Марија Јелић Милутиновић

Ланчасти комплекси. Тачни низови.

- **Деф** Ланчасти комплекс (л.к.) Абелових група $C_* = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z} / \text{или } \mathbb{N}}$ је низ аб. група C_n са хомоморфизмима $d_n : C_n \to C_{n-1}$ тд важи: $d_{n-1} \circ d_n = 0$

$$C_* : \dots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \dots$$

или пишемо: $C_* = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, $d : C_* \to C_*$
$d_n : C_n \to C_{n-1}$ – смањује градуацију за 1

тако скраћујемо запис:

(C_*, d) је л.к. $\iff d^2 = 0$

- најчешће $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $C_{-1} = 0$
  тада кажемо да је C_* ненегативан
- C_* је слободан ако су све C_n слободне групе.

Тв. $d_{n-1} \circ d_n = 0 \Rightarrow \operatorname{im} d_n < \ker d_{n-1}$ - очигледно.

- Пресликавања међу овим објектима (морфизми у CAb)

Деф: $C_* = (C_n, d_n)$, $C_*' = (C_n', d_n')$ - два л.к. Аб група

Ланчасто пресликавање $\phi : C_* \to C_*'$ (л.п.) је фамилија хомоморфизама $\phi_n : C_n \to C_n'$ тд. сви дијаграми на слици комутирају:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \dots \\
\arrow[r] & C_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"'] & C_n' \arrow[r, "d_n'"'] & C_{n-1}' \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

тј. $d_n' \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ d_n$

Краће пишемо $\phi \circ d = d \circ \phi$ при чему пазимо на градуацију.

Став Ланчасти комплекси Аб. група и ланчаста пресликавања чине категорију. Она се означава са CAb.

Веома нам је битан следећи алгебарски појам па ћемо се позабавити њиме:

Деф. Низ аб. група и хомоморфизама је **ТАЧАН НА МЕСТУ B**

$\dots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \dots$ ако је $\operatorname{im} f = \ker g$

(Аналогно се дефинише тачност низова в.пр., прстенова и сл.)

Нама ће хомологија „мерити нетачност" на неки начин (тако код л.к. $\operatorname{im} f < \ker g$)

Ако је $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ тачан низ, зовемо га **КРАТАК ТАЧАН НИЗ**.

$\underline{\underline{A}}$: $\ker A = 0 \iff f$ је 1-1
$\underline{\underline{B}}$: $\operatorname{im} f = \ker g$
$\underline{\underline{C}}$: $\operatorname{im} g = \ker 0 = C \iff g$ је НА

} то су услови

☺ $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ тачан $\Rightarrow A \cong B$
f 1-1 + f НА $\Rightarrow f \cong$

Зато волимо тачне низове код којих има пуно нула!

Деф. Кратак тачан низ $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$ се **ЦЕПА** ако је $f(A) = \operatorname{im} f$ директан сабирак групе B, тј. $\exists B' < B$ тд. $B \cong f(A) \oplus B'$

Став. Ако се кратак т.н. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ цепа, онда $B \cong A \oplus C$

Д. цепа се $\Rightarrow B \cong f(A) \oplus B'$

$0 \to A \xrightarrow{f} f(A) \oplus B' \xrightarrow{g} C \to 0$

f 1-1 $\Rightarrow \boxed{f(A) \cong A}$

$\operatorname{im} f = \ker g \Rightarrow g(f(A)) = 0$ и само они иду у нулу

Дефинишимо: $\tilde{g} : B' \to C$
$\tilde{g}(b) := g(\underset{\uparrow}{f(a)} \oplus b)$, за $b \in B'$
било које $a \in A$

Добро је дефинисано јер:

$g(f(a) \oplus b) = g(f(a) \oplus 0) + g(b) = \underbrace{g(f(a))}_{=0} + g(b) = g(b) \Rightarrow \tilde{g}(b) = g(b)$

$\underbrace{\tilde{g}(b_1) = \tilde{g}(b_2)}_{\in B'} \Rightarrow g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 - b_2 \in \ker g = f(A) \Rightarrow \underbrace{b_1 - b_2 \in f(A)}_{\text{а то } \in B'} \overset{\oplus}{\Rightarrow} b_1 - b_2 = 0$
$\Rightarrow \boxed{\tilde{g} \text{ је 1-1}}$

g НА $\Rightarrow (\forall c \in C)\ \exists f(a) + b,\ g(\underset{\in A}{f(a)} + \underset{\in B'}{b}) = c \Rightarrow \tilde{g}(b) = c \Rightarrow \boxed{\tilde{g} \text{ НА}}$

$\tilde{g}$ је хомо јер је g хомо (лако се провери) $\Rightarrow \tilde{g}$ је изо $\Rightarrow \boxed{B' \cong C}$

Дакле, $B \cong A \oplus C$ □

* не мора сваки кратак тачан низ да се цепа:

пр. $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } n} \mathbb{Z}/_n \to 0$

множење са n је 1-1

mod n је НА

$\text{im}(\times n) = \ker(\text{mod } n)$ ✓ тачан је!

Не цепа се јер $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/_n$ ($\mathbb{Z}$ је слободна, нема ел. реда n) ▪

Став. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ кратак тачан низ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "p"] & C \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "j"] & 0 \end{tikzcd}$$

Тада су еквивалентни искази:

1° низ се цепа

2° $\exists$ хомоморфизам $p: B \to A$ тд. $p \circ f = \mathbb{1}_A$

3° — II — $j: C \to B$ тд. $g \circ j = \mathbb{1}_C$

Д. $1° \Rightarrow 2°, 3°$:

цепа се $\Rightarrow B \cong f(A) \oplus B'$
$\cong A \oplus C$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & C \arrow[r] & 0 \\ & & f(A) \oplus B' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

можемо поистоветити B и $f(A) \oplus B'$ ради једноставности

дефинишемо:

- $p: B \to A$

$p(\underbrace{f(a) + d}) := a$

јединствено представљање (f, 1-1, сума $\oplus$) $\Rightarrow$ добро дефинисано

за вежбу - проверити да је хомоморфизам

$p \circ f(a) = p(f(a)) = p(f(a) + \underset{\in B'}{0}) = a \Rightarrow \boxed{p \circ f = \mathbb{1}_A}$

- $j: C \to B$

$c \in C \xrightarrow{g\text{ на}} \exists (f(a) + b') \in f(A) + B'$ тд. $c = g(f(a) + b') = g(b')$

зато дефинишемо

$j(c) := b'$

као у доказу $B \cong A \oplus C$ видимо да $\neg\exists\, \underset{\in B'}{b''} \neq b'$ тд. $g(b'') = c$ јер би у супр. морало $\underbrace{b' - b''}_{\in B'} \in \ker g = f(A) \ldots$

← заправо знамо да је $g|_{B'}: B' \to C$ изоморфизам па узимамо $j = (g|_{B'})^{-1}$ ☺

$g(j(c)) = g(b') = c \Rightarrow \boxed{g \circ j = \mathbb{1}_C}$

Дакле, $1° \Rightarrow 2°, 3°$.

Још обрнуто →

$2° \Rightarrow 1°$: Претпоставимо да $\exists$ такво p, $p \circ f = \mathbb{1}_A$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Доказаћемо да $B \cong f(A) \oplus \ker p$

$x \in B$

$$x = \underbrace{f(p(x))}_{\in f(A)} + \underbrace{x - f(p(x))}_{\text{покажимо да } \in \ker p:}$$

$$p(x - f(p(x))) = p(x) - \underbrace{p \circ f}_{\mathbb{1}_A} \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0 \checkmark$$

још да је сума директна, треба нам $\ker p \cap f(A) = \{0\}$:

$$f(a) \in \ker p \Leftrightarrow \underbrace{p(f(a))}_{\mathbb{1}_A(a)} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow \boxed{B \cong f(A) \oplus \ker p}$, па се низ цепа.

$3° \Rightarrow 1°$: Претпостављамо да $\exists j$, $g \circ j = \mathbb{1}_C$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "j"] & 0 \end{tikzcd}$$

Доказаћемо да $B \cong \underbrace{\ker g}_{= f(A)} \oplus \operatorname{im} j$

$x \in B$:

$$x = \underbrace{j(g(x))}_{\in \operatorname{im} j} + \underbrace{(x - j(g(x)))}_{\in \ker g \text{ јер } g(\cdot\cdot) = 0}$$

још да је $\operatorname{im} j \cap \ker g = \{0\}$:

$$j(c) \in \ker g \Rightarrow \underbrace{g(j(c))}_{\mathbb{1}_C(c)} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \operatorname{im} j \cap \ker g = \{0\}$$

$\Rightarrow B \cong \ker g \oplus \operatorname{im} j$ тј. $\boxed{B \cong f(A) \oplus \operatorname{im} j}$, па се низ цепа. □

Последица. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ тачан низ аб. група

C – слободна

$\Rightarrow$ овај низ се цепа.

Д. C – слободна (облика $\langle S \mid - \rangle$)

$\Rightarrow$ можемо дефинисати j и довољно је дефинисати на генераторима

$c \in C$ генератор $\quad g$ на $\Rightarrow (\exists b \in B)\ g(b) = c$ (изаберемо један такав b)

дефинишемо $j(c) := b$

$\forall$ ген. даље линеарно проширимо

биће хомоморфизам јер је група слободна.

Пошто на генер. важи $g \circ j = \mathbb{1}$, важи и на целој групи

$\overset{\text{став}}{\Rightarrow}$ низ се цепа. □

Steenrod 5-лема

Нека је дат комутативан дијаграм аб. група и хомоморфизама:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"', "\text{НА}"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"', "1-1"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

при чему су хоризонтале тачни низови.

Ако су f_2 и f_4 изо, f_1 епи, f_5 моно $\Rightarrow$ f_3 је изоморфизам.

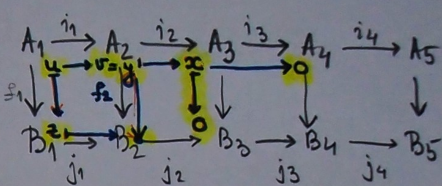
1-1 нека $x \in A_3$, $f_3(x)=0 \overset{?}{\Rightarrow} x=0$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "i_3"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & ? \arrow[d, "f_4"] \\ 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

f_4 је изо (1-1) $\Rightarrow$ $\boxed{?=0}$

$i_3(x)=0 \Rightarrow x \in \ker i_3 \underset{\text{тачност}}{=} \operatorname{im} i_2$

$\Rightarrow (\exists y \in A_2)\ i_2(y)=x$



$$\begin{tikzcd} & y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & x \arrow[d] \\ z \arrow[r, mapsto] & ? \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

тачност ту $\Rightarrow (\exists z \in B_1)\ j_1(z)=f_2(y)$

f_1 је НА $\Rightarrow (\exists u \in A_1)\ f_1(u)=z$

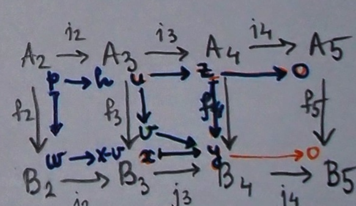
Нека је $i_1(u)=v$. Покажимо да $v=y$:

$f_2(v)=f_2(i_1(u)) \overset{?}{=} j_1(f_1(u)) = j_1(z) = f_2(y)$ $\quad$ f_2 изо (1-1) $\Rightarrow v=y$

$\Rightarrow$ $u \xrightarrow{i_1} y \xrightarrow{i_2} x$ $\quad$ $x = \underbrace{i_2 \circ i_1}_{\substack{=0 \\ \text{тачност}}}(u) = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{f_3 \text{ је 1-1}}$

циљ био :)

НА $x \in B_3$. Тражимо неког ко се у њега слика.



$j_3(x)=y \underset{\substack{f_4 \text{ изо} \\ (\text{НА})}}{\Longrightarrow} (\exists z \in A_4)\ f_4(z)=y$

$j_4(y)=\underbrace{j_4 \circ j_3}_{\substack{=0 \\ \text{тач.}}}(x)=0$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, mapsto, "i_4"] \arrow[d, "f_4"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & ? \arrow[d, "f_5"] \\ y \arrow[r, mapsto, "j_4"'] & 0 \end{tikzcd}$$

f_5 1-1 $\Rightarrow$ $?=0$

тачност

$\operatorname{im} i_3 = \ker i_4 \Rightarrow (\exists u \in A_3)\ i_3(u)=z$

$f_3(u)=v$, комутативност

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & z \arrow[d] \\ v & y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow j_3(v)=y$

$\Rightarrow j_3(v)=j_3(x)$

$\Rightarrow x-v \in \ker j_3 = \operatorname{im} j_2 \Rightarrow (\exists w \in B_2)\ j_2(w)=x-v$

f_2 изо (НА) $\Rightarrow (\exists p \in A_2)\ f_2(p)=w$

нека $i_2(p)=h$

Тада:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, mapsto] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & h \\ w \arrow[r, mapsto] & x-v \end{tikzcd}$$

$2 \Rightarrow f_3(h)=x-v \ (= f_3(u))$

$\Rightarrow f_3(u+h)=x \Rightarrow \boxed{f_3 \text{ је НА}}$

1. Дат је комутативан дијаграм абелових група и хомоморфизама:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "②"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & F & \end{tikzcd}$$

при чему су водоравни низови тачни.

Доказати да постоји тачан низ облика:

$$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma$$

($\operatorname{coker}\alpha = D/\operatorname{im}\alpha$ – можемо сећи по било којој подгрупи јер је група абелова, па су све подгрупе нормалне)

$$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma$$

треба га направити

лепше

$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma$

$\operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma$

Која су нам ово пресликавања:

- $\tilde f, \tilde g$ – рестрикује f и g, редом. Да ли су добро деф., тј. кодомени?

  $a \in \ker\alpha \quad \beta(f(a)) \overset{(1)}{=} \varphi(\alpha(a)) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow f(a) \in \ker\beta$ ✓ $\Rightarrow \tilde f$ добро! Сл. $\tilde g$ добро!

- $\bar\varphi, \bar\psi$ – ?

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ D \arrow[r, "\varphi"'] & E \end{tikzcd}$$

$\bar\varphi : \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta$

$\bar\varphi[d] := [\varphi(d)]$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\pi_2"] \\ \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "\bar\varphi"'] & \operatorname{coker}\beta \end{tikzcd}$$

$\operatorname{coker}\alpha = D/\operatorname{im}\alpha$, $\operatorname{coker}\beta = E/\operatorname{im}\beta$

$\bar\varphi$ добро деф.: $d - d' \in \operatorname{im}\alpha$

$$\bar\varphi[d] - \bar\varphi[d'] = [\varphi(d)] - [\varphi(d')] = [\varphi(d) - \varphi(d')] = [\underbrace{\varphi(\underbrace{d-d'}_{\in \operatorname{im}\alpha})}_{\in \operatorname{im}\beta}] = 0 \text{ у } E/\operatorname{im}\beta$$

јер $\to$ $\varphi\circ\alpha = \beta\circ f$ ✓

$\bar\varphi$ хомоморфизам: $\bar\varphi[d_1] + \bar\varphi[d_2]$

$= [\varphi(d_1)] + [\varphi(d_2)]$

$= [\varphi(d_1) + \varphi(d_2)] = [\varphi(d_1 + d_2)] = \bar\varphi[d_1 + d_2] = \bar\varphi([d_1] + [d_2])$ ✓

Слично, $\bar\psi : \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$ $\bar\psi[e] := [\psi(e)]$ је добро дефинисано и хомоморфизам.

- $\partial : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$

$c \in \ker\gamma \overset{\text{тач. } C}{\Longrightarrow} (\exists b \in B)\ g(b) = c$

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, mapsto] & c \\ & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ D \arrow[r, "\varphi"] & E \arrow[r, "\psi"] & F \\ d \arrow[r, mapsto] & * & \end{tikzcd}$$

$\psi(\beta(b)) = \gamma(g(b)) = \gamma(c) = 0$

$\Rightarrow \beta(b) \in \ker\psi = \operatorname{im}\varphi \Rightarrow (\exists d \in D)\ \varphi(d) = \beta(b)$

Дефинишемо: $\partial(c) := [d] \in \operatorname{coker}\alpha$

Добро дефинисано: $b' \in B$, $g(b') = c$; $d' \in D$, $\varphi(d') = \beta(b')$ – узмемо још по једног

Да ли важи $[d] = [d']$? у $\operatorname{coker}\alpha$

тј. да ли $d - d' \in \operatorname{im}\alpha$

☺

у G/H

$[a] + [b] = [a + b]$

$[a] = a + H$

$[b] = b + H$

$[a+b] = a + b + H$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"] & E \arrow[r, "\psi"'] & F \end{tikzcd}$$

$a \to b, b' \xrightarrow{g} c$; d, d'

$g(b)=g(b')$

$\Rightarrow b-b' \in \ker g = \operatorname{im} f$ (тачност)

$\Rightarrow (\exists a\in A)\ f(a)=b-b'$

$\varphi(\alpha(a)) \overset{?}{=} \beta(f(a)) = \beta(b-b') = \underbrace{\beta(b)}_{\varphi(d)} - \underbrace{\beta(b')}_{\varphi(d')} = \varphi(d-d')$

φ је „1-1" (тачност)

$\Rightarrow \alpha(a)=d-d' \Rightarrow d-d' \in \operatorname{im}\alpha \Rightarrow [d]=[d']$ ✓

∂ је хомоморфизам: $c, c_1 \in \ker\gamma$

$\partial(c)=[d]$, $\partial(c_1)=[d_1]$ – добијени поступком (имамо $b, b_1, \dots$)

$\partial(c)+\partial(c_1)=[d]+[d_1]=[d+d_1]$

покажимо да је $d+d_1$ представник класе која се добија поступком који смо описали за елемент $c+c_1$

важи: $\underline{g(b+b_1)}=\underline{c+c_1}$

$\underline{\beta(b+b_1)}=\beta(b)+\beta(b_1)=\varphi(d)+\varphi(d_1)=\underline{\varphi(d+d_1)}$

$\Rightarrow \partial(c+c_1)=[d+d_1]$

$\Rightarrow$ јесте хомоморфизам ✓

Треба доказати тачност на четири места:

- ТАЧНОСТ НА $\ker\beta$: $\operatorname{im}\tilde f \overset{?}{=} \ker\tilde g$! ВАЖНО! имали смо $\boxed{\operatorname{im} f=\ker g}$, али сада морамо за рестрикције!

$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma$

$\subset$: $\operatorname{im}\tilde f \overset{?}{\subset} \ker\tilde g$ тј. $\tilde g\circ\tilde f \overset{?}{=} 0$ да, јер $g\circ f=0$ ✓

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

$\supset$: $b\in\ker\tilde g=\ker g\cap\ker\beta$

доказујемо да $b\in\underline{\operatorname{im}\tilde f}=f(\ker\alpha)$

$\operatorname{im} f=\ker g \Rightarrow (\exists a\in A)\ f(a)=b$

$\underbrace{\beta(f(a))}_{\beta(b)=0} \overset{?}{=} \varphi(\alpha(a)) \xRightarrow{\varphi\ 1\text{-}1} \alpha(a)=0 \Rightarrow a\in\ker\alpha \Rightarrow b\in\operatorname{im}\tilde f$ ✓

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{im}\tilde f=\ker\tilde g}$

SNAKE LEMMA

Наставак:

$$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma$$

• **ТАЧНОСТ НА $\ker\gamma$**

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, mapsto] & c & \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"] & E \arrow[r] & F \\ & d \arrow[r, mapsto] & \cdot & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{im}\tilde g \subset \ker\partial$: $b \in \ker\beta$

$\operatorname{im}\tilde g = g(\ker\beta)$

$\partial(\tilde g(b)) = \partial(g(b)) = [d]$ где $\varphi(d) = \underbrace{\beta(b)}_{=0}$

$\Rightarrow d = 0$ јер је φ „1-1"

$\Rightarrow \partial(\tilde g(b)) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{im}\tilde g \subset \ker\partial$ ✓

$\operatorname{im}\tilde g \supset \ker\partial$: $c \in \ker\partial \iff c \in \ker\gamma,\ \partial c = 0$

$\partial c = [d] = 0$ где $d \in D$, $\varphi(d) = \beta(b)$, $g(b) = c$

Али нама није довољно $b \in B$, треба нам $b' \in \ker\beta$ који иде у c!

$\Downarrow$

$d \in \operatorname{im}\alpha$

$\Rightarrow (\exists a \in A)\ \alpha(a) = d$

Уочимо елемент $b - f(a) \in B$ — користујемо :)

$\beta(b - f(a)) = \beta(b) - \beta(f(a)) \overset{?}{=} \beta(b) - \varphi(\alpha(a)) = \beta(b) - \varphi(d) = 0$

$\Rightarrow b - f(a) \in \ker\beta$

$\tilde g(b - f(a)) = g(b - f(a)) = g(b) - \underbrace{g(f(a))}_{=0 \text{ тачност}} = g(b) = c$

$\Rightarrow c \in \operatorname{im}\tilde g$ ✓

• **ТАЧНОСТ НА МЕСТУ $\operatorname{coker}\alpha$:**

→ $\operatorname{im}\partial \subset \ker\bar\varphi$: $c \in \ker\gamma$

$\bar\varphi(\partial c) = \bar\varphi[d] = [\varphi(d)] = [\beta b] = 0$ у $\operatorname{coker}\beta$:)

где $\varphi d = \beta b$, $gb = c$

$\Rightarrow \bar\varphi \circ \partial = 0$ ✓

* често пишемо без заграда $\beta b, \partial c$...

→ $\operatorname{im}\partial \supset \ker\bar\varphi$: Нека $[d] \in \operatorname{coker}\alpha$ тд. $\bar\varphi[d] = 0$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\beta"] & gb \\ d \arrow[r, "\varphi"] & \cdot \end{tikzcd}$$

$0 = \bar\varphi[d] = [\varphi(d)] \Rightarrow \varphi(d) \in \operatorname{im}\beta$ тј. $(\exists b \in B)\ \beta b = \varphi(d)$

Ако је $g(b)$ у $\ker\gamma$ (домен ∂), онда је по конструкцији $\partial(g(b)) = [d]$

а то важи јер:

$\gamma(g(b)) = \psi(\beta(b)) = \underbrace{\psi(\varphi(d))}_{\text{тачност}} = 0$ $\Rightarrow [d] \in \operatorname{im}\partial$ ✓

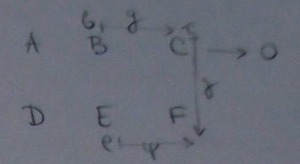
• ТАЧНОСТ НА МЕСТУ $\operatorname{coker}\beta$: $\quad \overset{D}{\operatorname{coker}\alpha} \xrightarrow{\bar\varphi} \overset{E}{\operatorname{coker}\beta} \xrightarrow{\bar\psi} \overset{F}{\operatorname{coker}\gamma}$

$\operatorname{im}\bar\varphi \subset \ker\bar\psi$: $\quad \bar\psi\bar\varphi[d] = \bar\psi[\varphi(d)] = [\underbrace{\psi\circ\varphi(d)}_{=0 \text{ због тачности}}] = [0] = 0$ ✓

$\operatorname{im}\bar\varphi \supset \ker\bar\psi$: нека је $[e] \in \operatorname{coker}\beta$ тд. $\bar\psi[e]=0$ тј. $[\psi(e)]=0$

$\Rightarrow \psi(e) \in \operatorname{im}\gamma$ – по def сечемо

тј. $(\exists c \in C)\ \psi(e) = \gamma(c)$



g је НА $\Rightarrow (\exists b \in B)\ g(b) = c$

Уочимо $e - \beta b$:

$\psi(e-\beta b) = \psi(e) - \psi(\beta(b)) \overset{?}{=} \psi(e) - \gamma(g(b)) = \psi(e) - \gamma(c) = 0$

$\Rightarrow e - \beta b \in \ker\psi = \operatorname{im}\varphi$

$\Rightarrow (\exists d \in D)\ \varphi(d) = e - \beta b$

Тада важи: $\bar\varphi([d]) = [\varphi(d)] = [e - \underbrace{\beta b}_{\in \operatorname{im}\beta}] = [e] \Rightarrow [e] \in \operatorname{im}\bar\varphi$ ✓

$\Rightarrow$ $\boxed{\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma \text{ је ТАЧАН НИЗ}}$

Приметимо да важи:

f 1-1 $\Rightarrow \tilde f$ '1-1' ; ψ 'НА' $\Rightarrow \bar\psi$ 'НА'

(јер рестрикција) $\qquad$ ($[h] \in \operatorname{coker}\gamma$ $\quad \psi$-НА $\Rightarrow (\exists e \in E)\ h = \psi(e)$

$\Rightarrow \bar\psi[e] = [\psi(e)] = [h]$ ✓)

Зато ако имамо:

комутативан дијаграм аб. група и хомоморфизама

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

тд. су хоризонтале тачни низови,

онда постоји тачан низ облика:

$$0 \to \ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma \to 0$$

Много лакши доказ овог тврђења ћемо извести помоћу ЦИК-ЦАК леме.

$\boxed{2}$ Нека је дат тачан низ аб. група и хомоморфизама:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

Доказати да постоји природан изоморфизам $\operatorname{coker} f \xrightarrow{\cong} C$

I теорема о изоморфизмима за g:

$$B/\ker g \cong \operatorname{im} g \underset{\text{тачност}}{=} C$$

$$\text{тач.}\ \| \qquad B/\operatorname{im} f \qquad \| \qquad \operatorname{coker} f \qquad \Rightarrow \operatorname{coker} f \cong C$$

овај изоморфизам се остварује помоћу g:

$$[b] \longrightarrow g(b)$$

ПРИРОДНОСТ:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

све комутира (ланчаста пресл.)

Треба доказати да комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker} f \arrow[r, tail, two heads, "1-1\ \text{НА}"] \arrow[d, "\bar\beta"'] \arrow[dr, phantom, "3"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
\operatorname{coker} \bar f \arrow[r, tail, two heads] & C'
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{coker} f = B/\operatorname{im} f$

$\operatorname{coker} f' = B'/\operatorname{im} f'$

њега имамо због комутативности 1

Потпуно исто као у знаке вежби је добро деф.

и хомоморфизам

$\bar\beta[b] = [\beta(b)]$

3:

$$\begin{tikzcd}
{[b]} \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, "\bar\beta"'] & g(b) \arrow[d] \\
& \gamma(g(b)) \arrow[d, phantom, "\|"] \\
{[\beta(b)]} \arrow[r, mapsto] & g'(\beta(b))
\end{tikzcd}$$

— због комутативности 2

$\Rightarrow$ 3 комутира

$\Rightarrow$ имамо природност

$\square$

Домаћи:

$0 \to A \to B \xrightarrow{f} C$ тачан низ $\Rightarrow \exists$ природни изоморфизам $A \xrightarrow{\cong} \ker f$.