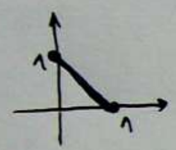
~ Сингуларна хомологија ~

(за све детаље добро научити предавања)

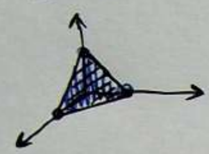
$\boxed{\text{ДЕФ}}$ стандардни симплекс димензије n: (у $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$\Delta^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \forall i,\ x_0 + \dots + x_n = 1\}$$
$$= \mathrm{conv}\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$$

$n=1$: $\Delta^1 \subset \mathbb{R}^2$



$n=2$: $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$



Уводимо пресликавања: $\delta_i^n : \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$, $i = 0, \dots, n$

убацујемо га у Δ^n насупрот темену i

$$\delta_i^n((x_0, \dots, x_{n-1})) := (x_0, \dots, x_{i-1}, \underset{i}{\underline{0}}, x_i, \dots, x_{n-1})$$

Како дефинишемо сингуларну хомологију? X-тополошки простор

$$\Delta_n(X) := \{\sigma : \Delta^n \to X \mid \sigma \text{ непрекидно}\}$$

σ назива се сингуларни n-дим симплекс

$$S_n(X) := \mathbb{Z}_{\Delta_n(X)} = Ab\langle \Delta_n(X) \mid - \rangle$$

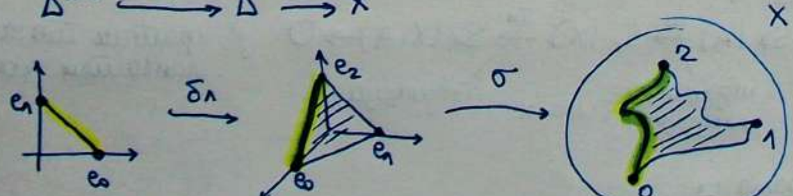
гранични хомоморфизам: $d : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$

$$d\sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i^n$$

σ генератор $\in \Delta_n(X)$

шта то значи?

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{\delta_i^n} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$$



$\boxed{d^2 = 0}$ → ланчасти комплекс $\boxed{S_*(X)}$: $\to S_{n+1}(X) \xrightarrow{d} S_n(X) \xrightarrow{d} \dots \to S_0(X) \to 0$

$\boxed{\text{сингуларна хомологија}}$ $\boxed{H_n(X) := H_n(S_*(X))}$

• $f: X \to Y$ непрекидно $\longmapsto$ $f_\#: S_*(X) \to S_*(Y)$

на генераторима:

$f_\#(\sigma) := f \circ \sigma$

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \sigma"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

показује се да је ланчасто пресликавање

$\rightsquigarrow$ $f_*: H_n(X) \to H_n(Y)$ хомоморфизам

• функторијалност ✓

РЕДУКОВАНА ХОМОЛОГИЈА

сингуларни л.к.: $S_*(X): \dots \xrightarrow{d} S_n(X) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X) \to \dots \to S_0(X) \to 0$

редуковани синг. л.к. $\tilde{S}_*(X): \dots \xrightarrow{d} S_n(X) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X) \to \dots \to S_0(X) \xrightarrow{d} \underbrace{S_{-1}(X)}_{=\mathbb{Z}} \to 0$

сваки генератор $S_0(X)$ се слика у $\longmapsto 1 \in \mathbb{Z}$

$\tilde{S}_*(X)$ ланчасти комплекс? ДА ✓

→ редукована хомологија: $\tilde{H}_k(X) := H_k(\tilde{S}_*(X))$

свакако: $\tilde{H}_k(X) = H_k(X)$, $\forall k \geq 1$

$\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{за } X \text{ путно повезан, } \tilde{H}_0(X) = 0}$

РЕЛАТИВНА ХОМОЛОГИЈА

$A \subset X \longmapsto S_*(X,A): \dots \to S_n(X,A) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X,A) \to \dots$

$S_n(X,A) := S_n(X)/S_n(A)$ $\quad d([c]) := [dc]$

$\rightsquigarrow$ $H_n(X,A) := H_n(S_*(X,A))$ - релативна хомолошка група пара (X,A)

СТАВ (X,A)-топ. пар $(A \subset X)$

$\Rightarrow$ $0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_\#} S_*(X) \xrightarrow{\pi_\#} S_*(X,A) \to 0$ је кратак тачан низ ланчастих комплекса

индуковано инклузијом $i: A \hookrightarrow X$ — пројекција

Д - видети предавања □

ЦИК ЦАК $\Rightarrow$ дуги тачан низ пара у хомологији: $\dots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to \dots$

Слично се доказује за редуковану хомологију:

$$0 \to \tilde{S}_*(A) \xrightarrow{i_\#} \tilde{S}_*(A) \xrightarrow{\pi_\#} S_*(X,A) \to 0 \quad \text{je кратак тачан низ л.к.}$$

$\Rightarrow$ дуги тачан низ пара у редукованој хомологији: $\cdots \to \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \to H_n(X,A) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \to \cdots$

Из функторијалности хомологије следи:

$$X \simeq Y \Rightarrow H_n(X) \cong H_n(Y),\ \forall n$$
$$\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_n(Y)$$

jер: $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ хомотопске еквиваленције

$$g \circ f \simeq 1\!\!1_X,\ f \circ g \simeq 1\!\!1_Y$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (1\!\!1_X)_* = 1\!\!1_{H_n(X)}$$

сл. $f_* \circ g_* = 1\!\!1_{H_n(Y)}$

$$\Rightarrow H_n(X) \underset{g_*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} H_n(Y) \quad \square$$

$\cong$

1. $i: A \hookrightarrow X$ је хомотопска еквиваленција

доказати да $H_n(X,A)=0, \ \forall n\in\mathbb{N}$

дуги т. низ пара (X,A):

$$\to H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \underset{\cong}{\xrightarrow{i_*}} H_n(X) \underset{0}{\xrightarrow{j_*}} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \underset{\cong}{\xrightarrow{i_*}} H_{n-1}(X) \to \cdots$$

i-хом. еквив $\Rightarrow i_*$ је изо

i_* изо $\Rightarrow i_*$ НА $\Rightarrow \overset{\operatorname{im} i_* = \ker j_*}{\ker j_*} =$ цела $H_n(X)$

$\Rightarrow j_* = 0$

$\Rightarrow \partial$ је 1-1

$\partial(H_n(X,A)) = \ker \underset{\cong}{i_*} = 0$

слика ари, 1-1' пресликавању је $0 \Rightarrow H_n(X,A)=0$ □

2. $f: X\to X$, $\operatorname{im} f \subseteq A \subset X$

$f \simeq \mathbb{1}_X$

доказати да за $\forall n\in\mathbb{N}$ важи $H_n(A) \cong H_n(X) \oplus H_{n+1}(X,A)$

$$\Delta. \ \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X,A) \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

уочимо $\tilde{f}: X \to A$

$\tilde{f}(x) = f(x)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, hook, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow i \circ \tilde{f} = f: X \to X$

$\Rightarrow i_* \circ \tilde{f}_* = f_* = (\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{H_n(X)}$

$\Rightarrow \boxed{i_* \text{ је НА}}$, $\tilde{f}_*$ је 1-1

тач.

$\Rightarrow \boxed{j_* \text{ је } 0}$

$\Rightarrow$ имамо кратак тачан низ:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_{n+1}(X,A) \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\tilde{f}_*"] & 0 \end{tikzcd}$$

$i_* \circ \tilde{f}_* = \mathbb{1}_{H_n(X)} \Rightarrow$ цепа се

$\Rightarrow H_n(A) \cong H_n(X) \oplus H_{n+1}(X,A)$ □

• A - ретракт простора X

$\Rightarrow \forall n \qquad H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X,A)$

(ако за неко n, $H_n(X) \ncong H_n(A) \oplus H_n(X,A)$, онда A није ретракт!)

Дуги т.н. пара:

$$\cdots \to H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

$A \xhookrightarrow{i} \underline{X}$

$\underline{(X,\phi)} \xhookrightarrow{j} (X,A)$

$H_n(X,\phi) \cong H_n(X)$

A- ретракт $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (r \circ i)_* = (\mathbb{1}_A)_*$

$r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{H_n(A)} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \boxed{i_* \text{ је } 1\text{-}1}$ што не важи увек, иако је i 1-1

i_* 1-1 $\Rightarrow$ тачан је

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[l, bend left, dashed, "r_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

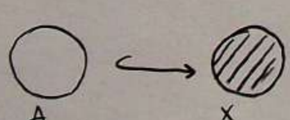
$r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{H_n(A)} \Rightarrow$ цепа се

тј. $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X,A)$ $\square$

⊛ важно: $A \xhookrightarrow{i} X$ јесте 1-1

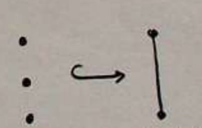
али $H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X)$ не мора бити 1-1 јер класе које у $H_k(A)$ нису биле једнаке могу постати једнаке у $H_k(X)$

пр.



$H_1(A) = \mathbb{Z} \qquad H_1(X) = 0$

пр2.



$H_0(A) \qquad H_0(X)$

Тачан низ тројке

имали смо: $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ (X, A) - топ. пар

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_\#} S_*(X) \xrightarrow{\pi_\#} S_*(X,A) \to 0 \quad \text{- тачан низ}$$

$$S_n(X,A) = S_n(X)/S_n(A)$$

Индуковао је
дуги тачан низ пара:

$$\dots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to \dots \to H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X,A) \to 0$$

и слично у редукованој хомологији

$$\dots \to \tilde{H}_n(A) \to \tilde{H}_n(X) \to H_n(X,A) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \to \dots \to \tilde{H}_0(A) \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X,A) \to \tilde{H}_{-1}(A) \to \tilde{H}_{-1}(X) \to 0$$

Сада имамо:

(X, A, B) - тополошка тројка $B \overset{j}{\hookrightarrow} A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ - инклузије

=> тада је кратак тачан низ:

$$0 \to S_*(A,B) \xrightarrow{i_\#} S_*(X,B) \xrightarrow{j_\#} S_*(X,A) \to 0$$

- наравно, треба док. да су ови $i_\#$ и $j_\#$ ланч. пресликавања, тј. да сви □ комутирају, ал то је баш лако!

(за пар је спец. случај овога када узмемо $B = \emptyset$)

Д. како све заправо изгледа?

$$0 \to S_n(A)/S_n(B) \xrightarrow{i_\#} S_n(X)/S_n(B) \xrightarrow{j_\#} S_n(X)/S_n(A) \to 0$$

$$\underset{\in S_n(A)}{[x]} \longmapsto [i(x)] \qquad [y] \longrightarrow [y]'$$

- $i_\#$ је 1-1 јер $S_n(A) < S_n(X)$ (подгрупа), па је и $i_\#$ инклузија
- $j_\#$ је НА јер $y \in S_n(X)$ $[y] \xmapsto{j_\#} [y]'$ само сечемо по другој подгрупи

  $S_n(B) < S_n(A)$ => сечемо по већој подгрупи

  => $j_\#$ је НА.
- $\operatorname{im} i_\#$ = косети оних елемената x, $x \in S_n(A)$

  тј. $\{[x] \mid x \in S_n(A)\}$

  $\ker j_\# =$ баш то јер сечемо по $S_n(A)$ => $\operatorname{im} i_\# = \ker j_\#$

  => кратак тачан низ □

ЦИК-ЦАК лема:

имамо дуги тачан низ у хомологији:

$$\dots H_n(A,B) \to H_n(X,B) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,B) \to \dots$$