Марија Ћ.

Урадимо још један задатак из хомолошке алгебре.

$\boxed{1.}$ (ЛЕМА О ЛЕПТИРУ)

Дат је комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама, такав да су низови по дијагоналама тачни ($\operatorname{im} h_1 = \ker g_2$, $\operatorname{im} h_2 = \ker g_1$)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "h_1"] \arrow[dd, "f_1"'] & & C \arrow[dl, "h_2"'] \arrow[dd, "f_2"] \\
& E \arrow[dl, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\
B & & D
\end{tikzcd}$$

Доказати да важи:

$$\operatorname{im} g_1/\operatorname{im} f_1 \cong \operatorname{im} g_2/\operatorname{im} f_2 \quad (1)$$

Решење:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"'] & {} \arrow[dl, "g_1"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{im} g_1/\operatorname{im} f_1 \overset{?}{=} \operatorname{im} g_1/\operatorname{im}(g_1 \circ h_1)$$
$$= \operatorname{im} g_1/g_1(\operatorname{im} h_1)$$
$$\overset{\text{тачност}}{=} \operatorname{im} g_1/g_1(\ker g_2)$$

Аналогно важи: $\operatorname{im} g_2/\operatorname{im} f_2 = \operatorname{im} g_2/g_2(\ker g_1)$

Дакле, желимо да докажемо да важи:

$$\operatorname{im} g_1/g_1(\ker g_2) \overset{?}{\cong} \operatorname{im} g_2/g_2(\ker g_1) \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
\operatorname{im} g_1 & & \operatorname{im} g_2
\end{tikzcd}$$

Дефинишимо:

$$\varphi : \operatorname{im} g_1/g_1(\ker g_2) \to \operatorname{im} g_2/g_2(\ker g_1)$$

$$e \in E: \quad \varphi([g_1(e)]) := [g_2(e)]$$

$\boxed{\varphi \text{ добро дефинисано}}$

нека је $[g_1(e)] = [g_1(i)]$, за неке $e, i \in E$

што значи да: $g_1(e) - g_1(i) \in g_1(\ker g_2)$

$\iff (\exists x \in \ker g_2)\ g_1(e) - g_1(i) = g_1(x)$

$\overset{g_1 \text{ хомо.}}{\iff} (\exists x \in \ker g_2)\ e - i - x \in \ker g_1$

$\Rightarrow \underbrace{g_2(e-i-x)}_{=\, g_2(e) - g_2(i) - \cancel{g_2(x)}^{0}} \in g_2(\ker g_1)$ тј. $g_2(e) - g_2(i) \in g_2(\ker g_1)$

$\Rightarrow [g_2(e)] = [g_2(i)]$

$\boxed{\varphi \text{ је хомоморфизам}}$

за вежбу - лако :)

$\boxed{\varphi \text{ је НА}}$ очигледно ✓

јер је „погођена" свака класа $[g_2(e)]$

$\boxed{\varphi \text{ је 1-1}}$ претпоставимо да важи $\boxed{\varphi[g_1(e)] = 0}$

(желимо да докажемо да је $[g_1(e)] = 0$)

$$0 = \varphi[g_1(e)]$$

$$= [g_2(e)]$$

$$\Rightarrow g_2(e) \in g_2(\ker g_1)$$

$$\Rightarrow (\exists x \in \ker g_1) \quad g_2(e) = g_2(x)$$

$$e - x \in \ker g_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{g_1(e-x)}_{= g_1(e) - \cancel{g_1(x)}} \in g_1(\ker g_2)$$

$$\Rightarrow g_1(e) \in g_1(\ker g_2)$$

па $\boxed{[g_1(e)] = 0}$ $\Rightarrow$ φ јесте ‚1-1' ✓

Све заједно, φ је изоморфизам група

$\Rightarrow$ важи (2) и лема је доказана. □

~ Хомологија ланчастих комплекса ~

~ Теорија ~

- (C_*, d) - л.к. Абелових група

$$\dots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \dots$$

$$\underbrace{\operatorname{im} d_{n+1}}_{\substack{B_n\text{-група}\\ \text{граница}}} < \underbrace{\ker d_n}_{\substack{Z_n\text{-група}\\ \text{цикала}}}$$

$B_n(C_*)$ $\quad Z_n(C_*)$ - прецизније

Све су Абелове, па можемо посматрати количничку групу

$$H_n(C_*) := Z_n(C_*)/B_n(C_*)$$ - n-та хомолошка група ланчастог комплекса

$[a]+[b]=[a+b]$
...
$[x]=0 \iff x=dy$
... $(x \in \operatorname{im} d_{n+1})$

$\underbrace{[z_n]}_{\text{класа}} \in H_n(C_*)$ $\quad z_n \in Z_n(C_*) \iff d_n z_n = 0$

$\underline{dz_n = 0}$ - тако пишемо јер знамо који делује

- $\phi: C_* \to C_*'$ - ланчасто пресликавање
индукује $\phi_*: H_n(C_*) \to H_n(C_*')$
$$\phi_*([z_n]) := [\phi(z_n)]$$
Показује се да је ϕ_* хомоморфизам група.

$H_n: C_* \to H_n(C_*)$, $\phi \to \phi_*$
је функтор, тј.
$1_* = 1$
$(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$

- $0 \to C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \to 0$ - низ ланчастих комплекса и ланчастих пресликавања се назива кратак тачан низ ако за $\forall n \in \mathbb{N}$
$$0 \to C_n \xrightarrow{\phi_n} D_n \xrightarrow{\psi_n} E_n \to 0$$ - кратак т.н. Абелових група и хомоморфизама.

- **ЦИК-ЦАК лема** $0 \to C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \to 0$ - кратак т.н. ланч. комплекса и л.п.
Тада $\exists$ дуги т.н. хомолошких група:
$$\dots \to H_n(C_*) \xrightarrow{\phi_*} H_n(D_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(E_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C_*) \to \dots$$

(доказано на предавањима) □

- **ПРИРОДНОСТ**
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_* \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D_* \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E_* \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*' \arrow[r, "\phi'"'] & D_*' \arrow[r, "\psi'"'] & E_*' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
- комутативан дијаграм л.к. и л.п. при чему су хоризонтале кратки т.н.

$\Rightarrow$ Тада комутира и дијаграм хомолошких група:
$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(C_*) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(D_*) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "\beta_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(E_*) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{n-1}(C_*) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(C_*') \arrow[r, "\phi_*'"'] & H_n(D_*') \arrow[r, "\psi_*'"'] & H_n(E_*') \arrow[r, "\partial_*'"'] & H_{n-1}(C_*') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Требало је бити док. на предавањима, иако кад знамо ∂_* и ∂_*' из цик-цак.
Пробати за домаћи. ☺

1. (други доказ змијске леме ☺, али са нулама!)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

- комутативан дијаграм аб. група и хомоморфизама при чему су водоравни низови тачни.

=> ∃ тачан низ облика:

$$0 \to \ker\alpha \xrightarrow{\tilde{f}} \ker\beta \xrightarrow{\tilde{g}} \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar{\psi}} \operatorname{coker}\gamma \to 0$$

допунимо:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 & \leftarrow \text{ниво } 1 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d] & E \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \leftarrow \text{ниво } 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & C_* & D_* & E_* & & \end{tikzcd}$$

- Вертикале су ланчасти комплекси (композ. два верт. пресл. је 0)
- Хоризонтале су кратки т. н.
- све комутира

=> имамо $0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$ за цик-цак лему

=> ∃ дуги т. низ у хомологији

$$0 \to H_1(C_*) \to H_1(D_*) \to H_1(E_*) \to H_0(C_*) \to H_0(D_*) \to H_0(E_*) \to 0$$

јер у дим 2 у E_* стоји 0 па су све хомологије 0 и онда и $H_2(E_*) \cong 0$

јер у дим −1 у C_* стоји 0

$H_1(C_*) = \ker\alpha / \operatorname{im} 0 \cong \ker\alpha$

$H_1(D_*) \cong \ker\beta$, $H_1(E_*) \cong \ker\gamma$ сл.

$H_0(C_*) \cong \ker 0 / \operatorname{im}\alpha = D/\operatorname{im}\alpha = \operatorname{coker}\alpha$

сл. остали

=> $0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0$ т. н. ∎

(може да се види и да су ова пресликавања баш $\tilde{f}, \tilde{g}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}$)

2. Нека је дата фамилија ланчастих комплекса $\{C^\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$:

$$C^\alpha: \quad \dots \to C^\alpha_{n+1} \xrightarrow{d^\alpha_{n+1}} C^\alpha_n \xrightarrow{d^\alpha_n} C^\alpha_{n-1} \to \dots$$

Уочимо ланчасти комплекс: $C := \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} C^\alpha$, $C_n = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} C^\alpha_n$, $d_n := \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} d^\alpha_n$

$$C: \quad \dots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \dots$$

Доказати да је $H_n(C) \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(C^\alpha)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

- како изгледа типичан елемент ?

$C_n \ni \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha$, $x^\alpha \in C^\alpha_n$ – коначна сума, тј. из свих сем кон. мн. елемената су $=0$

$$d_n\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha\Big) = \underbrace{\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} d_n^\alpha(x^\alpha)}_{\text{опет коначна сума}}$$

Директно се провери да ово јесте л. комплекс. (јер свако поштује свој простор α)

$H_n(C) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$

Дефинишимо $\phi: \ker d_n \to \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(C^\alpha)$

$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha \in \ker d_n$ $\quad \phi\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha\Big) := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \underbrace{[x^\alpha]}_{\in H_n(C^\alpha)}$

- деф. је добра, тј. имамо класе јер $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha \in \ker d_n$ $\iff d_n^\alpha(x^\alpha)=0, \forall\alpha \iff x^\alpha \in \ker d_n^\alpha, \forall\alpha \Rightarrow$ имамо класе !
- ϕ је хомоморфизам - директно !
- ϕ је 'НА' (опет директно, произв. ел. $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(C^\alpha)$ ...)

I т. о изоморфизмима: $\ker d_n / \ker\phi \cong \operatorname{im}\phi$

$$\ker d_n / \ker\phi \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(C^\alpha)$$

Покажимо да: $\ker\phi = \operatorname{im} d_{n+1}$:

$\supset$: $\phi d_{n+1}\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha\Big) = \phi\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} d^\alpha_{n+1} x^\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \underbrace{[d^\alpha_{n+1} x^\alpha]}_{=0 \text{ у } H_n(C^\alpha) \text{ јер је граница!}} = 0$

C: $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^\alpha \in \ker \phi$

$\phi(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha) = 0$ tj. $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} [x^\alpha] = 0$

$\Rightarrow \forall \alpha: [x^\alpha] = 0$ u $H_n(C^\alpha)$

$\Rightarrow (\forall \alpha)(\exists y^\alpha \in C^\alpha_{n+1})\ d^\alpha_{n+1} y^\alpha = x^\alpha$

(uzećemo $y^\alpha = 0$ ako $x^\alpha = 0$)

uočimo: $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} y^\alpha \in C_{n+1}$ (za sve sem kon. mnogo je $=0$)

$d_{n+1}(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} y^\alpha) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} d^\alpha_{n+1} y^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x^\alpha$ ✓

$\Rightarrow \ker\phi \subset \operatorname{im} d_{n+1}$, pa su „=" uz pret. x.

$\Rightarrow \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(C^\alpha)$

$\Rightarrow \boxed{H_n(C) \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(C^\alpha)}$

* Koristi se za računanje: $H_n(\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha) \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(X_\alpha)$ (singularna homologija)