigma) = 3\alpha$$

Корисниме две особине хомологије : исцртање пута из,
Мајер-Витторисов низ, итд.

Још једно важно употребљено:

$$\boxed{\text{I}} \quad A \subset X \quad (X, A) \text{ добар пар} \Rightarrow \boxed{H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)}$$

Када је (X, A) добар пар?

ако је A затворен у X и постоји V отворен у X , $V \supset A$ итд.
је A јак деформациони рецтракт од V .

ако је X CW-комплекс и $A \neq \emptyset$, A субкомплекс од $X \Rightarrow (X, A)$ добар пар.

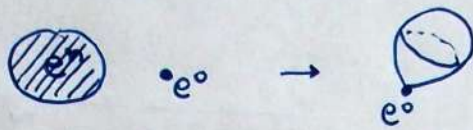
$$\text{Пример: } H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_n(\underbrace{D^n/S^{n-1}}_{\approx S^n}) = \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

Често корисно за решавање 😊

Важні приклади

СФЕРА S^n

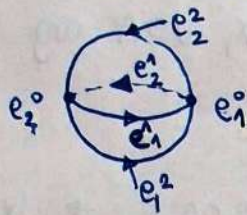
- $S^n = e^0 U_f e^n$



- genotipizacija koja podrazuje automatsko dešifrovanje:

$$S^n: e_1^0, e_2^0, e_1^1, e_2^1, \dots, e_1^n, e_2^n$$

$\forall m \in \{0, 1, \dots, n\} \quad e_2^m = d(e_1^m)$ - аннотированная еureka

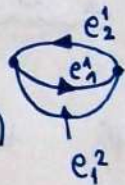


$$d(e_1^1) = e_1^0 - e_2^0$$

$$d(e_2^*) = e_2^0 - e_1^0$$

$$d(e_\lambda^2) = e_1^1 + e_2^1$$

$$d(e_2^2) = d(\alpha(e_1^2)) = \alpha(e_1^1) + \alpha(e_2^1) = e_2^1 + e_1^1$$



изг. годија се:

$$d(e_1^n) = e_1^{n-1} + (-1)^n \cdot \underbrace{\alpha(e_1^{n-1})}_{e_2^{n-1}}$$

$$\mathbb{RP}^n = S^n / x \sim -x$$

по једна ћелија сваке димензије:

$$\overbrace{e_1^i, e_2^i}^1 \xrightarrow{\pi} \underline{e^i}$$

$$e^0, e^1, \dots, e^n$$

$$d(e^n) = e^{n+1} + (-1)^n e^{n-1}$$

$$d(e^n) = (1 + (-1)^n) e^{n+1} = \begin{cases} 0, & 2+n \\ 2e^{n+1}, & 2|n \end{cases}$$

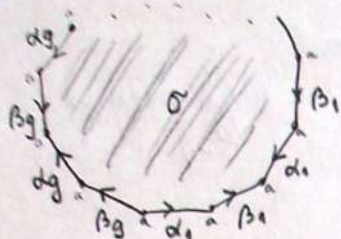
CW-1-K:

$$\begin{array}{ccccccc} & n & & n-1 & & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathbb{Z}^0 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \\ & \uparrow & & & & & & & & & & & & & \\ & \times & 0/2 & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \text{ u } k=n \text{ za } 2m \\ \mathbb{Z}_2, & 1 \leq k \leq n-1 \text{ za } 2+k \\ 0, & \text{where} \end{cases}$$

1) одредити хомолошке групе свих затворених површи.

M_g :



0-кел: a

1-кел: $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$

2-кел: σ

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle \sigma \rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^g (\mathbb{Z}\langle \alpha_i \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \beta_i \rangle) \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \rightarrow 0$$

2g генератора

• $d_1(\alpha_i) = a - a = 0$

$d_1(\beta_i) = a - a = 0$

$\Rightarrow d_1 = 0$

• $d_2(\sigma) = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_1 + \dots + \alpha_g + \beta_g - \alpha_g - \beta_g$ - имамо комутативности
та је ово $= 0$

$\Rightarrow d_2 = 0$

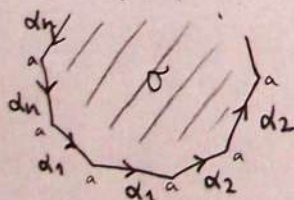
Како су сви пр. нл. хомолошки, хомолошка је иста као ланч. комплекс

$(\dots \rightarrow A \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{k-1}} A \xrightarrow{d_k} \dots \xrightarrow{d_{k+1}} 0 \xrightarrow{d_{k+2}} \dots)$ $\ker d_k = \text{Im } d_{k-1} \Rightarrow A/\text{Im } d_{k-1} \cong A/\text{Im } d_{k-1} \cong A \quad \text{!}$

$\Rightarrow H_k(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0,2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & k=1 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases} \quad g \in \mathbb{N}$

и за $g=0$: $M_0 = S^2$ та и она се уклапа у ову формулу !

M_h :



0: a

1: $\alpha_1, \dots, \alpha_h$

2: σ

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle \sigma \rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^h \mathbb{Z}\langle \alpha_i \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \rightarrow 0$$

$d_1(\alpha_i) = a - a = 0$

$\Rightarrow d_1 = 0$

$d_2(\sigma) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_h = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_h)$

одговоримо ориј. у
следи извр. г. извр. саиш

$$\mathbb{Z}\langle\alpha_1\rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle\alpha_n\rangle \cong \mathbb{Z}\langle\alpha_1\rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle\alpha_{k-1}\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle$$

$\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
 заменим са β један од генератора.
 моћемо јер $\alpha_n = \beta - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}$

- само небамо базу

$$\Rightarrow d_2(\sigma) = 2\beta$$

$$H_0(N_n) \cong \mathbb{Z} / \text{im } d_1 \cong \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} H_1(N_n) &\cong \ker d_1 / \text{im } d_2 = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\langle\alpha_i\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle \right) / \mathbb{Z}\langle 2\beta \rangle \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\langle\alpha_i\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle[\beta]\rangle \\ &\cong \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

$$H_2(N_n) \cong \ker d_2 / 0 = 0 \quad \text{јер ген. у } 2 \cdot \text{ген. } \mathbb{Z}$$

$$H_k(N_n) \cong 0, \quad k \geq 3$$

$$\Rightarrow H_k(N_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & k=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Питамо смо добити за K и $\mathbb{RP}^2$

$$\mathbb{RP}^2 \approx N_1: \quad H_k(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ \mathbb{Z}_2, & k=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$K \approx N_2: \quad H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & k=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

😊 Примећујемо да се јасно види идео уопштено важи:

$\sigma_1^{ab}(X) \cong H_1(X)$ за сваки ауто повезан простор X .