Теорема (Lusternik-Schnirelmann)

$$S^n = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n \qquad A_i \in \mathcal{F}_{S^n},\ i=0,1,\dots,n$$

тада бар један од ових скупова садржи пар антиподалних тачака, тј. $\exists i \in \{0,1,\dots,n\}$ тако да $\operatorname{diam} A_i = 2$.

Доказ: Дефинишимо:

$$f: S^n \to \mathbb{R}^n$$

$$f(x) := \big(d(x,A_1),\dots, d(x,A_n)\big)$$

f непрекидно ✓

$$\text{БУТ} \Rightarrow \exists \tilde{x} \in S^n \ \ f(\tilde{x}) = f(-\tilde{x})$$

тј $\tilde{x}$ мора припадати неком A_j, $j \in \{0,1,\dots,n\}$

- ако $\exists j \in \{1,2,\dots,n\}$

$$f(\tilde{x}) = f(-\tilde{x}) \Longrightarrow \underbrace{d(\tilde{x},A_j)}_{=0} = d(-\tilde{x},A_j)$$

$$\Rightarrow d(-\tilde{x},A_j) = 0 \xrightarrow{A_j \text{ затворен}} -\tilde{x} \in A_j$$

Дакле $\tilde{x}, -\tilde{x} \in A_j$ ✓

- ако $\tilde{x} \notin A_1 \cup \dots \cup A_n$

$$\underset{\text{затворени}}{\Rightarrow} \quad d(\tilde{x},A_i) > 0, \ \ \forall i = 1,\dots,n$$

$$\|$$

$$d(-\tilde{x},A_i) \Rightarrow -\tilde{x} \notin A_1 \cup \dots \cup A_n$$

Закључујемо да тада и $\tilde{x}$ и $-\tilde{x}$ морају припадати A_0, чиме је доказ завршен :)

$\square$

(!!) Теорема важи и ако су сви скупови отворени или сваки је или отворен или затворен (тј. и тада мора постојати скуп који садржи пар антиподалних тачака).

⊛ $f: S^d \to \mathbb{R}^d$ непрекидно антиподално $(f(-x) = -f(x),\ \forall x \in S^d)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in S^d \quad f(x_0) = 0$$

Доказ: БУТ $\Rightarrow \exists x_0 \quad f(x_0) = f(-x_0)$

антиподално $\quad = -f(x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0) = 0 \qquad \square$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (о подели огрлице, Hobby-Rice theorem)

$\mu_1,\dots,\mu_d$ - непрекидне вероватносне мере на $[0,1]$

Тада постоји подела $[0,1]=I_1\sqcup I_2\sqcup\dots\sqcup I_d\sqcup I_{d+1}$ на $d+1$ интервала помоћу **d** подеоних тачака и постоје знаци $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{d+1}\in\{+1,-1\}$ тако да

за сваку меру μ_i, $i=1,\dots,d$ важи:

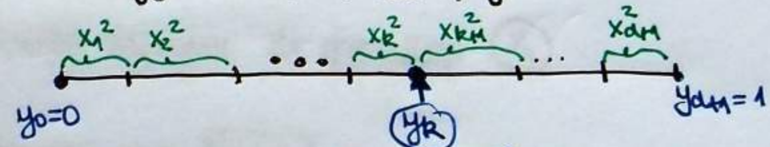
$$\sum_{j=1}^{d+1}\varepsilon_j\cdot\mu_i(I_j)=0$$

☺ интерпретација:
$+\to$ 1. лопов
$-\to$ 2. лопов

услов $\iff \sum_{\substack{j=1,\dots,d+1\\ \varepsilon_j=1}}\mu_i(I_j)=\sum_{\substack{j=1,\dots,d+1\\ \varepsilon_j=-1}}\mu_i(I_j)$ оба лопова добијају исто!

Доказ: $x=(x_1,\dots,x_d,x_{d+1})\in S^d$

$x_1^2+\dots+x_{d+1}^2=1 \longmapsto$ подела $[0,1]$ на $d+1$ делова дужине $x_1^2,\dots,x_{d+1}^2$ редом



$y_k=x_1^2+\dots+x_k^2$

$0=y_0\le y_1\le\dots\le y_{d+1}=1$

$I_j:=[y_{j-1},y_j]$ ← који знак да узмемо? $\text{sgn}\,x_j$

$\rightsquigarrow g:S^d\to\mathbb{R}^d$

по координатама: $i=1,\dots,d$ $\quad g_i(x):=\sum_{j=1}^{d+1}\text{sgn}\,x_j\cdot\mu_i([y_{j-1},y_j])$

$g(x)=(g_1(x),\dots,g_d(x))$

g непрекидно … ✓

g је антиподално: $g(-x)=-g(x)$ ✓

(*) $\Rightarrow \exists\,\tilde{x}\in S^d \quad g(\tilde{x})=0$

тачка $\tilde{x}$ тада тачно одређује тражену поделу!

☺ ако распоредимо мере редом, видимо да је d резова неопходно:

• Доказати да за све $n \geq 1$ простор $\mathbb{R}P^n$ није ретракт простора $\mathbb{R}P^{n+1}$.

Пробаћемо неколико приступа да видимо шта дају:

преко хомологије

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \text{ и } k=n \text{ за } 2\nmid n \\ \mathbb{Z}_2, & 0<k<n,\ 2\nmid k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

ппс. $\exists$ ретракција $r: \mathbb{R}P^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}P^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{R}P^{n+1} \arrow[d, "r"] \\ & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd} \xrightarrow{H_n} \begin{tikzcd} H_n(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_* = \mathbb{1}"'] & H_n(\mathbb{R}P^{n+1}) \arrow[d, "r_*"] \\ & H_n(\mathbb{R}P^n) \end{tikzcd}$$

овако можемо урадити за $\underline{\underline{2\nmid n}}$

$\boxed{2\nmid n}$: дијаграм H_n постаје:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad ↯ \quad \Rightarrow \text{ за } 2\nmid n \ \mathbb{R}P^n \text{ није ретракт } \mathbb{R}P^{n+1}$$

за $2|n$ неће помоћи ниједан H_* функтор ☹

ПРЕКО СФТ такође можемо доказати за $\boxed{2\nmid n}$:

$n = 2k-1$

ппс. $\underline{\mathbb{R}P^{2k-1} \text{ ретракт } \mathbb{R}P^{2k}}$

$\mathbb{R}P^{2k}$ има СФТ (веће) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}P^{2k-1}$ има СФТ.

Покажимо да постоји пресликавање $g: \mathbb{R}P^{2k-1} \to \mathbb{R}P^{2k-1}$ које нема ФТ.

$S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$ $\quad f: S^{2k-1} \to S^{2k-1}$

$f(z_1, \dots, z_k) := (iz_1, \dots, iz_k)$

непрекидно ✓

$$\begin{tikzcd} S^{2k-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & S^{2k-1} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{R}P^{2k-1} \arrow[r, dashed, "g"] & \mathbb{R}P^{2k-1} \end{tikzcd}$$

Дефинишимо $g: \mathbb{R}P^{2k-1} \to \mathbb{R}P^{2k-1}$

$g[x] := [f(x)]$ тј. $g \circ p = \overbrace{p \circ f}^{\text{непр.}}$ $\Rightarrow$ g непрекидно ✓

композицијско

(добро дефинисано...)

Покажимо да g нема ФТ:

ако $\exists x \in S^{2k-1}$ $\quad g[x]=[x]$

$\Rightarrow \quad [x]=[f(x)]$

$\Rightarrow \quad x=f(x) \quad \vee \quad x=-f(x)$

$z_i = i z_i, \forall i$
$\Rightarrow z_i = 0$
$\Rightarrow x = 0 \notin S^{2k-1}$
$\lightning$

$z_i = -i z_i, \forall i$
поново $x = 0 \notin S^{2k-1}$
$\lightning$

$\Rightarrow$ g нема фиксну тачку

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}P^{2k-1}$ нема СФТ, па не може бити ретракт $\mathbb{R}P^{2k}$. $\square$

$\boxed{\text{ПРЕКО ХОМОТОПСКИХ ГРУПА}}$

за све n доказ :)

$$\pi_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \wedge n=1 \\ \mathbb{Z}_2, & i=1 \wedge n>1 \\ \pi_i(S^n), & i>1 \wedge n>0 \end{cases}$$

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} 0, & i<n \\ \mathbb{Z}, & i=n \\ \text{нешто ??} \end{cases}$$

<u>$n>1$</u>:

ппс. $\mathbb{R}P^n$ ретракт $\mathbb{R}P^{n+1}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}P^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "1"'] & \mathbb{R}P^{n+1} \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd} \xrightarrow{\ \pi_n\ } \begin{tikzcd} \pi_n(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "1_* = 1"'] & \pi_n(\mathbb{R}P^{n+1}) \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \pi_n(\mathbb{R}P^n) \end{tikzcd} \rightarrow \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "1"'] & 0 \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

контрадикција! $\lightning$

<u>$n=1$</u>: слично:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{R}P^1) \arrow[r] \arrow[dr, "1"'] & \pi_1(\mathbb{R}P^2) \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \pi_1(\mathbb{R}P^1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "1"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \lightning$$

$\square$

ДРУГИ ДОКАЗ ЗА СВЕ n (помоћу својства да S^n није ретракт D^{n+1})

Посматрајмо: $\mathbb{R}P^n$ као количник простор од S^n: $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$

$\mathbb{R}P^{n+1}$ — || — од D^{n+1}: $D^{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^{n+1}$

(идентификација на рубу)

Комутира први правоугаоник:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D^{n+1} \arrow[r, dashed, "\tilde r"] \arrow[d, "\pi"] & S^n \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{R}P^n \arrow[r, hook, "i'"] & \mathbb{R}P^{n+1} \arrow[r, "r"] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

Претпоставимо супротно, да $\exists$ ретракција $r: \mathbb{R}P^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$

$r \circ i' = \mathbb{1}_{\mathbb{R}P^n}$

Имамо:

$$\begin{tikzcd}
 & S^n \arrow[d, "p"] \\
D^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\tilde r"] \arrow[r, "r\circ\pi"'] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

p - наткривање

$\pi_1(D^{n+1}) = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $\exists$ подизање $r\circ\pi \to \tilde r: D^{n+1} \to S^n$

$p \circ \tilde r = r \circ \pi$

Идеја: докажимо да је $\tilde r$ ретракција, или да је $\alpha\circ\tilde r$ ретракција где је $\alpha: S^n \to S^n$ $x \mapsto -x$ антиподално пресликавање

$x \in S^n$ $\quad p(\tilde r(x)) = p\circ\tilde r \circ i(x) = r\circ\pi\circ i(x) = \underbrace{r\circ i'}_{=\mathbb{1}_{\mathbb{R}P^n}}\circ p(x) = p(x)$

$\Rightarrow p(\tilde r(x)) = p(x)$

тј. $[\tilde r(x)] = [x]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tilde r(x) \in \{x, -x\},\ \forall x \in S^n}$

Покажимо да се не могу појавити тачке обе врсте:

$A = \{x \in S^n \mid \tilde r(x) = \mathbb{1}_{S^n}(x)\}$

$B = \{x \in S^n \mid \tilde r(x) = \alpha(x)\}$ $\qquad S^n = A \sqcup B$

непр. ф-је $\tilde r$, $\mathbb{1}$ и α, кодомен T_2-простор $\Rightarrow$ $A, B \in \mathcal{F}_{S^n}$

S^n повезан $\Rightarrow$ $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$

(1) $A = \emptyset \Rightarrow \tilde r(x) = \alpha(x),\ \forall x \in S^n$

$\Rightarrow \alpha\circ\tilde r(x) = x,\ \forall x \in S^n$

$\Rightarrow \alpha\circ\tilde r: D^{n+1} \to S^n$ је ретракција $\lightning$

(2) $B = \emptyset \Rightarrow \tilde r(x) = x,\ \forall x \in S^n \Rightarrow \tilde r$ је ретракција $\lightning$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}P^n$ није ретракт $\mathbb{R}P^{n+1}$ $\square$