Степен пресликавања

$n \in \mathbb{N}_0$

$f: S^n \to S^n$ непрекидно $\rightsquigarrow$ $f_*: \underbrace{\tilde{H}_n(S^n)}_{\mathbb{Z}} \to \underbrace{\tilde{H}_n(S^n)}_{\mathbb{Z}}$

СТЕПЕН ПРЕСЛИКАВАЊА f

1 - генератор $\tilde{H}_n(S^n)$ (уочимо исти генератор у обе $\tilde{H}_n(S^n)$)

$$\deg f := f_*(1)$$

Другим речима, f_* је множење са $\deg f$:

$$f_*(k) = k \cdot f_*(1) = k \cdot \deg f$$
$k \in \mathbb{Z}$

* не зависи од избора генератора!

$$f_*(-1) = -f_*(1) = -\deg f = \deg f \cdot \underset{\text{генератор}}{(-1)}$$

дакле да смо (-1) изабрали за генератор,
имали бисмо исти $\deg f$ ☺

ОСОБИНЕ СТЕПЕНА $f,g: S^n \to S^n$

1) $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$ ← важи и обрнуто Хопфова т. о степену: $f: S^n \to S^n,\ g: S^n \to S^n$
$f \simeq g \Leftrightarrow \deg f = \deg g$

$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

2) $\deg 1\!\!1_{S^n} = 1$

$(1\!\!1_{S^n})_* = 1\!\!1_{H_n(S^n)} \Rightarrow \deg 1\!\!1_{S^n} = 1$

3) $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & S^n \arrow[r, "g"] & S^n \end{tikzcd}$$

$\deg(g\circ f) = (g\circ f)_* = g_*(f_*(1)) = g_*(\deg f) = \deg g \cdot \deg f$

4) $f: S^n \to S^n$ ако се може проширити на D^{n+1} онда је $\deg f = 0$

$$\begin{tikzcd} D^{n+1} \arrow[r, "\tilde{f}"] & S^n \\ S^n \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \quad \overset{H_n}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\tilde{f}_*"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f_* = \tilde{f}_* \circ i_* = 0$

$\Rightarrow f_*(1) = 0 \Rightarrow \deg f = 0$

Знамо да је $f \simeq const \Leftrightarrow$ се проширује на $CS^n \approx D^{n+1}$ $\Rightarrow \deg f = 0$

$\Rightarrow f \simeq const \Rightarrow \deg f = 0$ – наравно, директно може из 1) $\deg f = \deg(const) = 0$ јер $const_* = 0$ у хомологију

5) $\rho: S^n \to S^n$ раванска рефлексија у односу на i-ту хиперраван $\Rightarrow \deg \rho = -1$

пр. $\rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, \dots, x_{n+1})$

Само се мења оријентација...
Нећемо доказивати.

6) $\alpha: S^n \to S^n$ $\alpha(x) = -x$ антиподално $\Rightarrow \deg \alpha = (-1)^{n+1}$

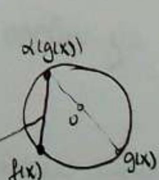
заправо $\alpha = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_k \circ \dots \circ \rho_{n+1}$ $\overset{3)}{\Rightarrow} \deg \alpha = \deg \rho_1 \cdots \deg \rho_{n+1} = (-1)^{n+1}$
у односу на k-ту хиперр.

T $f: S^n \to S^n$, $g: S^n \to S^n$ (подразумевамо непр.), $f(x) \neq g(x), \forall x \in S^n$ $\Big\} \Rightarrow f \simeq \alpha \circ g$

– радили смо ово у ТОП 5 као: $f(x) \neq -g(x)\ \forall x \Rightarrow f \simeq g$

$H: S^n \times I \to S^n$

$H(x,t) = \dfrac{(1-t)f(x) + t\alpha(g(x))}{\|(1-t)f(x) + t\alpha(g(x))\|}$ ← $\neq 0$ јер нису супротне па не садржи 0



H непрекидно ✓

$H(x,0) = f(x)$
$H(x,1) = \alpha g(x)$ $\Big\} \Rightarrow f \simeq \alpha \circ g$ □

ПОСЛЕДИЦА 1: $f: S^n \to S^n$, $\deg f \neq (-1)^{n+1} \Rightarrow f$ има ф.т.

Д. ППС. $\Rightarrow \forall x\ f(x) \neq x = 1\!\!1_{S^n}(x)$

$\overset{T}{\Rightarrow} f \simeq \alpha \circ 1\!\!1 = \alpha$

$\Rightarrow \deg f = \deg \alpha = (-1)^{n+1}$ ↯ □

ПОСЛЕДИЦА 2: $f: S^n \to S^n$, $\deg f \neq 1$ $\Rightarrow (\exists x \in S^n)\ f(x) = -x$.

Д. ППС. $\forall x\ f(x) \neq -x = \alpha(x)$

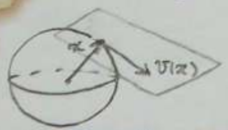
$\overset{T}{\Rightarrow} f \simeq \alpha \circ \alpha = 1\!\!1_{S^n}$

$\Rightarrow \deg f = \deg 1\!\!1_{S^n} = 1$ ↯ □

☺ f нема ф.т. $\Rightarrow f \simeq \alpha_{S^n}$

Степен пресликавања 2

Деф. **Тангентно векторско поље** на сфери S^n је непрекидно придруживање које свакој тачки сфере додељује тангентни вектор у тој тачки.



$v(x) \perp \overrightarrow{Ox}$

Ако је $\forall x\in S^n \ v(x)\neq 0$ то је **ненула** тант. вект. поље

Када имамо такво ненула, можемо посматрати њему придружено **јединично** тант. вект. поље:

$$f: S^n\to S^n \quad f(x)=\frac{v(x)}{\|v(x)\|}\in S^n \quad \text{(непр. као композ. непр.)}$$

$\boxed{T}$ **(о чупавој лопти)**

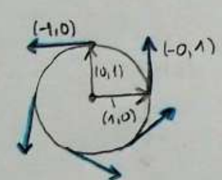
Сфера S^n има ненула непр. тант. вект. поље АККО $2\nmid n$.

Д. • $n=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$

$S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^{2k}$

$f:S^n\to S^n \quad f(x_1,x_2,\dots,x_{2k-1},x_{2k}):=(-x_2,x_1,-x_4,x_3,\dots,-x_{2k},x_{2k-1})\in S^n$

n=1:



ск. производ је 0, непр.

$\Downarrow$

$\overrightarrow{Ox}\perp\overrightarrow{Of(x)}$ $\Rightarrow$ ово јесте ненула т.в.п.

• обрнуто: $\exists$ тант. $\Rightarrow$ $\exists$ јединично $f:S^n\to S^n$

$\overrightarrow{Ox}\perp\overrightarrow{Of(x)}$, $\forall x$

$\Rightarrow$ $f(x)\neq x,-x$, $\forall x$ (јер $x\circ x=1\neq 0$, $x\circ(-x)=-1\neq 0$)

$$\left.\begin{aligned} f(x)\neq x,\ \forall x &\overset{\text{П1.}}{\Rightarrow} \deg f=(-1)^{n+1}\\ f(x)\neq -x,\ \forall x &\overset{\text{П2.}}{\Rightarrow} \deg f=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow (-1)^{n+1}=1 \Rightarrow 2\nmid n$$

□

Колико њих лин. нез. в. поља постоји? тешко, зависи од аритметике бројева...

Задаци

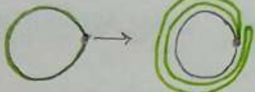
• Из ТОП Б знамо да ако непр. $f: S^n \to S^n$ није НА, онда $f \simeq const$

(факторише се кроз $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n \simeq * \Rightarrow \simeq const$

или на II начин: $\underbrace{f(x) \neq y_0}_{c_{y_0}(x_0)}, \forall x \overset{\text{Т}}{\Rightarrow} f \simeq \alpha \circ c_{y_0}$ тј. $f \simeq c_{\alpha(y_0)}$ ☺)

1. Конструисати (непр.) сурјекцију $f: S^n \to S^n$ т.д. $\deg f = 0$ (за $\forall n \in \mathbb{N}$)

непр. за $n=1$: шутимо ☺

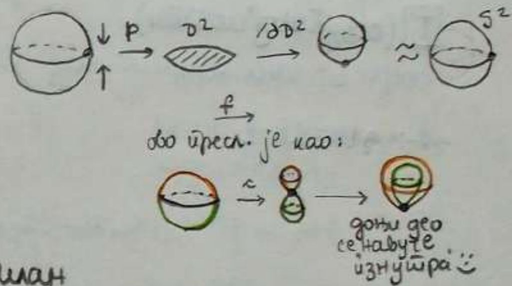


☺ хајде нешто за све $n \in \mathbb{N}$,
јер за остале дим не умемо овако ☺

$S^n \xrightarrow{p} D^n$ - посматрамо утопљен у $\mathbb{R}^{n+1}$; $D^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1\}$

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{p} & D^n \\ \varphi & & \cup \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, 0) \end{array}$$

p је пројекција, јесте НА



$$S^n \xrightarrow{p} \underset{*}{\underset{\simeq}{D^n}} \xrightarrow[\substack{\text{количничко} \\ \Rightarrow \text{НА}}]{\pi} D^n/\partial D^n \overset{w}{\approx} S^n$$

$\underbrace{\pi \circ p}_{f}: S^n \to S^n$ факторише се кроз контрактибилан

$\overset{\text{ТОП Б}}{\Rightarrow} f \simeq const \Rightarrow \underline{\deg f = 0}$

И пошто су сва НА, f је НА. □

* Подсетимо се дејства групе на т.п. X

$G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Homeo}(X)$ - хомоморфизам

$e \longmapsto 1_X$

дејство је слободно ако $\forall g \neq e$, $\varphi(g)$ нема ф.т.

(дејство увек постоји (нпр. $\forall g \in G$ $\varphi(g) = 1_X$, тј. φ-тривијалан хомоморфизам) али не мора бити слободно)

• дејство можемо посматрати као:

$\mu: G \times X \to X$

1° $\mu(e, x) = x$, $\forall x$

2° $\mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$

Степен пресликавања 3

ЛЕПАСТИ ПРОСТОРИ

$n\geq 1,\ m\geq 2$

Посматрамо следеће дејство $\mathbb{Z}_m$ на S^{2n-1}:

$$\mathbb{Z}_m \times \underset{\mathbb{C}^n}{\underset{\cap}{S^{2n-1}}} \to S^{2n-1}$$

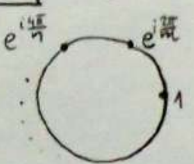
Довољно је задати како генератор дејствује:

$$(1, \underbrace{(z_1,\dots,z_n)}_{\in S^{2n-1}\subset\mathbb{C}^n}) \longmapsto \left(e^{i\frac{2\pi}{m}}z_1,\dots,e^{i\frac{2\pi}{m}}z_n\right)$$

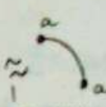
Када се m пута примени добија се идентитет па је ово исправно дефинисано дејство. Такође, лако се види да је ово дејство слободно.

Простор орбита: $L_{m,n} := S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m$ - ЛЕПАСТИ ПРОСТОР

• $\boxed{n=1}$ $\mathbb{Z}_m\times S^1\to S^1$



ген. дејствује као рот. за $\frac{2\pi}{m}$

$L_{m,1}\approx$  $\approx S^1$ $\Rightarrow$ $\boxed{L_{m,1}\approx S^1 \text{ за све } m}$

конц. сете
све класе

• $\boxed{m=2}$ $(1,(z_1,\dots,z_n))\longmapsto(-z_1,\dots,-z_n)$ - дејствује као антиподално

$e^{i\frac{2\pi}{2}}=e^{i\pi}=-1$

$\Rightarrow$ $S^{2n-1}/\mathbb{Z}_2 \approx S^{2n-1}/_{x\sim -x} \approx \mathbb{R}P^{2n-1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L_{2,n}\approx\mathbb{R}P^{2n-1},\ \forall n}$

② G-група која слободно дејствује на S^{2n}, $n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow |G|\leq 2$

(док на непарнодим. $\exists$ слоб. дејства свих $\mathbb{Z}_m$, на парнодим. $\exists$ само слободно $\mathbb{Z}_2$-дејство :))

$G\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Homeo}(S^{2n})$ - слободно дејство

то дејство посматрамо као хомоморфизам група $(G\to(\mathrm{Homeo}(S^{2n}),\circ))$

ако је $h: S^{2n}\xrightarrow{\approx}S^{2n}$ $\Rightarrow h\circ h^{-1}=1\!\!1_{S^{2n}}$ $\Rightarrow \deg h\cdot\deg h^{-1}=\deg 1\!\!1_{S^{2n}}=1$

$\Rightarrow \deg h\in\{-1,1\}$

$G\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Homeo}(S^{2n})\xrightarrow{\deg}\{-1,1\}$ - где уведемо операцију множења, па је ово група ($\cong\mathbb{Z}_2$)
(неутрал у $\{-1,1\}$ је 1)
и deg је хомоморфизам група
(јер $\deg(f\circ g)=\deg f\cdot\deg g$)

Покажимо да је $\deg\circ\varphi$ мономорфизам:

$g\neq 0 \xRightarrow{\text{слободно}} \varphi(g)$ нема фт. $\quad (f\neq g,\ \forall x \Rightarrow f\simeq a\circ g)$

$\overset{\text{п1.}}{\Rightarrow} \varphi(g)\simeq a_{S^{2n}}$

$\Rightarrow \deg\varphi(g)=\deg a_{S^{2n}}=(-1)^{2n+1}=-1$ - није неутрал

$\Rightarrow \deg\circ\varphi$ је моно

$G \xrightarrow[1-1]{\deg\circ\varphi} \mathbb{Z}_2 \Rightarrow G < \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \boxed{G=\mathbb{Z}_2 \vee G=0}$.

($\mathbb{Z}_2$ и $0=\{e\}$ дејствују слободно увек :)) □

* у тач б. смо доказали да $2 \nmid n \Rightarrow \mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}$ (конструисали смо хомотопију),
а сада имамо и $\Leftarrow$: $a_{S^n} \simeq \mathbb{1}_{S^n} \overset{\deg}{\Rightarrow} (-1)^{n+1} = 1 \Rightarrow 2 \nmid n$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2 \nmid n \Leftrightarrow \mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}}$$

3. $n \in \mathbb{N}$ а) $f : S^{2n} \to S^{2n}$ непрекидно
док. да $(\exists x \in S^{2n})\ f(x) = x \vee f(x) = -x$

б) док. да $\mathbb{R}P^{2n}$ има **СФТ.**

а) ППС. $(\forall x \in S^{2n})\ f(x) \neq x \wedge f(x) \neq -x$

$$\begin{array}{ccc}
\uparrow & & \uparrow \\
f(x) \neq \mathbb{1}(x) & & f(x) \neq a(x) \\
\Downarrow (T) & & \Downarrow \\
f \simeq a \circ \mathbb{1} & & f \simeq a \circ a = \mathbb{1} \\
\Downarrow & & \\
\deg f = \deg a & & \Rightarrow \deg f = \deg \mathbb{1} \\
= (-1)^{2n+1} & & = 1 \\
= -1 & &
\end{array} \quad ↯$$

б)

$$\begin{tikzcd}
 & & S^{2n} \arrow[d, "p \text{ - наткривање}"] \\
S^{2n} \arrow[r, "p"] \arrow[urr, dashed, "\tilde{f}"] & \mathbb{R}P^{2n} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^{2n}
\end{tikzcd}$$

$p(x) = [x] = \{-x, x\}$

подизање $\tilde{f}$ постоји акко $(f \circ p)_*(\underbrace{\pi_1(S^{2n})}_{0}) < p_*(\pi_1(S^{2n}))$ ✓

$$\begin{tikzcd}
S^{2n} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & S^{2n} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{R}P^{2n} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^{2n}
\end{tikzcd}$$

← лепше изгледа :)

из а) следи да $(\exists x_0 \in S^{2n})\ \tilde{f}(x_0) = x_0 \vee \tilde{f}(x_0) = -x_0$

$$\Rightarrow \quad p(\tilde{f}(x_0)) = [x_0]$$
$$= f(p(x_0)) = f([x_0])$$

$\Rightarrow f([x_0]) = [x_0]$
тј. $\exists$ ф.т. за $\forall f$ □