• Наћи простор X тј. је:

а) $$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,4 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4, & n=1 \\ \mathbb{Z}^2, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

б) $$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_5, & n=17 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & n=22 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

а) $H_0(X)\cong\mathbb{Z} \iff X$ путно повезан

уочимо Y:

$$0\to\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle \to 0$$

$d_1(\alpha)=0 \Rightarrow \ker d_1=\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$

$d_2(\sigma)=4\alpha \Rightarrow \operatorname{im} d_2=\mathbb{Z}\langle 4\alpha\rangle$

$\Downarrow$

$\ker d_2=0 \Rightarrow H_2(Y)=0$

$$H_1(Y)\cong \frac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle}{\mathbb{Z}\langle 4\alpha\rangle}\cong\mathbb{Z}_4$$

$$\Rightarrow H_n(Y)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0\\ \mathbb{Z}_4, & n=1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

узимо: $\boxed{X = Y\vee Y\vee S^1\vee S^2\vee S^2\vee S^4}$ (сферама додамо тачно једно $\mathbb{Z}$ где хоћемо :))

имамо овде:

$Y=D^2\cup_f S^1_\alpha \quad \deg f=4 \ \to\ Y=M(\mathbb{Z}_4,1)$

општије: $Y=D^{n+1}\cup_f S^n$, $\deg f=k$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

ћелијски л.к.: $$0\longrightarrow\mathbb{Z}\langle e^{n+1}\rangle\xrightarrow{d_{n+1}}\mathbb{Z}\langle e^n\rangle\to 0\to 0\to\dots\to 0\to\mathbb{Z}\langle e^0\rangle\to 0$$

$d_{n+1}(e^{n+1})=\deg f\cdot e^n=k\cdot e^n$

$\Rightarrow \ker d_{n+1}=0 \Rightarrow H_{n+1}(Y)\cong 0$

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{im} d_{n+1}=k\mathbb{Z}\langle e^n\rangle=\mathbb{Z}\langle k\cdot e^n\rangle\\ \ker d_n=\mathbb{Z}\langle e^n\rangle\end{array}\right\}\Rightarrow H_n(Y)\cong\mathbb{Z}_{|k|}$ - k може бити и негативно

у свим осталим дим, сем 0 имамо тривијалну хомологију

$$\Rightarrow H_i(Y)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0\\ \mathbb{Z}_{|k|}, & i=n\\ 0, & \text{иначе}\end{cases} \quad \text{тј.}\quad \tilde{H}_i(Y)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_{|k|}, & i=n\\ 0, & i\neq n\end{cases}$$

Општије, за произвољну Абелову групу G и $n\in\mathbb{N}$, може се конструисати CW-комплекс X такав да је $\tilde{H}_i(X)\cong\begin{cases}G, & i=n\\ 0, & i\neq n\end{cases}$ - X се назива Муров простор (Moore) $M(G,n)$

Ми смо конструисали $\underbrace{M(\mathbb{Z}_k,n)}_{Y}$. Помоћу букета можемо добити за коначно генерисане групе G

б) $\boxed{X=M(\mathbb{Z}_5,17)\vee M(\mathbb{Z}_2,22)\vee S^{22}}$ сл.

$D^{18}\cup_f S^{17}$, $\deg f=5$

Теорема о универзалним коефицијентима: X-т.п. $G \in AB$

$\Rightarrow$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ постоји кратак тачан низ који се цепа:

$$0 \to H_n(X) \otimes G \longrightarrow H_n(X;G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G) \to 0$$

цепа се $\Rightarrow$ $H_n(X;G) \cong H_n(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G)$

☺ $\otimes$ и Tor су комутативни и дистрибутивни у односу на директну суму

$\mathbb{Z} \otimes G \cong G \qquad \mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{НЗД(m,n)}$

$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, G) \cong 0 \qquad \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{НЗД(m,n)}$

- X-т.п. са хомологијом: $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, n=0,4 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4, n=1 \\ \mathbb{Z}^2, n=2 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

  $H_k(X;\mathbb{Z}_2) = ?$, $k \in \mathbb{N}_0$

$H_0(X;\mathbb{Z}_2) \cong H_0(X) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ Tor отпада

$H_1(X;\mathbb{Z}_2) \cong H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(H_0(X), \mathbb{Z}_2)}_{0} \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

увек слободна!
$\mathbb{Z}$ због комут. дут. ове.

$H_2(X;\mathbb{Z}_2) \cong H_2(X) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \mathrm{Tor}(H_1(X), \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2)$

$\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2)$

$\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2^4$

$H_3(X;\mathbb{Z}_2) \cong \underbrace{0 \otimes \mathbb{Z}_2}_{0} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\underset{\text{слоб.}}{\mathbb{Z}^2}, \mathbb{Z}_2)}_{0} \cong 0$

$H_4(X;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(0, \mathbb{Z}_2)}_{0} \cong \mathbb{Z}_2$

$H_5(X;\mathbb{Z}_2) \cong 0 \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\overset{H_4}{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_2)}_{0} \cong 0$

$H_k(X;\mathbb{Z}_2) \cong 0$, $k \geq 6$ јер $H_k(X), H_{k-1}(X) \cong 0$

• X - тпп. $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, n=0 \\ \mathbb{Z}_5, n=17 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, n=22 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$ $\quad H_k(X;\mathbb{Z}_3)=?$ $\quad H_k(X;\mathbb{Z}_5)=?$

$H_k(X;\mathbb{Z}_2)$ има шансе да буде $\neq 0$ за $H_k(X)\neq 0 \vee H_{k-1}(X)\neq 0$!!

$\underline{\underline{\mathbb{Z}_5}}$: $H_0(X;\mathbb{Z}_5)\cong \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_5$

$H_{17}(X;\mathbb{Z}_5)\cong \mathbb{Z}_5\otimes\mathbb{Z}_5\oplus\underbrace{\mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_5)}_{0}\cong\mathbb{Z}_5$

$H_{18}(X;\mathbb{Z}_5)\cong 0\otimes\mathbb{Z}_5\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_5)\cong\mathbb{Z}_5$

$H_{22}(X;\mathbb{Z}_5)\cong(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2)\otimes\mathbb{Z}_5\oplus\mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}_5)\cong(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_5)\oplus\underbrace{(\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_5)}_{0\ (\mathrm{НЗД}=1)}\cong\mathbb{Z}_5$

$H_{23}(X;\mathbb{Z}_5)\cong\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_5)\cong\underbrace{\mathrm{Tor}(\overset{\text{слоб}}{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}_5)}_{0}\oplus\underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_5)}_{\mathrm{НЗД}=1 \Rightarrow 0}\cong 0$

остале $\cong 0$

$\underline{\underline{\mathbb{Z}_3}}$: $H_0(X;\mathbb{Z}_3)\cong\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_3\cong\mathbb{Z}_3$

$H_{17}(X;\mathbb{Z}_3)\cong\mathbb{Z}_5\otimes\mathbb{Z}_3\cong 0$

$H_{18}(X;\mathbb{Z}_3)\cong\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_5,\mathbb{Z}_3)\cong 0$

$H_{22}(X;\mathbb{Z}_3)\cong(\mathbb{Z}\oplus\underbrace{\mathbb{Z}_2)\otimes\mathbb{Z}_3}_{0}\cong\mathbb{Z}_3$

$H_{23}(X;\mathbb{Z}_3)\cong\mathrm{Tor}(\overset{}{\underset{\text{слоб.}}{\mathbb{Z}}}\oplus\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3)\cong 0$ $\quad$ НЗД $=1$

остале $\cong 0$

$\square$

Кинетова формула

X, Y - топ. простори, $n \in \mathbb{N}$. Тада $\exists$ кратак тачан низ који се цепа:

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{n} \left(H_{n-i}(X) \otimes H_i(Y)\right) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tor}\left(H_{n-1-j}(X), H_j(Y)\right) \to 0$$

$$\Rightarrow H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} \underset{\uparrow \text{ збир } n}{H_{n-i}(X) \otimes H_i(Y)} \oplus \bigoplus_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tor}(\underset{\uparrow \text{ збир } n-1}{H_{n-1-j}(X), H_j(Y)})$$

- израчунати хомолошке групе $H_k(\mathbb{R}P^3 \times N_4)$, $k \geq 0$

$$H_i(\mathbb{R}P^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 3 \\ \mathbb{Z}_2, & i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad H_i(N_4) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2, & i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_n(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} H_{n-i}(\mathbb{R}P^3) \otimes H_i(N_4) \oplus \bigoplus_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tor}\left(H_{n-1-j}(\mathbb{R}P^3), H_j(N_4)\right)$$

$$\cong H_n(\mathbb{R}P^3) \overset{i=0}{\otimes} \overset{\cong \mathbb{Z}}{H_0(N_4)} \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}P^3) \otimes \overset{i=1}{H_1(N_4)}$$ – нема више $H_i(N_4)$:)

$$\oplus \underbrace{\operatorname{Tor}(H_{n-1}(\mathbb{R}P^3), \underbrace{H_0(N_4)}_{=\mathbb{Z}})}_{0} \oplus \operatorname{Tor}(\underset{\text{за } n-2 \geq 0 \text{ :)}}{H_{n-2}(\mathbb{R}P^3)}, \underset{\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2}{H_1(N_4)})$$

$$\cong H_n(\mathbb{R}P^3) \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}P^3) \otimes (\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2) \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-2}(\mathbb{R}P^3), \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2)$$

са $\mathbb{Z}$ се анулирају

$$\cong H_n(\mathbb{R}P^3) \oplus (H_{n-1}(\mathbb{R}P^3))^3 \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}P^3) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-2}(\mathbb{R}P^3), \mathbb{Z}_2)$$

$H_0(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong \mathbb{Z}$ (путна пов. :))

$H_n(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong 0$, $n \geq 6$ (јер $n-2 > 3$ - последња нетрив.)

$$H_1(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong H_1(\mathbb{R}P^3) \oplus (H_0(\mathbb{R}P^3))^3 \oplus H_0(\mathbb{R}P^3) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^3 \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2^2$$

$$H_2(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong 0 \oplus (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2} \oplus \operatorname{Tor}(\underbrace{H_0(\mathbb{R}P^3)}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^4$$

$$H_3(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong \mathbb{Z} \oplus (\underset{H_2}{0})^3 \oplus \underbrace{0 \otimes \mathbb{Z}_2}_{0} \oplus \underbrace{\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$H_4(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong 0 \oplus \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Tor}(\overset{H_2}{0}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$H_5(\mathbb{R}P^3 \times N_4) \cong 0 \oplus 0^3 \oplus 0 \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \operatorname{Tor}(\overset{H_3}{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_2) \cong 0$$

$\square$

• Показати да не постоје бројеви $m, n, l \in \mathbb{N}_0$ тд. $S^m \simeq S^n \times S^l$.

хомотопски еквивалентни простори имају исти број компоненти путне повезаности

☺ може преко хомотопских група

$\Rightarrow$ ниједан од бројева m, n и l није 0 !

($m=0$ $S^0 \to 2$ комп. $S^0 \times S^0$ – 4 комп.

$S^{m \geq 1} \to 1$ комп. $S^0 \times S^{l \geq 1}$ – 2 комп.

$S^n \times S^l$ – 1 комп. за $n, l \geq 1$

$\Rightarrow$ једина могућност кад би нешто био 0 је да имамо

$S^0 \simeq S^0 \times S^l$ $\Rightarrow$ $* \simeq S^l$ ↯ $(\tilde{H}^l(S^l) \cong \mathbb{Z} \ncong \tilde{H}^l(*))$

или $S^0 \simeq S^n \times S^0$ ↯ сл.)

Дакле, $m, n, l > 0$:

$$\tilde{H}_k(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_l(S^n \times S^l) \cong \bigoplus_{i=0}^{l} H_{l-i}(S^n) \otimes H_i(S^l) \oplus \underbrace{\bigoplus \mathrm{Tor}(\ldots)}_{\text{сви су 0 јер имамо само слободне групе}}$$

$$\cong H_0(S^n) \otimes H_l(S^l) \quad i=l$$

$$\oplus H_{l-(l-n)}(S^n) \otimes H_{l-n}(S^l) \quad \text{– за } l \geq n$$

$$\cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \otimes H_{l-n}(S^l)}_{\text{за } l \geq n}$$

$$\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \text{можда}}_{\text{нетривијална !}}$$

$$H_{n+l}(S^n \times S^l) \cong \bigoplus_{i=0}^{n+l} H_{n+l-i}(S^n) \otimes H_i(S^l) \quad \text{(опет Tor-ови = 0 због слободних)}$$

$i=l$: $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ $\oplus$ још неке...

$\Rightarrow$ нетривијална !

$0 < l, n \Rightarrow 0 < l < n+l$

како имамо нетрив. хомологије у две дим > 0,

$S^n \times S^l$ није хомотопски сфера ! □

- **Брауерова теорема:** За $\forall n \in \mathbb{N}$ D^n има СФТ (својство фиксне тачке).

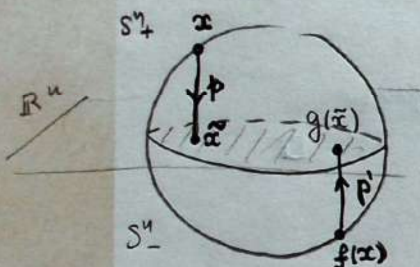
☺ СФТ је инваријанта хомеоморфизма: $X \approx D^n \Rightarrow X$ има СФТ.

- **Борсук-Уламова теорема (БУТ):**

$$\underset{\text{непрекидно}}{f: S^n \to \mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists x_0 \in S^n \quad f(x_0) = f(-x_0)$$

$\Leftrightarrow$ Не постоји непарно непрекидно пресликавање $f: S^n \to S^{n-1}$, тј. пресликавање за које важи: $f(-x) = -f(x), \forall x \in S^n$

$\boxed{1}$ $f: S^n_+ \to S^n_-$ непрекидно пресликавање.
Доказати да постоји $x \in S^n_+$ тд. се првих n-координата тачке x поклапа са првих n координата тачке $f(x)$.



$x = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{x_{n+1}}_{\geq 0}) \in S^n_+$

$\tilde{x} := (x_1, \dots, x_n, 0) \in D^n$ (ово је заправо $i(D^n)$ $i: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$) ☺
$= p(x)$ - пројекција

$p: S^n_+ \to D^n$ је хомеоморфизам (знамо од пре ☺)

слично имамо $p': S^n_- \xrightarrow{\approx} D^n$ пројекција

Дефинишемо: $g: D^n \to D^n$

$$g(\tilde{x}) := \underbrace{p' \circ \underbrace{f \circ \underbrace{p^{-1}(\tilde{x})}_{\text{враћамо се на } S^n_+}}_{\text{сликамо са } f}}_{\text{пројектујемо}} \quad \text{- непрекидно}$$

Брауер $\Rightarrow$ g има ФТ тј. $(\exists \tilde{x} \in D^n)$ $p' \circ f \circ p^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}$ $\quad / p'^{-1}$

$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0)$ $\qquad \Rightarrow f \circ p^{-1}(\tilde{x}) = (p')^{-1}(\tilde{x})$

$p^{-1}(\tilde{x}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, $\quad x_{n+1} \overset{!}{=} \sqrt{1 - \|\tilde{x}\|^2}$

$p'^{-1}(\tilde{x}) = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{-\sqrt{1 - \|\tilde{x}\|^2}}_{= -x_{n+1}})$

$\Rightarrow f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}, x_{n+1}) = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}, -x_{n+1})$ ✓

Чим се пројектују на исту тачку, имају исте првих n координата ☺ □

$\boxed{2}$ $f: S^n \to S^n$ непрекидно, 1-1.

Доказати да је f хомеоморфизам.

- f је НА јер:

ппс. $(\exists y_0 \in S^n)$ $y_0 \notin f(S^n)$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}: S^n \to S^n \setminus \{y_0\} \underset{h}{\cong} \mathbb{R}^n$ $\tilde{f}(x) := f(x)$ добро деф. и непр.

$h \circ \tilde{f}: S^n \to \mathbb{R}^n$ - непрекидно и 1-1 као композиција 2 таква

БУТ: $(\exists x_0 \in S^n)$ $f(x_0) = f(-x_0)$ $\Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ је НА}}$

$\Rightarrow$ $f: \underset{\text{комп.}}{S^n} \to \underset{T_2}{S^n}$ непрекидна бијекција, $\Rightarrow f$ затворено

$\Rightarrow$ f је хомеоморфизам. □