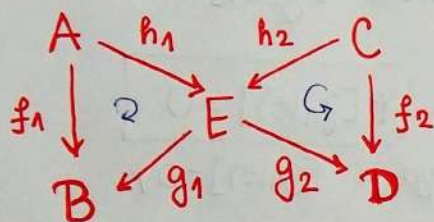


Урадило још један задатак из хомолошке алгебре.

Марија Јм.

1. ЛЕМА О ЛЕПТИРУ

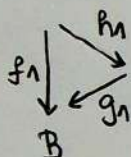
Дати је комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама, иако да су изводи са дијаграма нулти ($\text{im } h_1 = \ker g_2$, $\text{im } h_2 = \ker g_1$)



Доказати да важи:

$$\text{im } g_1 / \text{im } f_1 \cong \text{im } g_2 / \text{im } f_2 \quad (1)$$

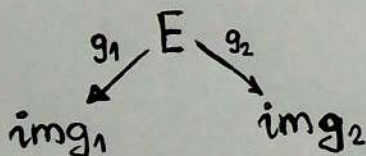
Решење:



$$\begin{aligned} \text{im } g_1 / \text{im } f_1 &\stackrel{2}{=} \text{im } g_1 / \text{im } (g_1 \circ h_1) \\ &= \text{im } g_1 / g_1(\text{im } h_1) \\ &\stackrel{\text{такође}}{=} \text{im } g_1 / g_1(\ker g_2) \end{aligned}$$

Аналогно важи: $\text{im } g_2 / \text{im } f_2 = \text{im } g_2 / g_2(\ker g_1)$

Дакле, желимо да докажемо да важи: $\left\{ \text{im } g_1 / g_1(\ker g_2) \stackrel{?}{=} \text{im } g_2 / g_2(\ker g_1) \right\} \quad (2)$



Дефинишимо:

$$\varphi: \text{im } g_1 / g_1(\ker g_2) \rightarrow \text{im } g_2 / g_2(\ker g_1)$$

$$e \in E: \varphi([g_1(e)]) := [g_2(e)]$$

φ добро дефинисано

нека је $[g_1(e)] = [g_1(i)]$, за неке $e, i \in E$

то знаш да: $g_1(e) - g_1(i) \in g_1(\ker g_2)$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in \ker g_2) \quad g_1(e) - g_1(i) = g_1(x)$$

g_1 хомо.

$$\Leftrightarrow (\exists x \in \ker g_2) \quad e - i - x \in \ker g_1$$

$$\Rightarrow \underline{g_2(e - i - x)} \in g_2(\ker g_1)$$

$$\underline{g_2(e) - g_2(i) - g_2(x)}$$

$$\text{од } g_2(e) - g_2(i) \in g_2(\ker g_1)$$

$$\Rightarrow \underline{[g_2(e)] = [g_2(i)]} \quad \checkmark$$

φ је хомоморфизам

за везбу - лако ☺

φ је л.а.

очигледно ✓

јер је „повучена“ свака класа $[g_2(e)]$

φ је 1-1

претицавамо да бачи

$$\boxed{\varphi[g_1(e)] = 0}$$

(жељимо да докажемо да је $[g_1(e)] = 0$)

$$0 = \varphi[g_1(e)]$$

$$= [g_2(e)]$$

$$\Rightarrow g_2(e) \in g_2(\ker g_1)$$

$$\Rightarrow (\exists x \in \ker g_1) \quad g_2(e) = g_2(x)$$

$$e - x \in \ker g_2$$

$$\Rightarrow g_1(e - x) \in g_1(\ker g_2)$$

$$\parallel$$
$$g_1(e) - g_1(x)$$

$$\Rightarrow g_1(e) \in g_1(\ker g_2)$$

$$\text{и} \quad \boxed{[g_1(e)] = 0}$$

$\Rightarrow \varphi$ јесте „1-1“ ✓

Ве заједно, φ је изоморфизам група

$\Rightarrow$ важи 12) и лема је доказана. $\square$



~ Хомологија ланчасних комплекса ~

~ Теорија ~

(C_*, d) - л.к. Абелових група
 $\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$

$\text{im } d_{n+1} \subset \text{ker } d_n$

B_n -група граница Z_n -група цикла

$B_n(C_*)$ $Z_n(C_*)$ - прецизније

се су идеале, па можемо конструисати количник групу

$H_n(C_*) := Z_n(C_*) / B_n(C_*)$

- n -та хомолошка група ланчасног комплекса

$[a] + [b] = [a+b]$

$[x] = 0 \Leftrightarrow x = dy$
 $(x \in \text{im } d_{n+1})$

$[z_n] \in H_n(C_*) \quad z_n \in Z_n(C_*) \Leftrightarrow d_n z_n = 0$
класа

$d z_n = 0$ - тако пишемо јер знамо коју дељује

- $\phi: C_* \rightarrow C'_*$ - ланчасно пресликавање индукује $\phi_*: H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*)$
 $\phi_*([z_n]) := [\phi(z_n)]$

$H_n: C_* \rightarrow H_n(C_*)$, $\phi \rightarrow \phi_*$
 је функција, шј.
 $1_* = 1$
 $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$

показује се да је ϕ_* хомоморфизам група.

- $0 \rightarrow C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \rightarrow 0$ - низ ланчасних комплекса и ланчасних пресликавања се назива краћак ш.н. ако за $\forall n \in \mathbb{N}$
 $0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\phi_n} D_n \xrightarrow{\psi_n} E_n \rightarrow 0$ - краћак ш.н. абелових група и хомоморфизама.

- **ЦИК-ЦАК лема** $0 \rightarrow C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \rightarrow 0$ - краћак ш.н. ланч. комплекса и л.п.

тада $\exists$ дуги ш.н. хомолошких група:

$\dots \rightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{\phi_*} H_n(D_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(E_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C_*) \rightarrow \dots$

(доказано на предавањима) $\square$

ПРИРОДНОСТ

$0 \rightarrow C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \rightarrow 0$ - комутативан дијаграм л.к. и л.п.
 $0 \rightarrow C'_* \xrightarrow{\phi'} D'_* \xrightarrow{\psi'} E'_* \rightarrow 0$ при чему су хоризонталне краћки ш.н.

$\Rightarrow$ тада комутира и дијаграм хомолошких група:

$\dots \rightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{\phi_*} H_n(D_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(E_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_{n-1}(C_*) \rightarrow \dots$

$\alpha_* \downarrow \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \beta_* \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \gamma_* \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \alpha_*$

$\dots \rightarrow H_n(C'_*) \xrightarrow{\phi'_*} H_n(D'_*) \xrightarrow{\psi'_*} H_n(E'_*) \xrightarrow{\partial'_*} H_{n-1}(C'_*) \rightarrow \dots$

Предало је бити док. на предавањима, иако кад знамо ∂_* и ∂'_* из ЦИК-ЦАК. Пробати за докази. $\smile$

1. (групи доказ змијске леме $\exists$, али са нулама!)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \rightarrow 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 & \rightarrow & D & \xrightarrow{\varphi} & E & \xrightarrow{\psi} & F \rightarrow 0 \end{array}$$

-комутативан дијаграм од група и хомоморфизма
при чему су водоравни низови тачни.

$\Rightarrow \exists$ тачан низ облика:

$$0 \rightarrow \ker \alpha \xrightarrow{f} \ker \beta \xrightarrow{\tilde{g}} \ker \gamma \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{\bar{\psi}} \operatorname{coker} \gamma \rightarrow 0$$

допуниш:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \rightarrow & 0 \leftarrow \text{ниво 1} \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & D & \xrightarrow{\varphi} & E & \xrightarrow{\psi} & F & \rightarrow & 0 \leftarrow \text{ниво 0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & (C_*) & & (D_*) & & (E_*) & & \end{array}$$

• Вертикале су ланчани комплекси
(композиција два вертикална пресека је 0)

• хоризонтале су крајњи т.н.

• се комутира

$\Rightarrow$ имамо $0 \rightarrow C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_* \rightarrow 0$
за уик-уик лему

$\Rightarrow \exists$ групе т.н. низ у хомологији

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & H_1(C_*) & \rightarrow & H_1(D_*) & \rightarrow & H_1(E_*) & \rightarrow & H_0(C_*) & \rightarrow & H_0(D_*) & \rightarrow & H_0(E_*) & \rightarrow & 0 \\ | & & & & & & & & & & & & & & | \\ \text{јер у дим 2} & & & & & & & & & & & & & & \text{јер у дим -1} \\ \text{у } E_* \text{ састоји се } 0 & & & & & & & & & & & & & & \text{у } C_* \text{ састоји се } 0 \\ \text{та су све хомологије } 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \text{и онда је } H_2(E_*) \cong 0 & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$H_1(C_*) = \ker d / \operatorname{im} 0 \cong \ker d$$

$$H_1(D_*) \cong \ker \beta, \quad H_1(E_*) \cong \ker \gamma \quad \text{с.н.}$$

$$H_0(C_*) \cong \ker 0 / \operatorname{im} d = D / \operatorname{im} d = \operatorname{coker} d$$

с.н. остали

$$\Rightarrow 0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow \operatorname{coker} \gamma \rightarrow 0 \quad \text{т.н.}$$

□

(може да се види и да су два пресекавања
дани $\tilde{f}, \tilde{g}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}$)



2. Нека је дата фамилија ланчаних комплекса $\{C^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$:

$$C^\alpha: \dots \rightarrow C_{n+1}^\alpha \xrightarrow{d_{n+1}^\alpha} C_n^\alpha \xrightarrow{d_n^\alpha} C_{n-1}^\alpha \rightarrow \dots$$

уочимо ланчани комплекс: $C := \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} C^\alpha$, $C_n := \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} C_n^\alpha$, $d_n := \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} d_n^\alpha$

$$C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

Докажимо да је $H_n(C) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} H_n(C^\alpha)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

• како изгледа типичан елемент?

$$C_n \ni \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} x^\alpha \quad \begin{array}{l} x^\alpha \in C_n^\alpha \\ \text{коначна зума,} \\ \text{и} \text{ из свих сем коначних} \\ \text{елемената су } = 0 \end{array}$$

$$d_n(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} x^\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} d_n^\alpha(x^\alpha) \quad \begin{array}{l} \text{свим коначна} \\ \text{сума} \end{array}$$

Директно се провери да ово јесте л. комплекс. (Јер свако постоје свој морфизм $\cong$)

$$H_n(C) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$$

Дефинишимо $\phi: \ker d_n \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} H_n(C^\alpha)$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} x^\alpha \in \ker d_n \quad \phi(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} x^\alpha) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \underbrace{[x^\alpha]}_{\in H_n(C^\alpha)}$$

• деф. је добра, иј. имамо класе јер $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} x^\alpha \in \ker d_n$

$$\Leftrightarrow d_n^\alpha(x^\alpha) = 0, \forall \alpha \Leftrightarrow x^\alpha \in \ker d_n^\alpha, \forall \alpha \Rightarrow \text{имамо класе!}$$

• ϕ је хомоморфизам - директно!

• ϕ је 'на' (ијет директно, проуз. ел. $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} H_n(C^\alpha) \dots$)

И т. о изоморфизма: $\ker d_n / \ker \phi \cong \operatorname{im} \phi$

$$\ker d_n / \ker \phi \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} H_n(C^\alpha)$$

Покажимо да: $\ker \phi = \operatorname{im} d_{n+1}$:

$$\supset: \phi d_{n+1}(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} x^\alpha) = \phi(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} d_{n+1}^\alpha x^\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \underbrace{[d_{n+1}^\alpha x^\alpha]}_{= 0 \text{ у } H_n(C^\alpha)} = 0$$

јер је тривијал!

$$C: \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} x^\alpha \in \ker \phi$$

$$\phi\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} x^\alpha\right) = 0 \quad \text{iff} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} [x^\alpha] = 0$$

$$\Rightarrow \forall \alpha: [x^\alpha] = 0 \cdot y \neq 1(C^\alpha)$$

$$\Rightarrow (\forall \alpha) (\exists y^\alpha \in C_{n-1}) \quad d_{n-1} y^\alpha = x^\alpha$$

$$(\text{uzetemo } y^\alpha = 0 \text{ ako } x^\alpha = 0)$$

$$\text{uzimamo: } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} y^\alpha \in C_{n-1} \quad (\text{za de sem kon. mnogo je } = 0)$$

$$d_{n-1}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} y^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} d_{n-1} y^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} x^\alpha \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \ker \phi \subset \text{im } d_{n-1}, \quad \text{ta } d_{n-1} = "y_3 \text{ preotk.}"$$

$$\Rightarrow \ker d_n / \text{im } d_{n+1} \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} H_n(C^\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n(C) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} H_n(C^\alpha)}$$

* Koriscimo se za računanje: $H_n\left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha\right) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}} H_n(X_\alpha)$ (singularna homologija)