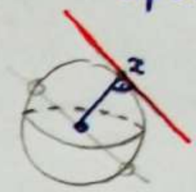
* **Доказати да на S^{2n} не постоји непрекидно поље тангентних правих.**



ППС. $\exists$ непр. поље танг. правих

права $\longleftrightarrow$ елемент $\mathbb{RP}^{2n}$

$\Rightarrow$ имамо индуковано пресликавање

$$f : S^{2n} \to \mathbb{RP}^{2n}$$

при чему $x \longmapsto f(x) = [y]$

$\Rightarrow x \perp y, -y$

$$\begin{tikzcd} & S^{2n} \arrow[d, "p"] \\ S^{2n} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{RP}^{2n} \end{tikzcd}$$

p - уобичајено

$\pi_1(S^{2n}) = 0$

$\Rightarrow \exists$ подизање $\tilde{f}$, $p \circ \tilde{f} = f$

$\Rightarrow f(x) = [\underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{нека од крајњих тачака}}]$

$\Rightarrow \boxed{x \perp \tilde{f}(x)}$

$\Rightarrow$ добили смо непрекидно танг. вект. поље

$\tilde{f} : S^{2n} \to S^{2n}$ (ненула јер кодомен S^{2n})

↯ □

☺ $f: S^n \to S^n$

Доказати да за суспензију пресликавања Sf важи

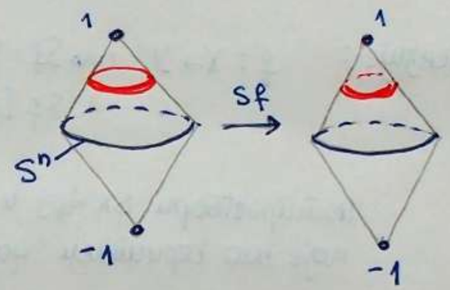
$$\deg Sf = \deg f,$$

при чему $Sf: S(S^n) \to S(S^n)$ идентификујемо са $Sf: S^{n+1} \to S^{n+1}$ преко једног изабраног хомеоморфизма $h: S^{n+1} \to S(S^n)$:

$$\begin{tikzcd}
S(S^n) \arrow[r, "Sf"] & S(S^n) \\
S^{n+1} \arrow[u, "h \approx"] \arrow[r, dashed, "Sf"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & S^{n+1} \arrow[u, "\approx h"']
\end{tikzcd}$$

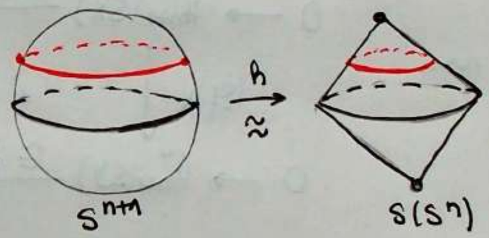
подсетимо: $Sf: S(S^n) \to S(S^n)$

$Sf[x,t] := [f(x),t]$



$h: S^{n+1} \to S(S^n)$ ≈

нпр. „по нивоима":



Посматрајмо следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
\tilde H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "h_* \cong"] \arrow[d, "(Sf)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}\ \circlearrowright"] & \tilde H_{n+1}(S(S^n)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(Sf)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}\ \circlearrowright"] & \tilde H_n(S^n) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "h_* \cong"] & \tilde H_{n+1}(S(S^n)) \arrow[r, "\cong"] & \tilde H_n(S^n)
\end{tikzcd}$$

(I) ↻ јер се добија применом $\tilde H_{n+1}$ на горњи дијаграм (1)

(II) ↻ - сетимо се Мајер-Виеторисовог низа који даје изоморфизам $\tilde H_{n+1}(SX) \xrightarrow{\cong} \tilde H_n(X)$

ово је управо ПРИРОДНОСТ МВ низа Веома важно!

(I) и (II) комутирају, па имамо

$$\begin{tikzcd}
\tilde H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(Sf)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\text{исти изо}"] & \tilde H_n(S^n) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde H_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[r, "\cong"] & \tilde H_n(S^n)
\end{tikzcd} \Rightarrow \boxed{\deg Sf = \deg f}$$

множење са $\deg Sf$

множење са $\deg f$

□

Природност Мајер-Виеторисовог низа:

$A, B \subset X$, $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$; $C, D \subset Y$, $Y = \operatorname{int} C \cup \operatorname{int} D$

$f: X \to Y$ непр.

$f(A) \subset C$, $f(B) \subset D$

$\Rightarrow$ тада комутира:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \oplus H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_A)_* \oplus (f|_B)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_{A\cap B})_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(C) \oplus H_n(D) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(C \cap D) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

за суспензије: $f: X \to Y \rightsquigarrow Sf: SX \to SY$

$Sf[x,t] = [f(x),t]$

потпростори $SX \setminus \{p\}$ и $SX \setminus \{q\}$ и $SY \setminus \{p'\}$ и $SY \setminus \{q'\}$ које смо користили на претх. часу се слажу како треба

$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}_{n+1}(SX) \arrow[r, "\cong\ \partial"] \arrow[d, "(Sf)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_{n+1}(SY) \arrow[r, "\cong\ \partial"] & \tilde{H}_n(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

* Доказати да за свако $k \in \mathbb{Z}$ и свако $n \in \mathbb{N}$ постоји пресликавање $\varphi_k^n : S^n \to S^n$ степена k.

фиксирамо $k \in \mathbb{Z}$

Знамо да постоји $\varphi_k^1 : S^1 \to S^1$ тако да је $\underline{\underline{\deg \varphi_k^1 = k}}$

(„намотавање kx": $\varphi_k^1 : e^{i\varphi} \to e^{ik\varphi}$)

Користимо својство суспензије из задатка који смо радили:

$$S\varphi_k^1 : S(S^1) \to S(S^1)$$

као што смо тамо идентификовали $S(S^1) \approx S^2$ на конзистентан начин

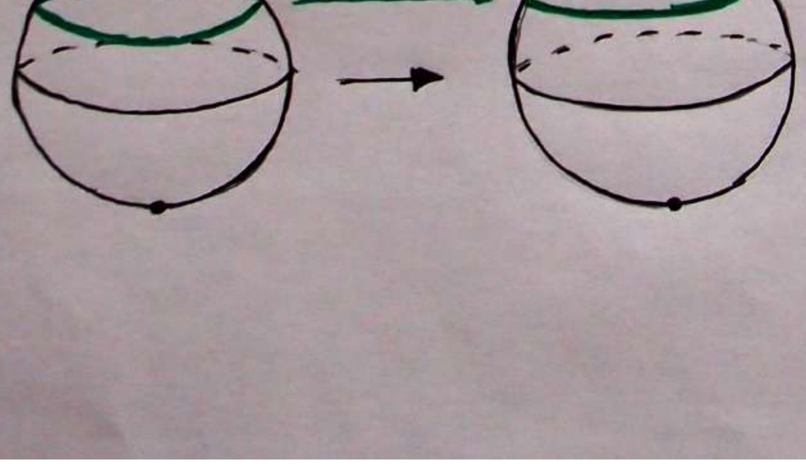
$$\rightsquigarrow \underbrace{S\varphi_k^1}_{\text{што узимо за } \varphi_k^2} : S^2 \to S^2$$

$$\deg \varphi_k^2 = \deg S\varphi_k^1 \overset{\text{зад.}}{=\!=} \deg \varphi_k^1 = k$$

тако индуктивно добијамо: $\varphi_k^n := S\varphi_k^{n-1}$

$$\deg \varphi_k^n = \deg \varphi_k^{n-1} = \dots = \deg \varphi_k^1 = k \checkmark$$

Како геометријски изгледа ?



* Нека је $f: S^n \to S^n$ непрекидно парно пресликавање

$(\forall x,\ f(-x) = f(x))$

Доказати да је $\deg f$ паран број.

Такође, ако још и $2 \mid n$, доказати да је $\deg f = 0$.

парно пресликавање $f: S^n \to S^n$ се факторише кроз $\mathbb{R}P^n$:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & & S^n \\ & \mathbb{R}P^n \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

дефинишемо: $g([x]) := f(x)$

добро дефинисано јер је f парно:

$g[-x] = f(-x) = f(x) = g[x]$ ✓

$\underset{\text{количничко}}{g \circ p} = f$ — непрекидно $\Rightarrow$ g је непрекидно ✓

H_n

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "p_*"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & & H_n(S^n) \\ & H_n(\mathbb{R}P^n) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

Са предавања / из теорије без доказа користимо:

- $H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \text{ и за } 2 \nmid n,\ k=n \\ \mathbb{Z}_2, & 1 \leq k < n \text{ и } 2 \nmid k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Дакле, ако $2 \mid n$, $H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$, а ако $2 \nmid n$ $H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$

- за $2 \nmid n$: $p_*: \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}} \to \underbrace{H_n(\mathbb{R}P^n)}_{\mathbb{Z}}$

је множење са **2**.

Имамо два случаја:

1° $2 \mid n$: $H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "p_*"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{Z} \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f_* = 0 \Rightarrow \boxed{\deg f = 0}$

2° $2 \nmid n$: $H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}\langle \tau \rangle$, $H_n(S^n) = \mathbb{Z}\langle w \rangle$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\langle w \rangle \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "p_*"', "(\times 2)"] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{Z}\langle w \rangle \\ & \mathbb{Z}\langle \tau \rangle \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

$w \mapsto 2\tau$

$f_*(w) = \deg f \cdot w$

$\|$

$g_*(p_*(w)) = g_*(2\tau) = 2\underbrace{g_*(\tau)}_{= k \cdot w} = 2k \cdot w$

$\Rightarrow \boxed{\deg f = 2k}$

$\forall$ хомоморфизам $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ је множење