Симплицијална хомологија

K- уређен симплицијални комплекс
(уредимо му темена линеарно: $v_0 < v_1 < \dots < v_m$)
тада су и сви симплекси уређени
$\sigma = (a_0, \dots, a_k)$ - темена у растућем низу

$K_n := \{\underset{\text{уређени}}{\sigma} \in K \mid \dim\sigma = n\}$

$C_n(K) := \mathbb{Z}_{K_n} = \{\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_k\sigma_k \mid \sigma_i \in K_n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$


$\leftarrow C_2(K) = \mathbb{Z}\langle\sigma_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\sigma_2\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\sigma_3\rangle$

$d_n: C_n(K) \to C_{n-1}(K)$
дефинишемо на генераторима:

$$d_n\underbrace{(a_0,\dots,a_n)}_{\substack{n\text{-дим}\\ \text{уређен симплекс}}} := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (a_0,\dots,a_{i-1},\underset{\text{избачено}}{\hat{a_i}},a_{i+1},\dots,a_n) = (a_1,a_2,\dots,a_n) - (a_0,a_2,\dots,a_n) + \dots$$

прошири се до хомоморфизма линеарно
$d^2=0$ - т. са предавања
$\Rightarrow$ $C_*(K) = (C_n(K), d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је ланчасти комплекс

$C_*(K): \dots \to C_n(K) \xrightarrow{d} C_{n-1}(K) \to \dots \to C_1(K) \xrightarrow{d} C_0(K) \to 0$

(ако је $\dim K = n$, немамо симпл. веће дим па: $\underbrace{\dots \to 0}_{\text{нуле}} \to C_n(K) \to \dots \to C_1(K) \to C_0(K) \to 0$)

хомологија: $H_n(K) := H_n(C_*(K))$

Пр.


$d((a_0,a_1)) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i (\text{без } i) = (-1)^0 a_1 + (-1)^1 a_0 = a_1 - a_0$

$d(a_0,a_1,a_2) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i (\text{без } a_i) = +(a_1,a_2) - (a_0,a_2) + (a_0,a_1)$

(= $(a_1,a_2) + (a_2,a_0) + (a_0,a_1)$ - да нису уређени
зато се зове гранични оператор
- граница троугла ☺)

Деф. $\phi, \psi : C_* \to C_*'$ ланчаста пресликавања ових л. комплекса.

Ланчаста хомотопија између ових л.п. : $s : \phi \simeq \psi$ је фамилија хомоморфизама $s_n : C_n \to C_{n+1}'$, $n \in \mathbb{N}$ т.д. важи:

$$d_{n+1}' \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = \phi_n - \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\phi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "\phi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "\phi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"] & C_n' \arrow[r, "d_n'"] & C_{n-1}' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Уколико $\exists$ ова л. хомотопија, ϕ и ψ су ланчасто хомотопна.

Став $\phi, \psi : C_* \to C_*'$ ланчасто хомотопна

$\Rightarrow \phi_* = \psi_*$ у хомологији.

Δ. $[z_n] \in H_n(C_*) = Z_n(C_*)/B_n(C_*)$ $\to$ $dz_n = 0$

$\phi_*[z_n] - \psi_*[z_n] = [\phi_n(z_n)] - [\psi_n(z_n)]$ - елементи $H_n(C_*')$

$= [\phi_n(z_n) - \psi_n(z_n)]$

$= [(\phi_n - \psi_n) z_n]$

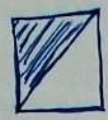
$= [d_{n+1}'(s_n(z_n)) + s_{n-1}(\underbrace{d_n(z_n)}_{=0 \text{ јер } z_n \in \ker d_n})]$

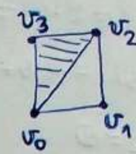
$= [\underbrace{\underline{d_{n+1}'(s_n(z_n))}}_{\substack{\in \operatorname{im} d_{n+1}' \\ =0}}]$

$= 0$

$\square$

1.

K:  Одредити $H_n(K)=?$, $n\geq 0$

означимо темена па смо га оријентисали: 

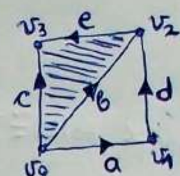
dim0: v_0, v_1, v_2, v_3 (4)

dim1: a, b, c, d, e (5)

dim2: (v_0, v_2, v_3) (1)

→ ланчасти комплекс:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C_2(K) & \xrightarrow{d_2} & C_1(K) & \xrightarrow{d_1} & C_0(K) & \to 0 \\ & \cong & & \cong & & \cong & \\ & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^5 & & \mathbb{Z}^4 & \end{array}$$



- $\boxed{d_2}(v_0, v_2, v_3) = (v_2, v_3) - (v_0, v_3) + (v_0, v_2)$

$$= e - c + b$$

$$\boxed{\operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle e-c+b\rangle}$$

- одредимо сад d_1 на генераторима:

$d_1 a = v_1 - v_0$

$d_1 b = v_2 - v_0$

$d_1 c = v_3 - v_0$

$d_1 d = v_2 - v_1$

$d_1 e = v_3 - v_2$

$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e \in \ker d_1 \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{Z}$

$d_1(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e) = 0$

заменимо: $\alpha(v_1 - v_0) + \beta(v_2 - v_0) + \gamma(v_3 - v_0) + \delta(v_2 - v_1) + \varepsilon(v_3 - v_2) = 0$

$\Rightarrow (-\alpha - \beta - \gamma)v_0 + (\alpha - \delta)v_1 + (\beta + \delta - \varepsilon)v_2 + (\gamma + \varepsilon)v_3 = 0$

генератори су v_i

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \delta = 0 \\ \beta + \delta - \varepsilon = 0 \\ \gamma + \varepsilon = 0 \end{array}\right\}$$

решавамо

$\Rightarrow \alpha = \delta, \ \gamma = -\varepsilon, \ \beta = -\delta + \varepsilon$

$\Rightarrow$ произвољни елемент језгра је:

$\delta a + (\varepsilon - \delta) b + \varepsilon c + \delta d + \varepsilon e$

$= \delta(a - b + d) + \varepsilon(b - c + e)$

$$\Rightarrow \boxed{\ker d_1 = \mathbb{Z}\langle a-b+d\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b-c+e\rangle}$$

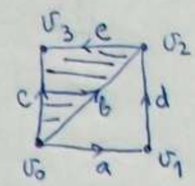
$\boxed{H_1(K)} \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle [a-b+d]\rangle$

$\Rightarrow a-b+d$ је цикл који није граница

$b-c+e$ је цикл али и граница

види слику ☺

- $\underset{\sim}{H_2(K)}$?



$d_2(v_0 v_2 v_3) = b + e - c \neq 0$ у $C_1(K)$

$d_2(k\cdot(v_0 v_2 v_3)) = k(b+e-c) \neq 0$

$\Rightarrow \ker d_2 = 0$

$$0 \to \underset{\mathbb{Z}}{\overset{\wr\wr}{C_2(K)}} \xrightarrow{d_2} \underset{\mathbb{Z}^5}{\overset{\wr\wr}{C_1(K)}} \xrightarrow{d_1} C_0(K) \to 0$$

$H_2(K) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 \cong \ker d_2 = \underline{\underline{0}}$

- $H_0(K)$?

можемо одмах $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ јер је путно повезан ¨

пешке:

$d_1 a = v_1 - v_0$ $d_1 c = v_3 - v_0$ $d_1 e = v_3 - v_2$
$d_1 b = v_2 - v_0$ $d_1 d = v_2 - v_1$

$H_0(K) \cong C_0(K)/\operatorname{im} d_1 \cong Ab\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \mid v_0 = v_1,\ v_1 = v_2,\ v_2 = v_3 \rangle \cong Ab\langle v_0 \mid - \rangle \cong \underline{\underline{\mathbb{Z}\langle [v_0] \rangle}}$

када сечемо по слици
као да додајемо релације!

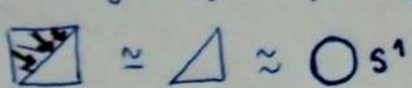
сувишна
су 3

са предавања: $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^n$ n = број компоненти
путне повезаности

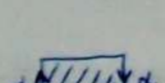
- $H_n(K) \cong 0$, $n \geq 3$

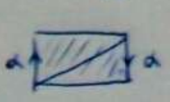
Дакле: $H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 0,1 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ □

- хомологија коју смо добили је иста као хомологија тог простора:



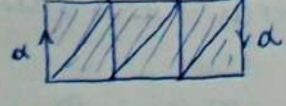
хомотопски еквив.
простори имају
исту хомологију

- Мебијусова трака: 



- није триангулација јер је пресек ова два Δ
две стране једног и другог а треба да буде једна! (или ∅)

- није ни то!
пресек је страна
и још једно теме



- то јесте триангулација!

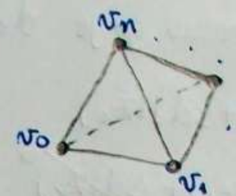
$\Rightarrow 0 \to \mathbb{Z}^6 \to \mathbb{Z}^{12} \to \mathbb{Z}^6 \to 0$

тужно...

$\boxed{2}$ $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ - симплекс димензије n

$K(\sigma) :=$ скуп свих страна симплекса σ - то је симплицијални комплекс

Одредити $H_k(K(\sigma))$, за све $k \in \mathbb{N}_0$.



- $k=0$: $H_0(K(\sigma)) \cong \mathbb{Z}$, јер је путно повезан
- $k \geq 1$: дефинишемо пресликавање

$$s : C_k \to C_{k+1}$$

$$\begin{tikzcd} C_{k+1} \arrow[r] & C_k \arrow[r] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, shift right, "\mathbb{1}"'] \arrow[d, shift left, "0"] & C_{k-1} \arrow[dl, "s"] \\ C_{k+1} \arrow[r] & C_k \arrow[r] & C_{k-1} \end{tikzcd}$$

на генераторима:

уређен симплекс $(v_{i_0}, \dots, v_{i_k}) \in C_k$

$$s(v_{i_0}, \dots, v_{i_k}) := \begin{cases} (v_0, v_{i_0}, \dots, v_{i_k}), & i_0 \neq 0 \\ 0, & i_0 = 0 \end{cases}$$ ← додамо теме

s линеарно продужимо и добијамо хомоморфизам

Желимо да покажемо да је ланчаста хомотопија између $\mathbb{1}$ и 0

$$ds(v_{i_0}, \dots, v_{i_k}) = \begin{cases} d(v_0, v_{i_0}, \dots, v_{i_k}), & i_0 \neq 0 \\ 0, & i_0 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (v_{i_0}, \dots, v_{i_k}) - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (v_0, v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_j}}, \dots, v_{i_k}), & i_0 \neq 0 \\ 0, & i_0 = 0 \end{cases}$$

$$sd(v_{i_0}, \dots, v_{i_k}) = s\Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j (v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_j}}, \dots, v_{i_k})\Big)$$ ← ово s дејствује на C_{k-1}

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (v_0, v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_j}}, \dots, v_{i_k}), & i_0 \neq 0 \\ (\underset{\overset{\shortparallel}{v_{i_0}}}{v_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}), & i_0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (ds+sd)(v_{i_0}, \dots, v_{i_k}) = (v_{i_0}, \dots, v_{i_k})$ ← важи за сваки генератор, па важи и на целом C_k

$\Rightarrow (ds+sd)(a) = a = \mathbb{1}(a) - 0(a), \ \forall a \in C_k$

$\Rightarrow$ s је ланчаста хомотопија између $\mathbb{1}$ и 0

$\mathbb{1} \simeq 0 \Rightarrow \mathbb{1}_* = 0_*$

Сада можемо израчунати хомологију:

За $\forall k \geq 1$, и $\forall [z_k] \in H_k(K)$ важи:

(прво, знамо да је $dz_k = 0$)

$[z_k] \in H_k = {}^{\ker d_k}/_{\operatorname{im} d_{k+1}}$

$\xrightarrow{d_{k+1}} C_k \xrightarrow{d_k}$

$$
\begin{aligned}
z_k &= (ds + sd)(z_k) \\
&= ds(z_k) + \cancel{sd(z_k)}^{0} \\
&= ds(z_k) \\
&\in \operatorname{im} d_{k+1}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow [z_k] = 0$

$\Rightarrow H_k(K) = 0, \ \forall k \geq 1$

Заједно:

$$
\boxed{H_k(K) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}}
$$

$\boxed{3.}$ σ - n-димензионални симплекс

→ $K = K(\sigma)$ придружени симплицијални комплекс

за $0 \le m \le n$ уочавамо

m-скелетон: $K^{(m)} = \{\tau \in K \mid \dim \tau \le m\} = \{\tau < \sigma \mid \tau \text{ страна } \sigma, \dim \tau \le m\}$

Одредити хомолошке групе скелетона $K^{(m)}$, за све $m \in \{1, \ldots, n-1\}$.

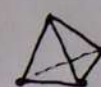
пр.

σ - пун тетраедар

$K^{(0)}$:

4 тачке

$K^{(1)}$:



6 дужи

$K^{(2)}$: омотач тетраедра

Знамо да за K важи: $H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$ (претходни задатак)

$$\begin{tikzcd}
C_*(K): 0 \arrow[r] & C_n(K) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(K) \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_{m+1}(K) \arrow[r, "d_{m+1}"] & C_m(K) \arrow[r, "d_m"] \arrow[d, equal] & C_{m-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & C_1(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_0(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
C_*(K^{(m)}): 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & C_m(K^{(m)}) \arrow[r, "d_m'"] & C_{m-1}(K^{(m)}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_1(K^{(m)}) \arrow[r] & C_0(K^{(m)}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

исте групе и исти хомоморфизми!

$\Rightarrow H_i(K^{(m)}) \cong H_i(K)$, за све $i \le m-1$

и $H_i(K^{(m)}) \cong 0$, за све $i \ge m+1$

Једино треба одредити $H_m(K^{(m)}) = ?$

Све ове групе C_i су слободне; имају коначну базу

Рачунамо колико можемо $H_m(K^{(m)})$:

$$H_m(K^{(m)}) = \ker d_m' / 0 = \ker d_m' = \ker d_m \cong \operatorname{im} d_{m+1} \cong \mathbb{Z}^{a_m}, \text{ за неко } a_m \in \mathbb{N}_0$$

јер на том месту $0 = H_m(K) = \ker d_m / \operatorname{im} d_{m+1}$ (хомологија $C_*(K)$)

$\operatorname{im} d_{m+1} < C_m(K)$ па као подгрупа слободне групе коначног ранга, и она је таква

$a_m = \operatorname{rank}(\operatorname{im} d_{m+1})$

Користимо лему из алгебре:

A, B - Абелове, слободне коначно генерисане ($\mathbb{Z}^n$)

$f: A \to B$ хомоморфизам $\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(\ker f) + \operatorname{rank}(\operatorname{im} f)$ (Т. о рангу и дефекту в.п.)

Вратимо се :) : $H_m(K^{(m)}) \cong \operatorname{im} d_{m+1} \cong \mathbb{Z}^{a_m = \operatorname{rank}(\operatorname{im} d_{m+1})}$

$C_i(K) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{i+1}} \leftarrow = \operatorname{rank}|C_i(K)|$ $1 \le i \le n-1$ $\qquad \dots \to C_{m+1}(K) \xrightarrow{d_{m+1}} C_m(K) \xrightarrow{d_m} C_{m-1}(K) \to \dots C_1(K) \to C_0(K) \to 0$

из трећи. леммије: $\operatorname{rank}(C_i(K)) = \underbrace{\operatorname{rank}(\ker d_i)}_{\substack{\shortparallel \\ \operatorname{rank}(\operatorname{im} d_{i+1})}} + \underbrace{\operatorname{rank}(\operatorname{im} d_i)}_{a_{i-1}} = a_i + a_{i-1}$

за $1 \le i \le n-1$ јер

$0 \cong H_i(K) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$

$\xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1}$

$\Rightarrow$ за $1 \le i \le n-1$: $\binom{n+1}{i+1} = a_i + a_{i-1}$ $\qquad a_i = \operatorname{rank}(\operatorname{im} d_{i+1})$

Желимо да решимо ову рекурентну:

$0 \to \underbrace{C_n(K)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(K) \to \dots$

$\underbrace{H_n(K)}_{\text{знамо да је } =0} \cong \ker d_n$ $\Rightarrow \ker d_n = 0$ $\quad (\Rightarrow d_n \ne 0)$

лемија $\Rightarrow \operatorname{im} d_n \cong \mathbb{Z}$ $\qquad \underbrace{\operatorname{rank}(\operatorname{im} d_n)}_{\Rightarrow\ = 1} + \underbrace{\operatorname{rank}(\ker d_n)}_{0} = \operatorname{rank} C_n = 1$

$\Rightarrow a_{n-1} = 1$

сада решавамо: $i = n-1$: $\binom{n+1}{n} = 1 + a_{n-2} \Rightarrow a_{n-2} = n$

... индукцијом добијамо: $\boxed{a_i = \binom{n}{i+1}}$

$\Rightarrow H_m(K^{(m)}) \cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{m+1}}$

$$\Rightarrow \boxed{H_i(K^{(m)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}^{\binom{n}{m+1}}, & i=m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$$

□

* $m = n-1$: $H_i(K^{(n-1)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

а $K^{(n-1)} \approx S^{n-1}$ па је то хомологија сфере :)