Пример у $\mathbb{R}^4$: $Oe_1e_2e_3e_4$

$\Pi = Oe_1e_2$ $\quad \Gamma = Oe_3e_4$ су две разне равни чији је пресек

$\Pi \cap \Gamma = \{O\}$

(12.) У четвородимензионалном простору одредити међусобни положај равни $\alpha: x_1 + x_2 + 1 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ и $\beta: x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + s$, $x_3 = t - 2s$, $x_4 = 1 + t - s$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(✱) $\alpha: \quad x_1 + x_2 + 1 = 0$

$\qquad x_3 - x_4 = 0$

$\beta: \quad x_1 = 1 + t$

$\qquad x_2 = 2 + s$

$\qquad x_3 = t - 2s$

$\qquad x_4 = 1 + t - s$

Раван β је представљена помоћу параметара t и s.

Помоћу параметарских једначина желимо да представимо и раван α.

α: $x_1 = u$

$x_2 = -1 - u$

$x_3 = v$

$x_4 = v$

$$\alpha = (0,-1,0,0) + \mathcal{L}(e_1, e_2)$$

једна тачка равни α (за $u = v = 0$)

коефицијенти уз u чине један вектор

коефицијенти уз v чине други вектор

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ и они су линеарно независни

$$a e_1 + b e_2 = 0 \overset{?\checkmark}{\Rightarrow} a = b = 0$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a = 0$
$-a = 0$
$b = 0$
$b = 0$

$\Rightarrow$ $a = 0$, $b = 0$

$$\beta = (1,2,0,1) + \mathcal{L}(f_1, f_2)$$

једна тачка равни β (за $s = t = 0$)

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и они су линеарно независни

$$af_1 + bf_2 = 0 \overset{?\checkmark}{\Rightarrow} a = b = 0$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ a - 2b &= 0 \\ a - b &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$$

Нађимо сада $\alpha \cap \beta$.

$$\left.\begin{aligned} u &= 1 + t \\ -1 - u &= 2 + s \\ v &= t - 2s \\ v &= 1 + t - s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad t - 2s = 1 + t - s$$

$$\Downarrow$$

$$s = -1$$

$$-1 - u = 2 - 1$$

$$\boxed{u = -2}$$

$$t = u - 1$$

$$t = -2 - 1$$

$$t = -3$$

$$v = t - 2s$$

$$v = -3 + 2$$

$$\boxed{v = -1}$$

$$\alpha \cap \beta = \{(-2, 1, -1, -1)\}$$

Дакле равни се секу у једној тачки.

Примедба: да бисмо нашли $\dim\langle \alpha\cup\beta\rangle$ довољно је наћи ранг матрице

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ранг ове матрице је 4

$\dim\langle \alpha\cup\beta\rangle = 4$

$\dim\langle \alpha\cup\beta\rangle = \dim\alpha + \dim\beta - \dim \alpha\cap\beta$ из задатка 11 јер $(-2,1,-1,-1)\in \alpha\cap\beta$

$4 = 2+2 - \dim \alpha\cap\beta$

$\Rightarrow \dim \alpha\cap\beta = 0 \Rightarrow$ пресек $\alpha\cap\beta$ није права

Пресек равни α и β је једна тачка па је ово још један пример за задатак 11.

13. Испитати узајамни положај афиних потпростора

$\Pi = (0,-1,6,1) + \mathcal{L}((1,0,-1,0))$ и $\Gamma: 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1$

(*) $\Gamma: 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1$

$x_1 = t$

$x_2 = s$ $\qquad x_4 = \frac{2}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{2}{7}\lambda - \frac{1}{7}$

$x_3 = \lambda$

$t, s, \lambda \in \mathbb{R}$

$\Gamma = \{ (t, s, \lambda, \frac{2}{7}t + \frac{4}{7}s + \frac{2}{7}\lambda - \frac{1}{7}) \mid t, s, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\Gamma = (0,0,0,-\frac{1}{7}) + \mathcal{L}((1,0,0,\frac{2}{7}), (0,1,0,\frac{4}{7}), (0,0,1,\frac{2}{7}))$

$a \cdot (1,0,0,\frac{2}{7}) + b \cdot (0,1,0,\frac{4}{7}) + c \cdot (0,0,1,\frac{2}{7}) = 0 \overset{?\checkmark}{\Longrightarrow} a = b = c = 0$

$a = 0$
$b = 0$
$c = 0$
$\frac{2}{7}a + \frac{4}{7}b + \frac{2}{7}c = 0$ ✓

$\dim \vec{\Gamma} = 3$ јер су вектори $(1,0,0,\frac{2}{7})$, $(0,1,0,\frac{4}{7})$ и $(0,0,1,\frac{2}{7})$ линеарно независни

Da li je $(0,-1,6,1) \in \Gamma$?

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 6 - 7 \cdot 1 \overset{?}{=} 1 \checkmark$$

Da li je $\vec{\Pi} \subset \vec{\Gamma}$?

$$\mathcal{L}((1,0,-1,0)) \subset \mathcal{L}\left(\left(1,0,0,\tfrac{2}{7}\right), \left(0,1,0,\tfrac{4}{7}\right), \left(0,0,1,\tfrac{2}{7}\right)\right)$$

$$(1,0,-1,0) = \alpha \cdot \left(1,0,0,\tfrac{2}{7}\right) + \beta\left(0,1,0,\tfrac{4}{7}\right) + \gamma\left(0,0,1,\tfrac{2}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 0 &= \beta \\ -1 &= \gamma \\ 0 &= \tfrac{2}{7}\alpha + \tfrac{4}{7}\beta + \tfrac{2}{7}\gamma \checkmark \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= -1 \end{aligned}$$

Dakle, $\Pi \subset \Gamma$.

(14.) Нека је Π афини омотач тачака $A(1,1,1,1)$, $B(2,2,0,0)$ и $C(1,2,0,1)$, а Γ афини омотач тачака $D(1,1,1,2)$ и $E(1,1,2,1)$. Одредити узајамни положај Π и Γ и растојање између Π и Γ.

(*)

$$\Pi = \langle A, B, C \rangle$$

$$\Gamma = \langle D, E \rangle$$

$$\Pi = \underbrace{(1,1,1,1)}_{A} + \mathcal{L}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (1,1,1,1) + \mathcal{L}\Big(\underbrace{\underbrace{(1,1,-1,-1)}_{\text{коефицијенти уз } t}, \underbrace{(0,1,-1,0)}_{\text{коефицијенти уз } s}}_{\overrightarrow{\Pi}}\Big)$$

$\overrightarrow{AB}(1,1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}(0,1,-1,0)$

$$a\cdot(1,1,-1,-1) + b\cdot(0,1,-1,0) = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ a+b &= 0 \\ -a-b &= 0 \\ -a &= 0 \end{aligned} \Rightarrow a = b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \Pi = \dim \overrightarrow{\Pi} = 2$$

Параметарска једначина за Π је

$$\begin{aligned} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= 1+t+s \qquad t, s \in \mathbb{R} \\ x_3 &= 1-t-s \\ x_4 &= 1-t \end{aligned}$$

$$\Gamma = \underbrace{(1,1,1,2)}_{D} + \mathcal{L}(\underbrace{\overrightarrow{DE}}_{(0,0,1,-1)}) = (1,1,1,2) + \mathcal{L}((0,0,1,-1))$$

Параметарска једначина за Γ је

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1+\lambda \\ x_4 &= 2-\lambda \end{aligned}$$

Да ли се Π и Γ секу?

$$1+t=1 \quad \Rightarrow \quad t=0$$

$$1+t+s=1 \qquad s=0$$

$$1-t-s=1+\lambda \qquad \lambda=0$$

$$1-t=2-\lambda \qquad 1=2$$ ↯

$$\Rightarrow \Pi \cap \Gamma = \emptyset$$

$$\vec{\Pi} = \mathcal{L}\left((1,1,-1,-1),(0,1,-1,0)\right) \qquad \dim \vec{\Pi} = 2$$

$$\vec{\Gamma} = \mathcal{L}\left((0,0,1,-1)\right) \qquad \dim \vec{\Gamma} = 1$$

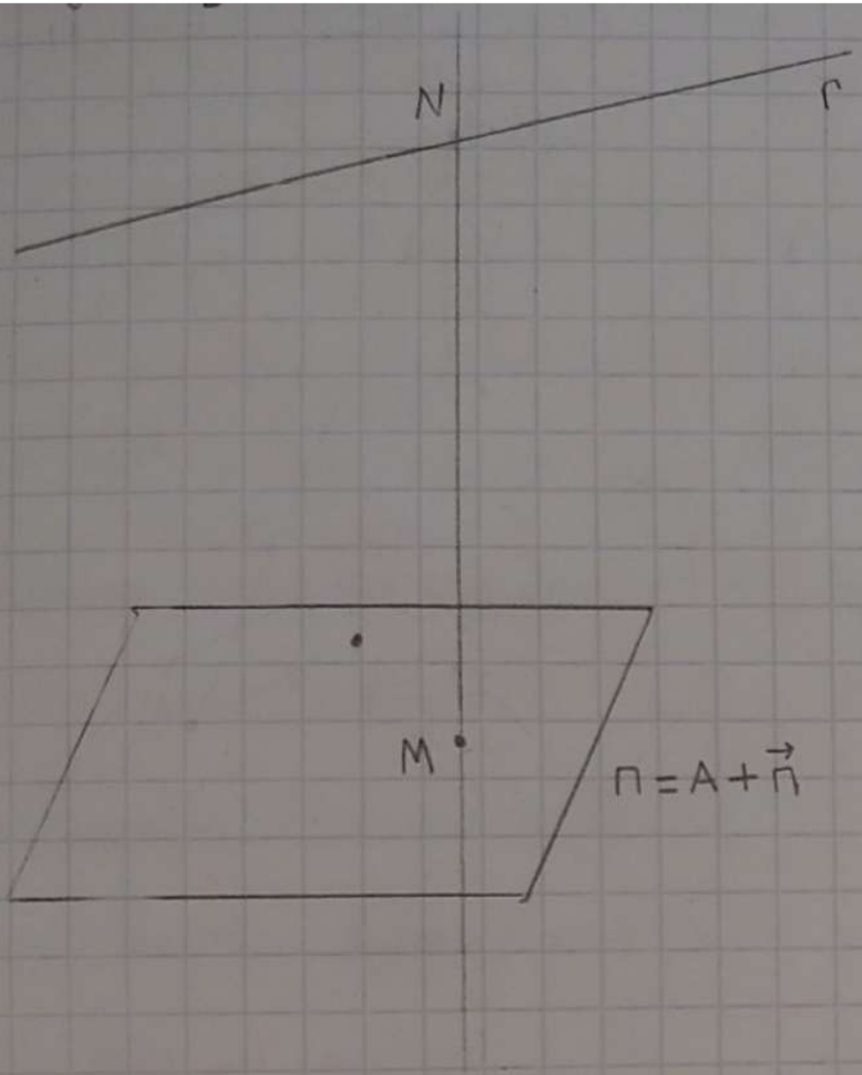
Због малих димензија довољно је проверити само да ли је

$$(0,0,1,-1) \in \mathcal{L}\left((1,1,-1,-1),(0,1,-1,0)\right)$$

$$(0,0,1,-1) = a\cdot(1,1,-1,-1) + b\cdot(0,1,-1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 0 \\ a+b &= 0 \\ -a-b &= 1 \\ -a &= -1 \end{aligned}\right\}$$ ↯ $$\Rightarrow \vec{\Gamma} \not\subset \vec{\Pi}$$

Није, па како су Π и Γ дисјунктни и нису паралелни онда су мимоилазни.



$$M \in \Pi$$

$$M\,(1+t,\ 1+t+s,\ 1-t-s,\ 1-t)$$

$$N \in \Gamma$$

$$N\,(1,1,\ 1+\lambda,\ 2-\lambda)$$

$$\vec{MN}\,(-t,\ -t-s,\ \lambda+t+s,\ 1-\lambda+t)$$

$$\vec{MN} \perp \vec{\Pi} \iff \vec{MN} \perp \vec{AB}, \vec{AC}$$

$$\vec{MN} \perp \vec{\Gamma} \iff \vec{MN} \perp \vec{\Delta E}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{AB} = 0 \iff -t-t-s\underline{-\lambda}-t-s-1\underline{+\lambda}-t=0$$

$$-4t-2s-1=0$$

$$\boxed{2t+s=-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{AC} = 0 \iff -t-s-\lambda-t-s=0$$

$$\boxed{\lambda=-2t-2s}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{\Delta E} = 0 \iff \lambda+t+s-1+\lambda-t=0$$

$$\boxed{2\lambda=1-s}$$

$$2t + s = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda = -2t - 2s$$

$$2\lambda = 1 - s$$

$$-4t - 4s = 1 - s$$

$$-4t - 3s = 1$$

$$2t + s = -\frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$

$$4t + 2s = -1$$

$$-s = 0 \Rightarrow s = 0$$

$$-4t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$$

$$2\lambda = 1 - s \qquad 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$N\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$d(\Pi, \Gamma) = \|\overrightarrow{MN}\| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

15. Ако су $(4,3)$, $(5,4)$, $(2,2)$ и (x,y) координате тачака A, B, C и M у односу на дати репер Oe_1e_2 афине равни $\mathcal{A}$, прво доказати да је (A,B,C) једна афина база те равни, а затим одредити и барицентричне координате уочене тачке M у односу на ту базу.

(*) Узмемо тачку A и фиксирамо је као координатни почетак.

$\vec{AB}(1,1)$ и $\vec{AC}(-2,-1)$ су линеарно независни па (A,B,C) јесте афина база.

$$a(1,1)+b(-2,-1)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a-2b=0 \\ a-b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=a=0$$

$$M=\alpha A+\beta B+\gamma C \quad \text{где } \alpha+\beta+\gamma=1$$

$$(x,y)=(4\alpha+5\beta+2\gamma,\ 3\alpha+4\beta+2\gamma)$$

$$\begin{aligned} 4\alpha+5\beta+2\gamma&=x \quad + \\ 3\alpha+4\beta+2\gamma&=y \quad + \\ \alpha+\beta\boxed{+\gamma}&=1 \quad /\cdot(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta\boxed{+\gamma}&=1 \\ \boxed{\alpha}+2\beta&=y-2 \quad /\cdot(-2) \\ 2\alpha+3\beta&=x-2 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta\boxed{+\gamma}&=1 \\ \boxed{\alpha}+2\beta&=y-2 \\ -\beta&=x-2y+2 \end{aligned}$$

$$\beta=-x+2y-2$$

$$\alpha=y-2-2\beta=y-2+2x-4y+4$$
$$=2x-3y+2$$

$$\gamma=1-\alpha-\beta=1-2x+3y-2+x-2y+2=$$
$$=-x+y+1$$

Тражене барицентричне координате уочене тачке M у односу на базу (A,B,C) су $(2x-3y+2,\ -x+2y-2,\ -x+y+1)$.

16. Ако су (x_r, y_r, z_r) координате тачака A_r у односу на дати репер $O_{e_1e_2e_3}$ афиног простора $\mathcal{A}$ димензије 3 доказати да су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 компланарне ако и само ако је

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

* Тачке A_0, A_1, A_2, A_3 су компланарне ако и само ако су вектори $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ и $\overrightarrow{A_0A_3}$ линеарно зависни а то је еквивалентно са

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

што се и тражило

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overrightarrow{A_0A_1} & \overrightarrow{A_0A_2} & \overrightarrow{A_0A_3} \end{array}$$

Примедба: Приметимо и да је

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \overset{\cdot(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ 0 & x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ 0 & x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} \underset{\det M = \det M^T}{=} \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}$$

17. Чевина и Менелајева теорема

Дат је неки тротеменик ABC и тачке P, Q и R на правима BC, AC и AB такве да се ниједна од тачака P, Q, R не поклапа ни са једним теменом A, B, C тротеменика ABC и да је $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha$, $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta$ и $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \gamma$.

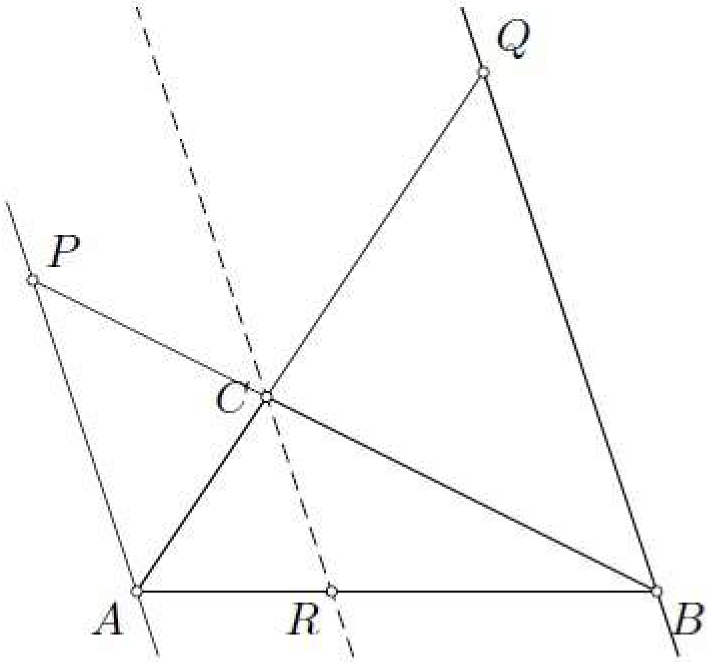
Чевина теорема: Праве AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = 1$.
Менелајева теорема: Тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$.

Решење: Пре свега, приметимо да из услова да се ниједна од тачака P, Q, R не поклапа ни са једним теменом A, B, C тротеменика ABC следи да су бројеви α, β, γ коректно дефинисани. Такође, из услова да се ниједна од тачака P, Q, R не поклапа ни са једним теменом A, B, C тротеменика ABC следи да су бројеви α, β, γ различити од нуле. Заиста, из $P \neq B$ следи да је $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{BP} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC}$, па је $\alpha \neq 0$. Слично из $Q \neq C$ и $R \neq A$ следи да је $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$.

• **Доказ Чевине теореме:**

Тачка P је барицентар $(B, 1)$ и (C, α) јер је $1 \cdot \overrightarrow{PB} + \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ због $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha$, при чему је $1 + \alpha \neq 0$ јер је $\alpha \neq -1$ (да је $\alpha = -1$ било би $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1$, тј. $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$, па би било $B = C$). Тачка Q је барицентар (C, α) и $(A, \alpha\beta)$ јер је $\alpha \cdot \overrightarrow{QC} + \alpha\beta \cdot \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{0}$, тј. $\overrightarrow{QC} + \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{0}$ (доказали смо да је $\alpha \neq 0$), тј. $\overrightarrow{CQ} = \beta \cdot \overrightarrow{QA}$, при чему је $\alpha + \alpha\beta = \alpha(1+\beta) \neq 0$ јер је $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq -1$ (да је $\beta = -1$ имали бисмо $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$, тј. $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{QA}$ и $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{0}$, па би било $C = A$). Праве AP и BQ се не поклапају, јер ако би се праве поклапале, онда би се на истој правој налазиле тачке A, B, P, Q, па и тачка C јер се C налази и на BP и на AQ, а онда ABC не би био тротеменик. Разликујемо два случаја:

1° $AP \parallel BQ$



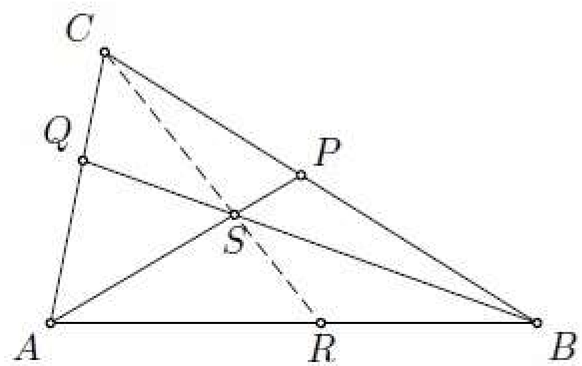
Претпоставимо да је $1+\alpha+\alpha\beta \neq 0$. Тада постоји тачка S која је барицентар тачака $(B,1)$, (C,α) и $(A,\alpha\beta)$ јер је збир маса различит од нуле. На основу тврђења из задатка 1 знамо да се тај барицентар S налази на правој AP, која садржи тачку A и барицентар P тачака $(B,1)$ и (C,α), и да се S налази на правој BQ, која садржи тачку B и барицентар Q тачака (C,α) и $(A,\alpha\beta)$. По претпоставци овог случаја праве AP и BQ су паралелне, па су дисјуктне, јер смо доказали да се AP и BQ не поклапају. Према томе, следи да су праве AP и BQ дисјунктне, па долазимо до контрадикције, јер онда не може постојати тачка која припада и AP и BQ.

Следи да је $1+\alpha+\alpha\beta=0$. Тада је $1+\alpha\beta=-\alpha\neq 0$ јер је $\alpha\neq 0$. Нека је тачка R_1 барицентар тачака $(A,\alpha\beta)$ и $(B,1)$. Тада је $\alpha\beta\cdot\overrightarrow{R_1A}+1\cdot\overrightarrow{R_1B}=\overrightarrow{0}$, па је $\alpha\beta=-\frac{\overrightarrow{R_1B}}{\overrightarrow{R_1A}}=\frac{\overrightarrow{BR_1}}{\overrightarrow{R_1A}}$.

Одавде следи да је $\alpha\beta+1=\frac{\overrightarrow{BR_1}}{\overrightarrow{R_1A}}+\frac{\overrightarrow{R_1A}}{\overrightarrow{R_1A}}=\frac{\overrightarrow{BR_1}+\overrightarrow{R_1A}}{\overrightarrow{R_1A}}=\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{R_1A}}$. Како је $1+\alpha\beta=-\alpha$, следи да је $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AR_1}} = -\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{R_1A}} = -(1+\alpha\beta) = \alpha = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$, односно да је $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AR_1}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде на основу обратне Талесове теореме следи да је $AP \parallel R_1C$.

Пошто су праве AP, BQ и CR_1 паралелне, то следи да је исказ „праве AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне" еквивалентан исказу „нетачно или CR је паралелна са CR_1", а како тачке R и R_1 припадају правој AB, а тачка C јој не припада, то следи да је исказ „праве AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне" еквивалентан исказу „$R = R_1$". Како је $R = R_1$ ако и само ако је $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{AR_1}}{\overrightarrow{R_1B}}$, па пошто је $\alpha\beta \cdot \overrightarrow{R_1A} + 1 \cdot \overrightarrow{R_1B} = \overrightarrow{0}$ зато што је R_1 барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(B, 1)$, то је $\frac{\overrightarrow{AR_1}}{\overrightarrow{R_1B}} = \frac{1}{\alpha\beta}$, па је $R = R_1$ ако и само ако је $\gamma = \frac{1}{\alpha\beta}$, тј. ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = 1$.

2° AP и BQ се секу у некој тачки S



Претпоставимо да је $1 + \alpha + \alpha\beta = 0$. Тада је $\alpha(1+\beta) = -1$, односно $1 + \beta = -\frac{1}{\alpha}$. Приметимо да из $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta$ следи да је $\beta + 1 = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} + \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{QA}}$. Према томе, следи да је $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AQ}} = -\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{QA}} = -(\beta+1) = \frac{1}{\alpha} = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{BP}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}$, односно да је $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AQ}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}$. Одавде на основу обратне Талесове теореме следи да је $AP \parallel QB$. Међутим, како смо доказали да се праве AP и BQ разликују, онда из паралелности ових правих следи да су оне дисјунктне, што је у контрадикцији с претпоставком овог случаја да се праве AP и BQ секу у некој тачки S. Према томе, мора бити $1 + \alpha + \alpha\beta \neq 0$.

У пресеку праве AP, која садржи A и барицентар P тачака $(B,1)$ и (C,α), и праве BQ, која садржи B и барицентар Q тачака (C,α) и $(A,\alpha\beta)$, налази се барицентар тачака $(B,1)$, (C,α) и $(A,\alpha\beta)$, који постоји зато што је $1+\alpha+\alpha\beta \neq 0$. Како се у пресеку правих AP и BQ налази тачка S, следи да је S барицентар тачака $(B,1)$, (C,α) и $(A,\alpha\beta)$. При томе, тачке S и C се разликују, јер ако би било $S = C$, онда би тачка C припадала правој AP, тј. A, P и C би биле колинеарне, међутим, пошто B припада правој PC, онда би A, B, P и C биле колинеарне, а то није тачно. Следи да постоји јединствена права CS која садржи C и S. Пошто C припада CS, а не припада AB, права CS и права AB се не поклапају. Сада опет имамо два случаја:

$2°.1.$ $CS \parallel AB$

Претпоставимо да је $\alpha\beta + 1 \neq 0$. Тада постоји тачка R_1 која је барицентар тачака $(A,\alpha\beta)$ и $(B,1)$. Барицентар S тачака $(A,\alpha\beta)$, $(B,1)$ и (C,α) налази се на правој CR_1 која садржи C и барицентар R_1 тачака $(A,\alpha\beta)$ и $(B,1)$, па тачка R_1 припада правој CS. Пошто R_1 припада и правој AB, због паралелности AB и CS следи да се те две праве поклапају. Међутим, онда су тачке A, B, C колинеарне, а онда ABC не би био тротеменик. Према томе, $\alpha\beta + 1 = 0$, тј. $\alpha\beta = -1$.

Како је $\gamma \neq -1$, то је $\alpha\beta\gamma = -1 \cdot \gamma \neq -1 \cdot (-1) = 1$, тј. $\alpha\beta\gamma \neq 1$. С друге стране, како је CS паралелна с AB и различита од AB, то су CS и AB дисјунктне, а како R припада AB, то следи да R не припада CS, па ни S не припада CR. Како се праве AP и BQ секу у тачки S, која не припада правој CR, то следи да праве AP, BQ и CR нису ни конкурентне ни паралелне, тј. исказ „AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне" није тачан. Како је и $\alpha\beta\gamma \neq 1$, тј. ни исказ „$\alpha\beta\gamma = 1$" није тачан, следи да су искази „AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне" и „$\alpha\beta\gamma = 1$" еквивалентни, јер су оба исказа нетачна. Према томе, следи да важи еквиваленција „AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = 1$".

2°.2. CS и AB се секу

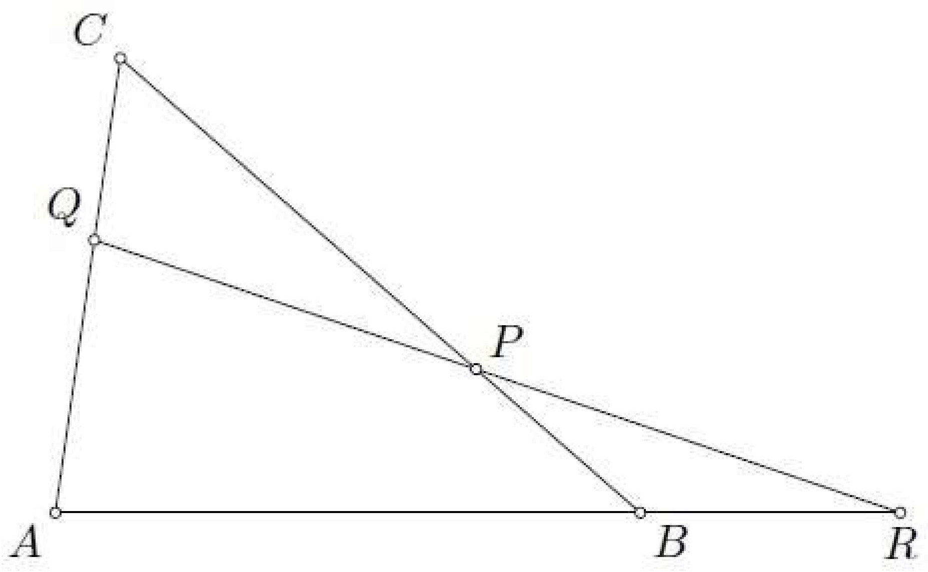
Претпоставимо да је $\alpha\beta + 1 = 0$, тј. $\alpha\beta = -1$. Пошто је S барицентар тачака $(B, 1)$, (C, α) и $(A, \alpha\beta)$, следи да је $1 \cdot \overrightarrow{SB} + \alpha \cdot \overrightarrow{SC} + \alpha\beta \cdot \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$, односно $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + \alpha \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{0}$, тј. $\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{0}$. Према томе, вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC}$ су линеарно зависни, па су праве CS и AB паралелне. Пошто смо доказали да се праве CS и AB не поклапају, онда из паралелности следи да су CS и AB дисјунктне, што је у контрадикцији с претпоставком овог случаја да се CS и AB секу. Према томе, $\alpha\beta + 1 \neq 0$.

Нека је R_1 барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(B, 1)$. Тада R_1 припада правој AB, па како C не припада правој AB, следи да је $C \neq R_1$. Како је S барицентар тачака $(B, 1)$, (C, α) и $(A, \alpha\beta)$, следи да S припада правој CR_1 која садржи C и барицентар R_1 тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(B, 1)$. Према томе, R_1 припада CS, а пошто припада и AB, следи да је R_1 пресечна тачка правих CS и AB. Такође, пошто је R_1 барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(B, 1)$, следи да је $\alpha\beta \cdot \overrightarrow{R_1A} + 1 \cdot \overrightarrow{R_1B} = \overrightarrow{0}$, тј. $\dfrac{\overrightarrow{AR_1}}{\overrightarrow{R_1B}} = \dfrac{1}{\alpha\beta}$.

Пошто праве AP и BQ садрже тачку S, следи да је исказ „праве AP, BQ и CR су паралелне" нетачан, а исказ „праве AP, BQ и CR су конкурентне" еквивалентан исказу „права CR садржи тачку S", а он је еквивалентан исказу „права CS садржи тачку R". Како тачка R припада правој AB и како је R_1 пресечна тачка правих CS и AB, следи да је исказ „права CS садржи тачку R" еквивалентан исказу „$R = R_1$". Према томе, исказ „праве AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне" еквивалентан је исказу „$R = R_1$ или нетачно", тј. исказу „$R = R_1$". Како је $R = R_1$ еквивалентно са $\dfrac{\overrightarrow{AR_1}}{\overrightarrow{R_1B}} = \dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$, а то је еквивалентно са $\dfrac{1}{\alpha\beta} = \gamma$, следи да је исказ „праве AP, BQ и CR су конкурентне или паралелне" еквивалентан исказу „$\alpha\beta\gamma = 1$".

Према томе, у свим случајевима смо доказали да су праве AP, BQ и CR конкурентне или паралелне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = 1$, чиме смо доказали Чевину теорему.

• **Доказ Менелајеве теореме:**



1° $\alpha\beta \neq 1$

Уведимо тачку $D \in AB$ такву да је B барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(D, 1-\alpha\beta)$. Таква тачка D постоји јер је чињеница да је B барицентар тачака $(A, \alpha\beta)$ и $(D, 1-\alpha\beta)$ еквивалентна са $\alpha\beta \cdot \overrightarrow{BA} + (1-\alpha\beta) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$, што је еквивалентно са $\overrightarrow{BD} + \alpha\beta(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{0}$, а то је даље еквивалентно са $\overrightarrow{BD} + \alpha\beta \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$. Ова једнакост је еквивалентна са $\overrightarrow{DB} + \alpha\beta \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$, а она је еквивалентна са $\alpha\beta \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DB}$, па како је $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то је $\alpha\beta \neq 0$ и добијамо да је последња једнакост еквивалентна са $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\dfrac{1}{\alpha\beta}$, па како је $\alpha\beta \neq 1$, то је $-\dfrac{1}{\alpha\beta} \neq -1$ и на правој AB постоји јединствена тачка D која задовољава $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\dfrac{1}{\alpha\beta}$.

Приметимо да је $\alpha\beta + (1-\alpha\beta) + \alpha = 1 + \alpha \neq 0$ јер је $\alpha \neq -1$, пошто би у случају да је $\alpha = -1$ било $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1$, тј. $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{PC}$ и онда би било $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$, тј. $B = C$. Зато постоји барицентар за $(A, \alpha\beta)$, $(D, 1-\alpha\beta)$ и (C, α) и тај барицентар је тачка P јер је барицентар за $(A, \alpha\beta)$ и $(D, 1-\alpha\beta)$ тачка B, па је барицентар за $(A, \alpha\beta)$, $(D, 1-\alpha\beta)$ и (C, α) исто што и барицентар за $(B, \alpha\beta + 1 - \alpha\beta)$ и (C, α), тј. за $(B, 1)$ и (C, α), што је тачка P зато што важи $1 \cdot \overrightarrow{PB} + \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ због $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha$. Пошто је P барицентар за $(A, \alpha\beta)$, $(D, 1-\alpha\beta)$ и (C, α), следи да $P \in DQ$ јер је Q барицентар за $(A, \alpha\beta)$ и (C, α) због $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta$ и због $\alpha\beta + \alpha = \alpha(\beta+1) \neq 0$, а то важи јер је $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq -1$.

Тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је $R = D$ (јер обе тачке R и D припадају правој AB, а из $P \in DQ$ следи да $D \in PQ$, па $R \in PQ$ ако и само ако је $R = D$), а то важи ако и само ако је $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$, тј. ако и само ако је $\gamma = -\dfrac{1}{\alpha\beta}$, што важи ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$.

2° $\alpha\beta = 1$

Како је $\gamma \neq -1$, то је $\alpha\beta\gamma = 1 \cdot \gamma = \gamma \neq -1$, па је исказ „$\alpha\beta\gamma = -1$" нетачан. Докажимо да је онда исказ „P, Q и R су колинеарне" такође нетачан. Претпоставимо супротно, нека су P, Q и R колинеарне. Праве AB и PQ се не поклапају, јер ако би се поклапале, онда би A, B, P, Q припадале једној правој, а како $C \in BP$, онда би A, B, C припадале једној правој, што није тачно. Према томе, како тачка R припада и правој AB и правој PQ, а ове две праве се не поклапају, следи да праве AB и PQ нису паралелне. Како је $\alpha\beta = 1$, тј. $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, то следи да је $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \dfrac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{BP}} = \dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}$, тј. $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}$. Међутим, на основу обратне Талесове теореме следи да је $QP \parallel AB$, што је у контрадикцији с малопре доказаним да праве AB и PQ нису паралелне.

Према томе, тачке P, Q и R нису колинеарне, па је исказ „тачке P, Q и R су колинеарне" нетачан. Како је нетачан и исказ „$\alpha\beta\gamma = -1$", следи да важи еквиваленција „тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$".

Пошто тражена еквиваленција „тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$" важи у свим могућим случајевима, овиме смо доказали Менелајеву теорему.

1.5. Афина пресликавања

Афино пресликавање је пресликавање које чува барицентре, тј. за афине просторе $(E, \vec{E}, +)$ и $(E', \vec{E'}, +')$ чије су директрисе над истим пољем $\mathbb{F}$ пресликавање $f: E \to E'$ је афино ако за све тежинске тачке (A_i, α_i) из $E \times \mathbb{F}$ где је $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ важи $f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(A_i)$.

Теорема 1.1 Ако је $h: \vec{E} \to \vec{E'}$ линеарно пресликавање тада је за фиксирано $A \in E$ и $B \in E'$ са $f(A+v) = B +' h(v)$ дефинисано афино пресликавање $f: E \to E'$

Теорема 1.2 За свако афино пресликавање $f: E \to E'$ постоји јединствено пресликавање $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E'}$ такво да је $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$ за свако $A \in E$ и свако $v \in \vec{E}$.

- Линеарно пресликавање $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E'}$ зовемо линеарни део афиног пресликавања f. Услов $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$ се може сменом $v = \overrightarrow{AB}$ еквивалентно записати као $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ или $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$.
- Ако је f инјективно или сурјективно онда је такво и $\vec{f}$.
- Слика $f(V)$ афиног потпростора V је афини потпростор од E' па је слика праве тачка или права (што значи да се чува колинеарности).
- Афино пресликовање чува: барицентре, афине потпросторе, колинеарност, однос дељења дужи и паралелност.

(18.) Ако је S фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}$ и α фиксирани скалар, доказати да је са $\pi: M \mapsto N$ где је N тачка за коју је $\overrightarrow{SN} = \alpha \cdot \overrightarrow{SM}$ дефинисано и једно афино пресликовање $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

⊛ Приметимо да се тачка S слика у себе јер је $\overrightarrow{S\pi(S)} = \alpha \cdot \overrightarrow{SS} = 0 \Rightarrow$ $\pi(S) = S$.

$$\left.\begin{aligned} &\pi(M) = \pi(S + \overrightarrow{SM}) \\ &\pi(M) = N = S + \overrightarrow{SN} = S + \alpha \cdot \overrightarrow{SM} = \underbrace{\pi(S)}_{=S} + h(\overrightarrow{SM}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &h(\overrightarrow{SM}) = \alpha \cdot \overrightarrow{SM} \\ &h = \alpha \cdot Id \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ h је линеарно пресликавање из $\vec{A}$ у $\vec{A}$ па је $\pi(M) = S + h(\overrightarrow{SM})$ на основу теореме 1,1 афино пресликавање што је и требало доказати.