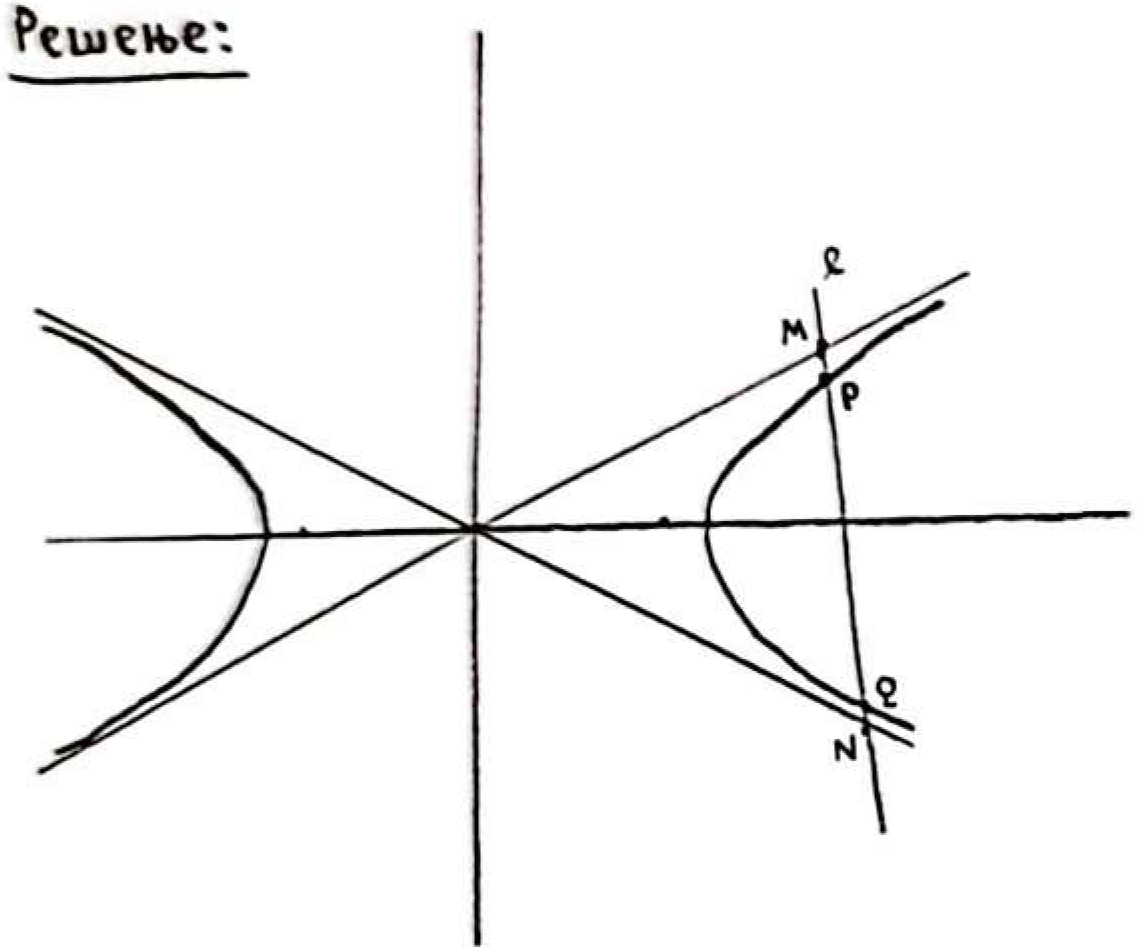
5.6. Произвољна права ℓ сече хиперболу у тачкама P и Q, а асимптоте хиперболе у тачкама M и N. Доказати да је MP=NQ.

Решење:



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме је једначина посматране хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Нека је $P(x_P,y_P)$ произвољна тачка хиперболе и нека је права ℓ дата са $\ell: \frac{x-x_P}{\mu}=\frac{y-y_P}{\vartheta}$, при чему је $(\mu,\vartheta)\neq(0,0)$.

$\ell: \frac{x-x_P}{\mu}=\frac{y-y_P}{\vartheta}=t \Rightarrow x=\mu t+x_P,\ y=\vartheta t+y_P$

Означимо са $Q(x_Q,y_Q)$, $M(x_M,y_M)$ и $N(x_N,y_N)$ редом другу пресечну тачку праве ℓ и хиперболе и две пресечне тачке праве ℓ и асимптота хиперболе.

$Q\in\ell \Rightarrow (\exists t_1\in\mathbb{R})\ x_Q=\mu t_1+x_P,\ y_Q=\vartheta t_1+y_P$

$M\in\ell \Rightarrow (\exists t_2\in\mathbb{R})\ x_M=\mu t_2+x_P,\ y_M=\vartheta t_2+y_P$

$N\in\ell \Rightarrow (\exists t_3\in\mathbb{R})\ x_N=\mu t_3+x_P,\ y_N=\vartheta t_3+y_P$

Тачка Q припада хиперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, те је $\frac{x_Q^2}{a^2}-\frac{y_Q^2}{b^2}=1$.

$$\frac{(\mu t_1+x_P)^2}{a^2}-\frac{(\vartheta t_1+y_P)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\mu^2t_1^2+2\mu x_Pt_1+x_P^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2t_1^2+2\vartheta y_Pt_1+y_P^2}{b^2}=1$$

Тачка P је на хиперболи те је $\frac{x_P^2}{a^2}-\frac{y_P^2}{b^2}=1$

$$\frac{\mu^2}{a^2}t_1^2+\frac{2\mu x_P}{a^2}t_1+\cancel{\frac{x_P^2}{a^2}}-\frac{\vartheta^2}{b^2}t_1^2-\frac{2\vartheta y_P}{b^2}t_1-\cancel{\frac{y_P^2}{b^2}}=\cancel{\frac{x_P^2}{a^2}}-\cancel{\frac{y_P^2}{b^2}}$$

$$t_1\cdot\left(\left(\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}\right)t_1+2\left(\frac{\mu x_P}{a^2}-\frac{\vartheta y_P}{b^2}\right)\right)=0$$

$t_1=0$

$x_Q=\mu t_1+x_P=\mu\cdot 0+x_P=x_P$

$y_Q=\vartheta t_1+y_P=\vartheta\cdot 0+y_P=y_P$

$P=Q$ ↯

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}\right)t_1=-2\left(\frac{\mu x_P}{a^2}-\frac{\vartheta y_P}{b^2}\right)\quad / : \left(\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}\right)\neq 0$$

ово мора важити да би права ℓ секла хиперболу у две тачке

$$t_1=\frac{-2\left(\frac{\mu x_P}{a^2}-\frac{\vartheta y_P}{b^2}\right)}{\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}}$$

Једначине асимптота хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ су $a_1: y=\frac{b}{a}x$ и $a_2: y=-\frac{b}{a}x$.

Нека без умањења општости тачка $M(x_M, y_M)$ припада асимптоти $a_1: y=\frac{b}{a}x$. $\Rightarrow y_M=\frac{b}{a}x_M$

$$\vartheta t_2+y_p=\frac{b}{a}(\mu t_2+x_p) \quad /:b\neq 0$$

$$\frac{\vartheta}{b}t_2+\frac{y_p}{b}=\frac{\mu}{a}t_2+\frac{x_p}{a}$$

$$\frac{y_p}{b}-\frac{x_p}{a}=\left(\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}\right)t_2 \quad /:\left(\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}\right)\neq 0$$

ово мора важити јер по услову задатка права ℓ сече асимптоту a_1

$$t_2=\frac{\frac{y_p}{b}-\frac{x_p}{a}}{\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}}$$

$$t_2=\frac{-\left(\frac{x_p}{a}-\frac{y_p}{b}\right)}{\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}}$$

Тачка $N(x_N, y_N)$ припада асимптоти $a_2: y=-\frac{b}{a}\cdot x \Rightarrow y_N=-\frac{b}{a}\cdot x_N$

$$\vartheta t_3+y_p=-\frac{b}{a}(\mu t_3+x_p) \quad /:b\neq 0$$

$$\frac{\vartheta}{b}t_3+\frac{y_p}{b}=-\frac{\mu}{a}t_3-\frac{x_p}{a}$$

$$\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}\right)t_3=-\frac{x_p}{a}-\frac{y_p}{b} \quad /:\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}\right)\neq 0$$

ово мора важити јер по услову задатка права ℓ сече асимптоту a_2

$$t_3=-\frac{\frac{x_p}{a}+\frac{y_p}{b}}{\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}}$$

$$MP=\sqrt{(x_p-x_M)^2+(y_p-y_M)^2}=\sqrt{(\cancel{x_p}-(\cancel{x_p}+\mu t_2))^2+(\cancel{y_p}-(\cancel{y_p}+\vartheta t_2))^2}=\sqrt{\mu^2t_2^2+\vartheta^2t_2^2}=\sqrt{(\mu^2+\vartheta^2)t_2^2}$$

$$NQ=\sqrt{(x_Q-x_N)^2+(y_Q-y_N)^2}=\sqrt{(\cancel{x_p}+\mu t_1-(\cancel{x_p}+\mu t_3))^2+(\cancel{y_p}+\vartheta t_1-(\cancel{y_p}+\vartheta t_3))^2}=\sqrt{\mu^2(t_1-t_3)^2+\vartheta^2(t_1-t_3)^2}=\sqrt{(\mu^2+\vartheta^2)(t_1-t_3)^2}$$

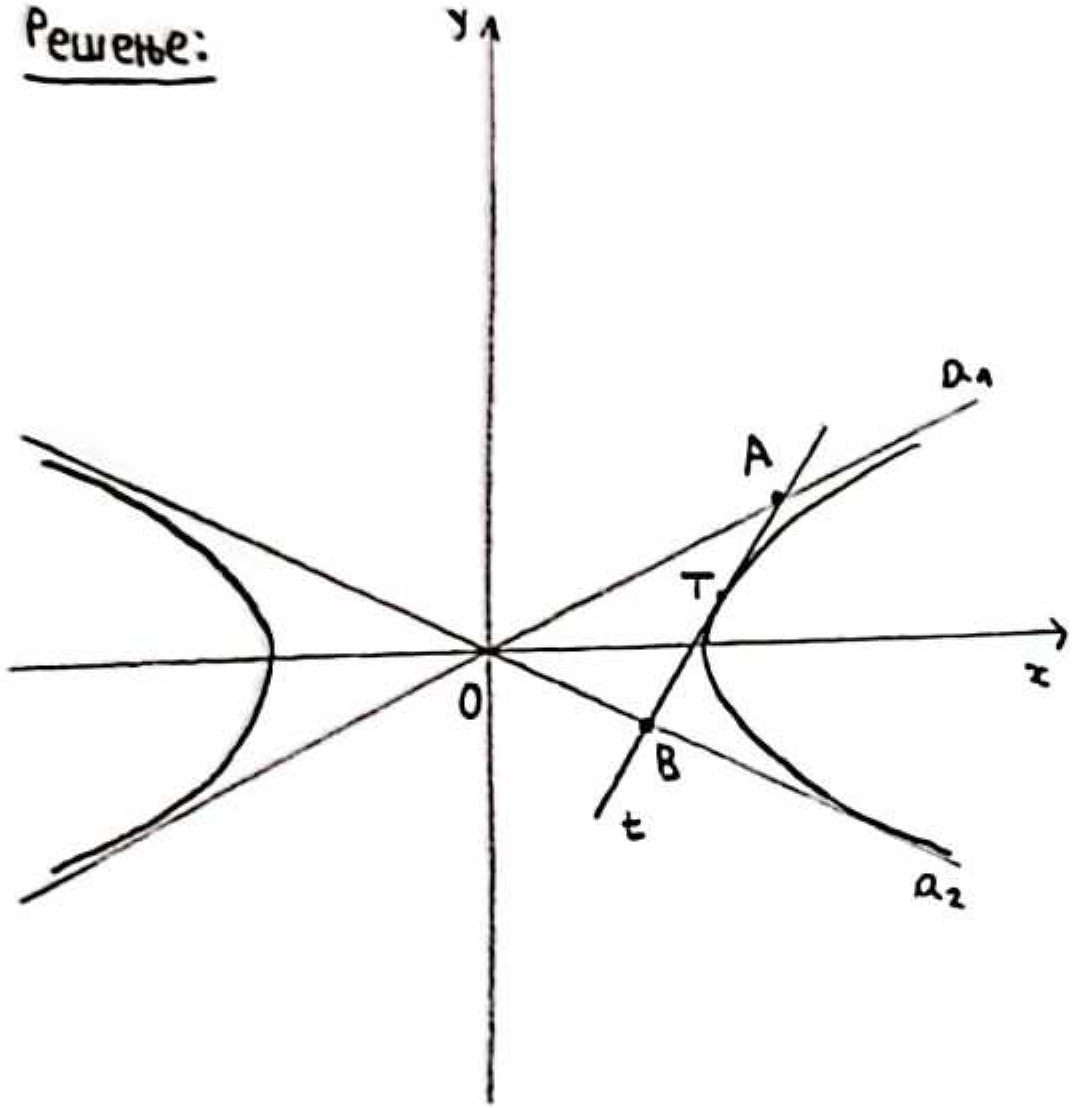
$$t_1-t_3=-\frac{2\left(\frac{x_p\mu}{a^2}-\frac{y_p\vartheta}{b^2}\right)}{\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}}+\frac{\frac{x_p}{a}+\frac{y_p}{b}}{\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}}=\frac{-2\frac{x_p\mu}{a^2}+2\frac{y_p\vartheta}{b^2}+\left(\frac{x_p}{a}+\frac{y_p}{b}\right)\cdot\left(\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}\right)}{\left(\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}\right)\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}\right)}=\frac{-2\frac{x_p\mu}{a^2}+2\frac{y_p\vartheta}{b^2}+\frac{x_p\mu}{a^2}-\frac{x_p\vartheta}{ab}+\frac{y_p\mu}{ab}-\frac{y_p\vartheta}{b^2}}{\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{-\frac{x_p\mu}{a^2}-\frac{x_p\vartheta}{ab}+\frac{y_p\mu}{ab}+\frac{y_p\vartheta}{b^2}}{\frac{\mu^2}{a^2}-\frac{\vartheta^2}{b^2}}=\frac{\left(-\frac{x_p}{a}+\frac{y_p}{b}\right)\cancel{\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}\right)}}{\left(\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}\right)\cdot\cancel{\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\vartheta}{b}\right)}}=\frac{-\left(\frac{x_p}{a}-\frac{y_p}{b}\right)}{\frac{\mu}{a}-\frac{\vartheta}{b}}=t_2 \Rightarrow NQ=\sqrt{(\mu^2+\vartheta^2)(t_1-t_3)^2}=\sqrt{(\mu^2+\vartheta^2)\cdot t_2^2}=MP$$

што се и тражило.

5.7. Доказати да је површина троугла чије су странице асимптоте хиперболе и тангента на хиперболу, константна.

<u>Решење:</u>



Нека је $T(x_T, y_T)$ произвољна тачка хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Како је T тачка са те хиперболе, то је $\frac{x x_T}{a^2} - \frac{y y_T}{b^2} = 1$ једначина тангенте t хиперболе у тачки T.

Једначине асимптота хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ су $a_1: y = \frac{b}{a}x$ и $a_2: y = -\frac{b}{a}x$.

Претпостављамо да тангента t сече асимптоту a_1 у тачки $A(x_A, y_A)$, а асимптоту a_2 у тачки $B(x_B, y_B)$.

$A \in a_1 \Rightarrow y_A = \frac{b}{a}x_A$ и то убацимо у $\frac{x_A x_T}{a^2} - \frac{y_A y_T}{b^2} = 1$ (важи јер $A \in t$)

$$\frac{x_A x_T}{a^2} - \frac{\frac{b}{a} x_A y_T}{b^2} = 1$$

$$x_A \cdot \left(\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}\right) = 1 \quad \Big/ : \left(\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}\right) \neq 0$$

јер би у супротном било $0=1$, те не би постојало x_A

$$x_A = \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}}$$

$$y_A = \frac{b}{a} \cdot x_A = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} - \frac{y_T}{ab}}$$

$B \in a_2 \Rightarrow y_B = \frac{-b}{a}x_B$ и то убацимо у $\frac{x_B x_T}{a^2} - \frac{y_B y_T}{b^2} = 1$ (важи јер $B \in t$)

$$\frac{x_B x_T}{a^2} - \frac{-\frac{b}{a} x_B y_T}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_B x_T}{a^2} + \frac{x_B y_T}{ab} = 1$$

$$x_B \cdot \left(\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}\right) = 1 \quad \Big/ : \left(\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}\right) \neq 0$$

јер би у супротном било $x_B \cdot 0 = 1$, те не би постојало x_B

$$x_B = \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}}$$

$$y_B = -\frac{b}{a} \cdot x_B = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{x_T}{a^2} + \frac{y_T}{ab}}$$

$$\vec{OA} = [A]-[O] = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}-\frac{y_T}{ab}},\ \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}-\frac{y_T}{ab}}\right)-(0,0) = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}-\frac{y_T}{ab}},\ \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}-\frac{y_T}{ab}}\right) = (x_A, y_A)$$

$$\vec{OB} = [B]-[O] = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}+\frac{y_T}{ab}},\ -\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}+\frac{y_T}{ab}}\right)-(0,0) = \left(\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}+\frac{y_T}{ab}},\ -\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}+\frac{y_T}{ab}}\right) = (x_B, y_B)$$

$$P_{OAB} = \frac{1}{2}\|\vec{OA}\times\vec{OB}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_A & y_A & 0\\ x_B & y_B & 0\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}y_A & 0\\ y_B & 0\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}x_A & 0\\ x_B & 0\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\end{vmatrix}\vec{k}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|(-1)^2\cdot(y_A\cdot 0-y_B\cdot 0)\vec{i}+(-1)^3\cdot(x_A\cdot 0-x_B\cdot 0)\vec{j}+(-1)^4\cdot(x_Ay_B-x_By_A)\vec{k}\right\| = \frac{1}{2}\left\|1\cdot 0\vec{i}-0\cdot\vec{j}+(x_Ay_B-x_By_A)\vec{k}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|(x_Ay_B-x_By_A)\vec{k}\right\| = \frac{1}{2}\left|x_Ay_B-x_By_A\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}-\frac{y_T}{ab}}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}+\frac{y_T}{ab}}-\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}+\frac{y_T}{ab}}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x_T}{a^2}-\frac{y_T}{ab}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2-\left(\frac{y_T}{ab}\right)^2}-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2-\left(\frac{y_T}{ab}\right)^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{b}{a}\right|\cdot\left|\frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2-\left(\frac{y_T}{ab}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{x_T}{a^2}\right)^2-\left(\frac{y_T}{ab}\right)^2}\right| =$$

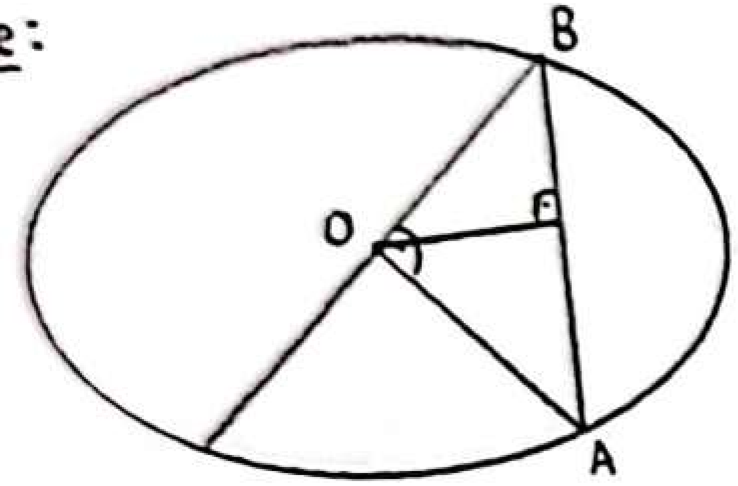
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\left|\frac{2}{\frac{x_T^2}{a^4}-\frac{y_T^2}{a^2b^2}}\right| = \frac{b}{\cancel{2}a}\cdot\frac{\cancel{2}}{\left|\frac{x_T^2}{a^4}-\frac{y_T^2}{a^2b^2}\right|} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}\left|\frac{x_T^2}{a^2}-\frac{y_T^2}{b^2}\right|} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot|1|} = \frac{b}{a}\cdot a^2 = ab$$

$\frac{x_T^2}{a^2}-\frac{y_T^2}{b^2}=1$ јер тачка $T(x_T, y_T)$ припада хиперболи

Дакле, површина троугла OAB не зависи од избора тачке T, односно од избора тангенте на хиперболу, те је површина троугла ограниченог асимптотама хиперболе и тангентом на хиперболу константна.

5.8. Нека су дужи OA и OB два узајамно нормална полудијаметра елипсе. Доказати да је растојање центра O елипсе од тетиве AB константа која не зависи од избора полудијаметара.

Решење:



Постоји Декартов правоугли координатни систем у којем дата елипса има једначину $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Тачка O је центар те елипсе, те има координате $(0,0)$ тј. $O(0,0)$ је центар те елипсе. Нека је $A(x_A,y_A)$ произвољна тачка са елипсе.

$A\in\mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$ те важи $(x_A,y_A)\neq(0,0)$ јер би у супротном $1=\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=0$ ↯

$\Rightarrow \vec{OA}=[A]-[O]=(x_A,y_A)-(0,0)=(x_A,y_A)\neq(0,0)$ и важи $OA\perp OB$ по услову задатка те је $\vec{OA}$ вектор нормале праве OB. Зато је једначина праве OB: $\frac{x-0}{-y_A}=\frac{y-0}{x_A}$ јер права OB садржи тачку $(0,0)$ и вектор правца јој је $(-y_A,x_A)$ јер је $(-y_A,x_A)\circ(x_A,y_A)=-y_A\cdot x_A+x_A\cdot y_A=0$.

Како је тачка B на тој правој, то $(\exists t\in\mathbb{R})\ \frac{x_B}{-y_A}=\frac{y_B}{x_A}=t$ тј. $x_B=-y_At,\ y_B=x_At$.

$$B\in\mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_B^2}{a^2}+\frac{y_B^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(-y_At)^2}{a^2}+\frac{(x_At)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y_A^2t^2}{a^2}+\frac{x_A^2t^2}{b^2}=1$$

$$t^2\left(\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}\right)=1 \quad \Big/ :\left(\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}\right)\neq 0 \text{ јер је } \frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}\geq 0 \text{ и } (x_A,y_A)\neq(0,0)$$

$$t^2=\frac{1}{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}$$ и како је $\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}>0$ то постоје две могућности за t, односно за тачку B

1° случај $\quad t=-\frac{1}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}$

$$x_B=-y_At=\frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}} \qquad y_B=x_At=\frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}$$

$\vec{AB}=[B]-[A]=(x_B,y_B)-(x_A,y_A)=(x_B-x_A,y_B-y_A)\neq(0,0)$ јер ако би $x_B=x_A$ и $y_B=y_A$, онда би $B=A\neq O$ али тада не би било $OA\perp OB$

Једначина праве AB је $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, односно $(y_B-y_A)(x-x_A)=(x_B-x_A)(y-y_A)$

$$(y_B-y_A)x-x_A(y_B-y_A)=(x_B-x_A)y-y_A(x_B-x_A)$$

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-(y_B-y_A)x_A+(x_B-x_A)y_A=0$$

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-y_Bx_A+\cancel{x_Ay_A}+x_By_A-\cancel{x_Ay_A}=0$$

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-y_Bx_A+x_By_A=0$$

Растојање тачке O(0,0) од праве AB је $d(O,AB)=\frac{|(y_B-y_A)\cdot 0-(x_B-x_A)\cdot 0-y_Bx_A+x_By_A|}{\sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}}=\frac{|-y_Bx_A+x_By_A|}{\sqrt{y_B^2-2y_By_A+y_A^2+x_B^2-2x_Bx_A+x_A^2}}$

$$=\frac{\left|-\frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot x_A+\frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot y_A\right|}{\sqrt{\left(\frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\right)^2\cancel{-2\cdot\frac{-x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot y_A}+y_A^2+\left(\frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\right)^2\cancel{-2\cdot\frac{y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot x_A}+x_A^2}}=$$

$\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$ јер $A\in\mathcal{E}$

$$=\frac{\left|\frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\right|}{\sqrt{\frac{x_A^2+y_A^2}{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}+x_A^2+y_A^2}}=\frac{\frac{x_A^2+y_A^2}{\cancel{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}}}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\cdot\left(\frac{1}{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}+1\right)}}=\frac{\frac{x_A^2+y_A^2}{\cancel{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}}}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\cdot\frac{1+\frac{x_A^2}{b^2}+\frac{y_A^2}{a^2}}{\cancel{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}}}=\frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\cdot\left(\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}+\frac{x_A^2}{b^2}+\frac{y_A^2}{a^2}\right)}}$$

$$=\frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\left(x_A^2\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+y_A^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)}}=\frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}=\frac{\cancel{x_A^2+y_A^2}}{\cancel{(x_A^2+y_A^2)}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

што не зависи од избора полудијаметара OA и OB, већ само од велике и мале полуосе елипсе.

2° случај $\quad t = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}} \Rightarrow x_B = -y_A t = \dfrac{-y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}, \; y_B = x_A t = \dfrac{x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}$

$\vec{AB} = [B]-[A] = (x_B, y_B)-(x_A, y_A) = (x_B-x_A, y_B-y_A) \neq (0,0)$ јер ако би $x_B = x_A$ и $y_B = y_A$, онда би $B = A \neq O$ али тада не би било $OA \perp OB$

Једначина праве AB је $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, односно $(y_B-y_A)(x-x_A) = (x_B-x_A)(y-y_A) \Rightarrow (y_B-y_A)x-(y_B-y_A)x_A = (x_B-x_A)y-(x_B-x_A)y_A$

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-y_Bx_A+\cancel{y_Ax_A}+x_By_A-\cancel{x_Ay_A}=0$$

$$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-y_Bx_A+x_By_A=0$$

Растојање тачке $O(0,0)$ од праве AB је $d(O,AB) = \dfrac{|(y_B-y_A)\cdot 0-(x_B-x_A)\cdot 0-y_Bx_A+x_By_A|}{\sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}} = \dfrac{|-y_Bx_A+x_By_A|}{\sqrt{y_B^2-2y_By_A+y_A^2+x_B^2-2x_Bx_A+x_A^2}} =$

$$= \frac{\left|-\frac{x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot x_A+\frac{-y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot y_A\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\right)^2-\cancel{2\cdot\frac{x_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot y_A}+y_A^2+\left(\frac{-y_A}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\right)^2-\cancel{\frac{2(-y_A)}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\cdot x_A}+x_A^2}} = \frac{\left|-\frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}\right|}{\sqrt{\frac{x_A^2+y_A^2}{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}+x_A^2+y_A^2}} =$$

$$= \frac{\frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\left(\frac{1}{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}+1\right)}} = \frac{\frac{x_A^2+y_A^2}{\cancel{\sqrt{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}}}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\cdot\frac{1+\frac{x_A^2}{b^2}+\frac{y_A^2}{a^2}}{\cancel{\frac{y_A^2}{a^2}+\frac{x_A^2}{b^2}}}}} \underset{\uparrow}{=} \frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\cdot\left(\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}+\frac{x_A^2}{b^2}+\frac{y_A^2}{a^2}\right)}} = \frac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)\cdot\left(x_A^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+y_A^2\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)}}$$

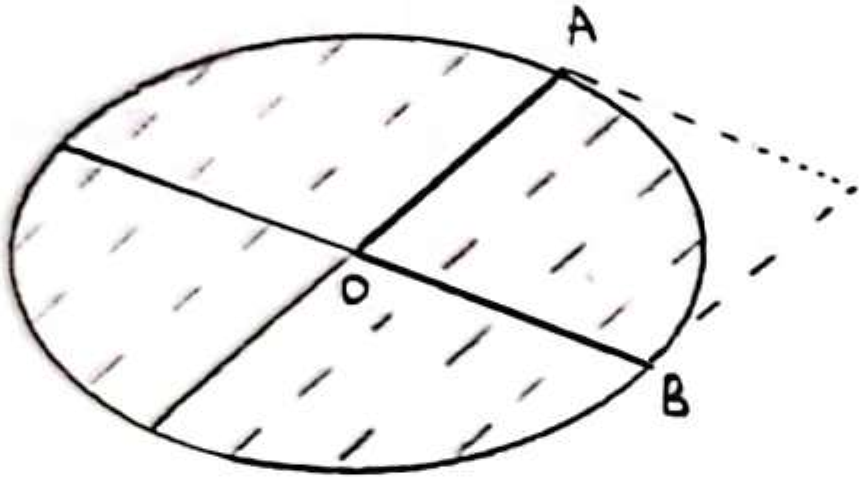
$\dfrac{x_A^2}{a^2}+\dfrac{y_A^2}{b^2} = 1$ јер $A \in \mathcal{E}$

$= \dfrac{x_A^2+y_A^2}{\sqrt{(x_A^2+y_A^2)^2\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$ што не зависи од избора полудијаметара OA и OB, већ само од велике и мале полуосе елипсе.

Дакле, растојање центра O елипсе од тетиве AB је константа која не зависи од избора полудијаметара.

5.9. Доказати да површина паралелограма који је разапет конјугованим полудијаметрима елипсе не зависи од избора полудијаметара.

Решење:



Нека је $A(x_A, y_A)$ произвољна тачка елипсе $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Тада је $\overrightarrow{OA} = [A]-[O] = (x_A,y_A)-(0,0) = (x_A,y_A) \neq (0,0)$ (јер би у супротном $1=\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2} = \frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=0+0=0$ ↯) вектор правца полудијаметра OA, те на основу задатка 5.1. следи да је вектор правца конјугованог дијаметра $\left(\frac{y_A}{b^2}, -\frac{x_A}{a^2}\right)$. Зато је једначина праве на којој је тај конјуговани дијаметар $q: \frac{x-0}{\frac{y_A}{b^2}} = \frac{y-0}{-\frac{x_A}{a^2}}$.

$B\in q \Rightarrow (\exists t\in\mathbb{R})\ \frac{x_B}{\frac{y_A}{b^2}} = \frac{y_B}{-\frac{x_A}{a^2}} = t \Rightarrow x_B = \frac{y_A}{b^2}t,\ y_B = -\frac{x_A}{a^2}t$ где је $B(x_B,y_B)$

$B\in\mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_B^2}{a^2}+\frac{y_B^2}{b^2}=1$ и у ово убацимо $x_B=\frac{y_A}{b^2}t$ и $y_B=-\frac{x_A}{a^2}t$

$$\frac{\left(\frac{y_A t}{b^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{x_A}{a^2}t\right)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y_A^2t^2}{a^2b^4}+\frac{x_A^2t^2}{a^4b^2}=1$$

$$\frac{t^2}{a^2b^2}\cdot\underbrace{\left(\frac{y_A^2}{b^2}+\frac{x_A^2}{a^2}\right)}_{1 \text{ јер тачка A припада елипси } \mathcal{E}}=1$$

$$t^2=a^2b^2$$

Како је $a>0$ и $b>0$, то је $a^2b^2>0$, те постоје две могућности за t, односно две могућности за тачку B.

1° случај $t=-ab \Rightarrow x_B=\frac{y_A}{b^2}t=\frac{y_A}{b^2}\cdot(-ab)=-\frac{a}{b}y_A,\ y_B=-\frac{x_A}{a^2}t=-\frac{x_A}{a^2}\cdot(-ab)=\frac{b}{a}x_A \Rightarrow B\left(-\frac{a}{b}y_A, \frac{b}{a}x_A\right)$

Површина паралелограма разапетог конјугованим полудијаметрина $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ је

$$P=\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\| = \left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_A & y_A & 0\\ x_B & y_B & 0\end{vmatrix}\right\| = \left\|(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}y_A & 0\\ y_B & 0\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}x_A & 0\\ x_B & 0\end{vmatrix}\vec{j}+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\end{vmatrix}\vec{k}\right\| = \|0\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+(x_Ay_B-x_By_A)\vec{k}\| =$$

$= \| (x_A \cdot \frac{b}{a} x_A - (-\frac{a}{b}) y_A \cdot y_A)\vec{k} \| = \frac{b}{a}x_A^2 + \frac{a}{b}y_A^2 = ab\cdot\left(\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}\right) \underset{\uparrow}{=} ab\cdot 1 = ab$ што не зависи од избора полудијаметара

$\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$ јер $A\in\mathcal{E}$

2° случај $t = ab \Rightarrow x_B = \frac{y_A}{b^2} t = \frac{y_A}{b^2}\cdot ab = \frac{a}{b} y_A$, $y_B = -\frac{x_A}{a^2} t = -\frac{x_A}{a^2}\cdot ab = -\frac{b}{a}x_A \Rightarrow B\left(\frac{a}{b}y_A, -\frac{b}{a}x_A\right)$

Површина паралелограма разапетог конјугованим полудијаметрима $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ је

$$P = \|\vec{OA}\times\vec{OB}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ x_B & y_B & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} y_A & 0 \\ y_B & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x_B & 0 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}\cdot\vec{k} \right\| = \| 1\cdot 0\cdot\vec{i} - 0\cdot\vec{j} + (x_Ay_B - x_By_A)\vec{k}\| =$$

$$= \|(x_Ay_B - x_By_A)\vec{k}\| = \left\|\left(x_A\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)x_A - \frac{a}{b}y_A\cdot y_A\right)\vec{k}\right\| = \left\|\left(-\frac{b}{a}\cdot x_A^2 - \frac{a}{b}y_A^2\right)\vec{k}\right\| = \left|-\frac{b}{a}x_A^2 - \frac{a}{b}y_A^2\right| = \left|\frac{b}{a}x_A^2 + \frac{a}{b}y_A^2\right| =$$

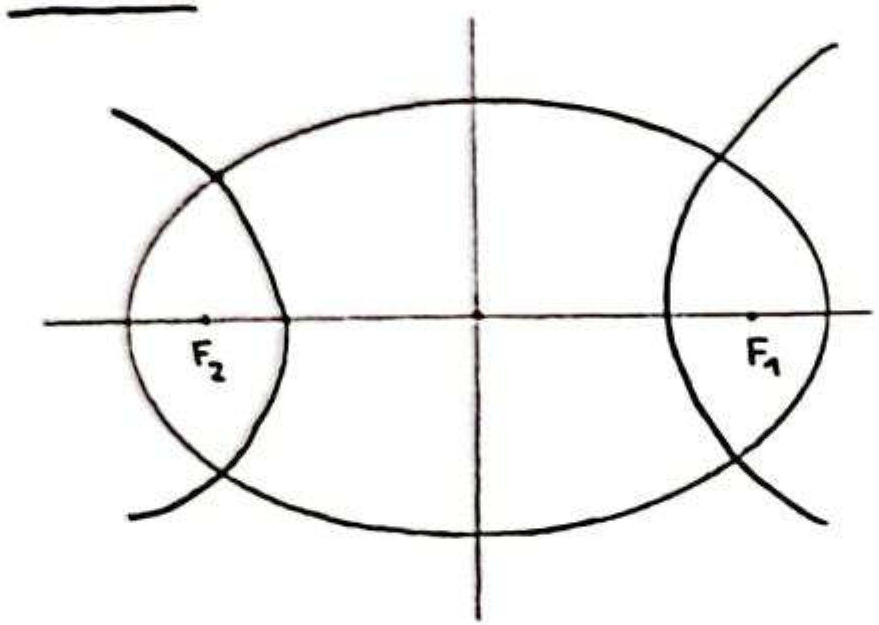
$= ab\cdot\left(\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}\right) \underset{\uparrow}{=} ab\cdot 1 = ab$ што не зависи од избора полудијаметара.

$\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$ јер $A\in\mathcal{E}$

Дакле, површина паралелограма који је разапет конјугованим полудијаметрима елипсе не зависи од избора полудијаметара.

5.10. Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже (конфокалне криве) секу под правим углом.

Решење:



Ако елипса и хипербола имају заједничке жиже F_1 и F_2, онда имају и заједнички центар O, јер је центар O средиште дужи F_1F_2. Одаберимо Декартов правоугли координатни систем тако да је његов координатни почетак тачка O, да је x-оса права F_1F_2, при чему тачка F_1 има позитивну x-координату и да је y-оса нормална на x-оси у тачки O, као и да је координатни систем оријентисан позитивно. Нека је $OF_1 = c$. Тада тачке F_1 и F_2 имају редом координате $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$. Како је Декартов правоугли координатни систем Oxy одабран тако да је центар елипсе (који је и центар хиперболе) координатни почетак, да жиже елипсе и хиперболе (које се поклапају јер су по услову задатка елипса и хипербола конфокалне) припадају x-оси, те да су x-оса и y-оса осе симетрије елипсе и хиперболе, то следи да ове две криве имају канонске једначине у координатном систему Oxy, односно да постоје реалне константе a_1, b_1, a_2, b_2 које су позитивне и $a_1 > b_1$ такве да је $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ једначина елипсе и $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ једначина хиперболе. При томе је $c^2 = a_1^2 - b_1^2$ и $c^2 = a_2^2 + b_2^2$ јер је $c = OF_1$ исто и за елипсу и за хиперболу.

Угао између две криве се дефинише као угао између њихових тангенти у њиховој пресечној тачки.
Нека је $T(x_T, y_T)$ пресечна тачка елипсе и хиперболе. Тада је $\frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = 1$ и $\frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{y_T^2}{b_2^2} = 1$.

$c^2 = a_1^2 - b_1^2 \Rightarrow b_1^2 = a_1^2 - c^2$ и $c^2 = a_2^2 + b_2^2 \Rightarrow b_2^2 = c^2 - a_2^2$.

$$\Rightarrow \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = \frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{a_1^2 - c^2} = 1 = \frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{y_T^2}{b_2^2} = \frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{y_T^2}{c^2 - a_2^2} \Rightarrow \frac{y_T^2}{a_1^2 - c^2} + \frac{y_T^2}{c^2 - a_2^2} = \frac{x_T^2}{a_2^2} - \frac{x_T^2}{a_1^2}$$

$$y_T^2 \cdot \left(\frac{1}{a_1^2 - c^2} + \frac{1}{c^2 - a_2^2} \right) = x_T^2 \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right)$$

$$y_T^2 \cdot \frac{\cancel{c^2} - a_2^2 + a_1^2 - \cancel{c^2}}{(a_1^2 - c^2)(c^2 - a_2^2)} = x_T^2 \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 a_1^2}$$

$$y_T^2 \cdot \frac{a_1^2-a_2^2}{(a_1^2-c^2)\cdot(c^2-a_2^2)} = x_T^2 \cdot \frac{a_1^2-a_2^2}{a_2^2 a_1^2}$$

Сетимо се да је $a_1^2-c^2=\underbrace{b_1^2}_{>0}$ и $c^2-a_2^2=\underbrace{b_2^2}_{>0}$, те је $a_1^2>c^2$ и $a_2^2<c^2$, одакле је $a_2^2<a_1^2$ тј. $a_1^2-a_2^2\neq 0$

те смемо скраћивати са $a_1^2-a_2^2$.

$$\frac{y_T^2}{b_1^2 b_2^2} = \frac{x_T^2}{a_1^2 a_2^2}$$

Ако би било $x_T=0$, онда би било $\frac{y_T^2}{b_1^2b_2^2}=\frac{0^2}{a_1^2a_2^2}=0 \Rightarrow y_T=0$ али онда би $1=\frac{x_T^2}{a^2}+\frac{y_T^2}{b^2}=\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=0.\lightning$

Дакле, $x_T\neq 0$, те је $\frac{y_T^2}{x_T^2}=\frac{b_1^2b_2^2}{a_1^2a_2^2} \Rightarrow \frac{y_T}{x_T}=-\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$ или $\frac{y_T}{x_T}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$.

1° случај $\frac{y_T}{x_T}=-\frac{b_1b_2}{a_1a_2} \Rightarrow y_T=-b_1b_2t$, $x_T=a_1a_2t$ за неко $t\in\mathbb{R}$

$T(x_T,y_T)$ припада елипси $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \Rightarrow \frac{x_T^2}{a_1^2}+\frac{y_T^2}{b_1^2}=1$

$$\frac{(a_1a_2t)^2}{a_1^2}+\frac{(-b_1b_2t)^2}{b_1^2}=1$$

$$\frac{a_1^2a_2^2t^2}{a_1^2}+\frac{b_1^2b_2^2t^2}{b_1^2}=1$$

$$a_2^2t^2+b_2^2t^2=1$$

$$(a_2^2+b_2^2)t^2=1$$

$$c^2t^2=1 \qquad /:c^2\neq 0$$

$$t^2=\frac{1}{c^2} \quad \text{и} \quad c^2>0$$

$t=-\frac{1}{c}$

$x_T=a_1a_2t=-\frac{a_1a_2}{c}$

$y_T=-b_1b_2t=\frac{b_1b_2}{c}$

$T_1\left(-\frac{a_1a_2}{c},\frac{b_1b_2}{c}\right)$

$t=\frac{1}{c}$

$x_T=a_1a_2t=\frac{a_1a_2}{c}$

$y_T=-b_1b_2t=-\frac{b_1b_2}{c}$

$T_2\left(\frac{a_1a_2}{c},-\frac{b_1b_2}{c}\right)$

1.1° $T_1\left(-\frac{a_1a_2}{c}, \frac{b_1b_2}{c}\right)$ је прва пресечна тачка елипсе и хиперболе

$T_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_1^{\mathcal{E}}$ елипсе $\mathcal{E}$ у тачки T_1 је $t_1^{\mathcal{E}}: \frac{x\cdot\left(-\frac{a_1a_2}{c}\right)}{a_1^2} + \frac{y\cdot\frac{b_1b_2}{c}}{b_1^2} = 1$

$$\frac{-\frac{a_1a_2}{c}}{\frac{a_1^2}{1}}x + \frac{\frac{b_1b_2}{c}}{b_1^2}y = 1$$

$$-\frac{a_2}{a_1c}x + \frac{b_2}{b_1c}y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_1^{\mathcal{E}}} = \left(-\frac{a_2}{a_1c}, \frac{b_2}{b_1c}\right) \neq (0,0)$$

$T_1 \in \mathcal{H} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_1^{\mathcal{H}}$ хиперболе $\mathcal{H}$ у тачки T_1 је $t_1^{\mathcal{H}}: \frac{x\cdot\left(-\frac{a_1a_2}{c}\right)}{a_2^2} - \frac{y\cdot\frac{b_1b_2}{c}}{b_2^2} = 1$

$$\frac{-\frac{a_1a_2}{c}}{\frac{a_2^2}{1}}x - \frac{\frac{b_1b_2}{c}}{\frac{b_2^2}{1}}y = 1$$

$$-\frac{a_1}{a_2c}x - \frac{b_1}{b_2c}y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_1^{\mathcal{H}}} = \left(-\frac{a_1}{a_2c}, -\frac{b_1}{b_2c}\right) \neq (0,0)$$

Како је $\vec{n}_{t_1^{\mathcal{E}}} \circ \vec{n}_{t_1^{\mathcal{H}}} = \left(-\frac{a_2}{a_1c}, \frac{b_2}{b_1c}\right)\circ\left(-\frac{a_1}{a_2c}, -\frac{b_1}{b_2c}\right) = \frac{a_1a_2}{a_1a_2c^2} - \frac{b_1b_2}{b_1b_2c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0$ и $\vec{n}_{t_1^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0}$, $\vec{n}_{t_1^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}$

то су вектори нормала правих $t_1^{\mathcal{E}}$ и $t_1^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_1^{\mathcal{E}} \perp t_1^{\mathcal{H}}$.

1.2° $T_2\left(\frac{a_1a_2}{c}, -\frac{b_1b_2}{c}\right)$ је друга пресечна тачка елипсе и хиперболе

$T_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_2^{\mathcal{E}}$ елипсе $\mathcal{E}$ у тачки T_2 је $t_2^{\mathcal{E}}: \frac{x\cdot\frac{a_1a_2}{c}}{a_1^2} + \frac{y\cdot\left(-\frac{b_1b_2}{c}\right)}{b_1^2} = 1$

$$\frac{a_2}{a_1c}x - \frac{b_2}{b_1c}y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_2^{\mathcal{E}}} = \left(\frac{a_2}{a_1c}, -\frac{b_2}{b_1c}\right) \neq (0,0)$$

$T_2 \in \mathcal{H}$ => Једначина тангенте $t_2^{\mathcal{H}}$ хиперболе $\mathcal{H}$ у тачки T_2 је $t_2^{\mathcal{H}}: \dfrac{x \cdot \frac{a_1 a_2}{c}}{a_2^2} - \dfrac{y \cdot \left(-\frac{b_1 b_2}{c}\right)}{b_2^2} = 1$

$$\frac{a_1}{a_2 c} x + \frac{b_1}{b_2 c} y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_2^{\mathcal{H}}} = \left(\frac{a_1}{a_2 c}, \frac{b_1}{b_2 c}\right) \neq (0,0)$$

Како је $\vec{n}_{t_2^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_2^{\mathcal{H}}} = \left(\frac{a_2}{a_1 c}, -\frac{b_2}{b_1 c}\right) \circ \left(\frac{a_1}{a_2 c}, \frac{b_1}{b_2 c}\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 c^2} - \frac{b_1 b_2}{b_1 b_2 c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0$, $\vec{n}_{t_2^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0}$ и $\vec{n}_{t_2^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}$

то су вектори нормала правих $t_2^{\mathcal{E}}$ и $t_2^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_2^{\mathcal{E}} \perp t_2^{\mathcal{H}}$.

2° случај $\frac{y_T}{x_T} = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$ => $y_T = b_1 b_2 \lambda$, $x_T = a_1 a_2 \lambda$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$

$T(x_T, y_T)$ припада елипси $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ => $\frac{x_T^2}{a_1^2} + \frac{y_T^2}{b_1^2} = 1$

$$\frac{(a_1 a_2 \lambda)^2}{a_1^2} + \frac{(b_1 b_2 \lambda)^2}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{a_1^2 a_2^2 \lambda^2}{a_1^2} + \frac{b_1^2 b_2^2 \lambda^2}{b_1^2} = 1$$

$$a_2^2 \lambda^2 + b_2^2 \lambda^2 = 1$$

$$(a_2^2 + b_2^2)\lambda^2 = 1$$

$$c^2 \lambda^2 = 1 \quad | : c^2 \neq 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{c^2} \quad \text{и } c^2 > 0$$

$\lambda = -\frac{1}{c}$ $\qquad$ $\lambda = \frac{1}{c}$

$x_T = a_1 a_2 \lambda = -\frac{a_1 a_2}{c}$ $\qquad$ $x_T = a_1 a_2 \lambda = \frac{a_1 a_2}{c}$

$y_T = b_1 b_2 \lambda = -\frac{b_1 b_2}{c}$ $\qquad$ $y_T = b_1 b_2 \lambda = \frac{b_1 b_2}{c}$

$T_3\left(-\frac{a_1 a_2}{c}, -\frac{b_1 b_2}{c}\right)$ $\qquad$ $T_4\left(\frac{a_1 a_2}{c}, \frac{b_1 b_2}{c}\right)$

2.1° $T_3\left(-\frac{a_1a_2}{c}, -\frac{b_1b_2}{c}\right)$ је трећа пресечна тачка елипсе и хиперболе

$T_3 \in \mathcal{E} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_3^{\mathcal{E}}$ елипсе $\mathcal{E}$ у тачки T_3 је $t_3^{\mathcal{E}}: \frac{x\cdot\left(-\frac{a_1a_2}{c}\right)}{a_1^2} + \frac{y\cdot\left(-\frac{b_1b_2}{c}\right)}{b_1^2} = 1$

$$-\frac{a_2}{a_1c}x - \frac{b_2}{b_1c}y = 1$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_3^{\mathcal{E}}} = \left(-\frac{a_2}{a_1c}, -\frac{b_2}{b_1c}\right) \neq (0,0)$$

$T_3 \in \mathcal{H} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_3^{\mathcal{H}}$ хиперболе $\mathcal{H}$ у тачки T_3 је $t_3^{\mathcal{H}}: \frac{x\cdot\left(-\frac{a_1a_2}{c}\right)}{a_2^2} - \frac{y\cdot\left(-\frac{b_1b_2}{c}\right)}{b_2^2} = 1$

$$-\frac{a_1}{a_2c}x + \frac{b_1}{b_2c}y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_3^{\mathcal{H}}} = \left(-\frac{a_1}{a_2c}, \frac{b_1}{b_2c}\right) \neq (0,0)$$

Како је $\vec{n}_{t_3^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_3^{\mathcal{H}}} = \left(-\frac{a_2}{a_1c}, -\frac{b_2}{b_1c}\right)\circ\left(-\frac{a_1}{a_2c}, \frac{b_1}{b_2c}\right) = \frac{a_1a_2}{a_1a_2c^2} - \frac{b_1b_2}{b_1b_2c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0$, $\vec{n}_{t_3^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0}$ и $\vec{n}_{t_3^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}$,

то су вектори нормала правих $t_3^{\mathcal{E}}$ и $t_3^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_3^{\mathcal{E}} \perp t_3^{\mathcal{H}}$.

2.2° $T_4\left(\frac{a_1a_2}{c}, \frac{b_1b_2}{c}\right)$ је четврта пресечна тачка елипсе и хиперболе

$T_4 \in \mathcal{E} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_4^{\mathcal{E}}$ елипсе $\mathcal{E}$ у тачки T_4 је $t_4^{\mathcal{E}}: \frac{x\cdot\frac{a_1a_2}{c}}{a_1^2} + \frac{y\cdot\frac{b_1b_2}{c}}{b_1^2} = 1$

$$\frac{a_2}{a_1c}x + \frac{b_2}{b_1c}y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_4^{\mathcal{E}}} = \left(\frac{a_2}{a_1c}, \frac{b_2}{b_1c}\right) \neq (0,0)$$

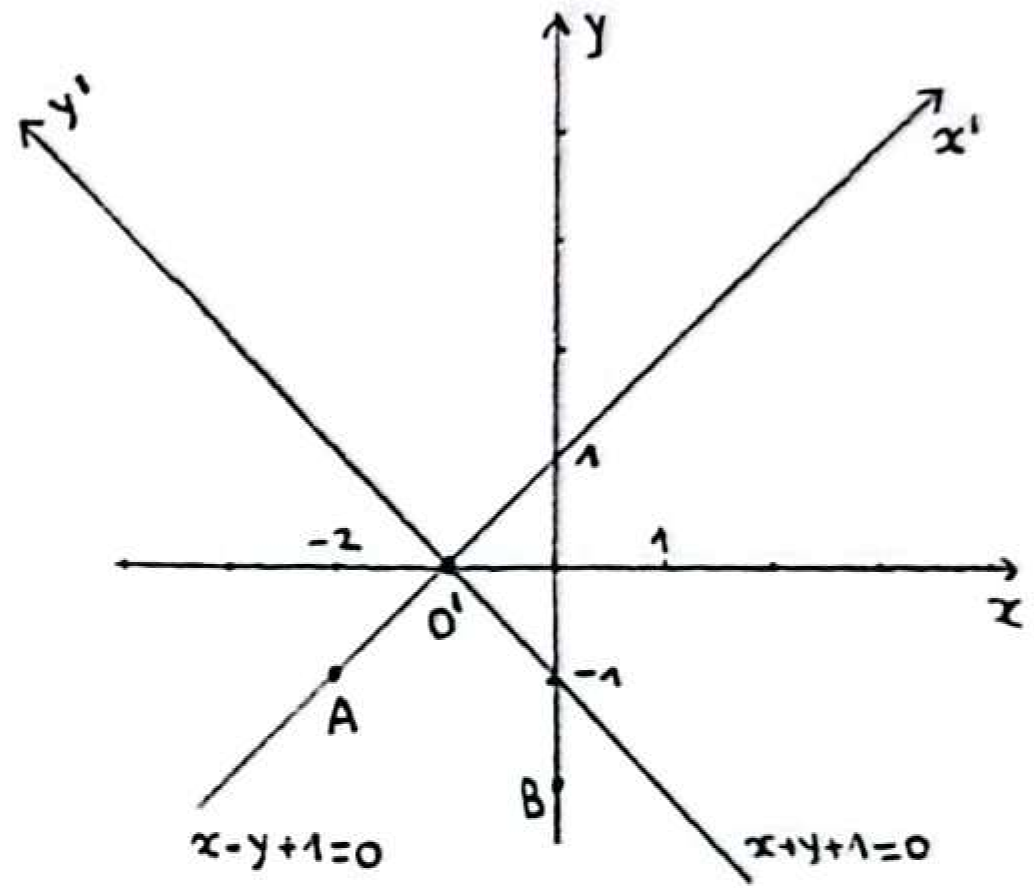
$T_4 \in \mathcal{H} \Rightarrow$ Једначина тангенте $t_4^{\mathcal{H}}$ хиперболе $\mathcal{H}$ у тачки T_4 је $t_4^{\mathcal{H}}: \frac{x\cdot\frac{a_1a_2}{c}}{a_2^2} - \frac{y\cdot\frac{b_1b_2}{c}}{b_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2c}x - \frac{b_1}{b_2c}y - 1 = 0$

$$\Rightarrow \vec{n}_{t_4^{\mathcal{H}}} = \left(\frac{a_1}{a_2c}, \frac{-b_1}{b_2c}\right) \neq (0,0)$$

Како је $\vec{n}_{t_4^{\mathcal{E}}} \cdot \vec{n}_{t_4^{\mathcal{H}}} = \left(\frac{a_2}{a_1c}, \frac{b_2}{b_1c}\right)\circ\left(\frac{a_1}{a_2c}, -\frac{b_1}{b_2c}\right) = \frac{a_1a_2}{a_1a_2c^2} - \frac{b_1b_2}{b_1b_2c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0$, $\vec{n}_{t_4^{\mathcal{E}}} \neq \vec{0}$ и $\vec{n}_{t_4^{\mathcal{H}}} \neq \vec{0}$, то су вектори нормала правих $t_4^{\mathcal{E}}$ и $t_4^{\mathcal{H}}$ међусобно нормални, те је $t_4^{\mathcal{E}} \perp t_4^{\mathcal{H}}$. Дакле, за све 4 тачке пресека T_1, T_2, T_3 и T_4 су тангента елипсе и тангента хиперболе међусобно нормалне, тј. елипса и хипербола се секу под правим углом.

5.11. Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(-2,-1)$ и $B(0,-2)$ и којој су праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ осе симетрије.

<u>Решење:</u> Нека је $O'x'y'$ други координатни систем коме је права $x-y+1=0$ x'-оса и права $x+y+1=0$ y'-оса.



$$x-y+1=0 \qquad\qquad x+y+1=0$$
$$x+1=y \qquad\qquad x+1=-y$$
$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1} \qquad\qquad \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}$$

Вектор x'-осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(1,1)$ праве $x-y+1=0$, а то је вектор

$$\vec{f_1}=\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Вектор y'-осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(-1,1)$ праве $x+y+1=0$, а то је вектор

$$\vec{f_2}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{1+1}}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Означимо са $O'(x_{0'},y_{0'})$ пресечну тачку правих $x-y+1=0$ и $x+y+1=0$.

$$\left.\begin{array}{l} x_{0'}-y_{0'}+1=0 \\ x_{0'}+y_{0'}+1=0 \end{array}\right\rangle \ominus \quad 2y_{0'}=0 \Rightarrow y_{0'}=0$$ и то убацимо у $x_{0'}-y_{0'}+1=0$

$$x_{0'}-0+1=0$$
$$x_{0'}=-1$$

Дакле, тачка $O'(-1,0)$ је координатни почетак новог координатног система $O'x'y'$.

Из области Трансформације координата знамо да је веза између старих и нових координата:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

координате првог новог базног вектора $\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ у старој бази $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ где је $\vec{e_1} = (1,0)$ и $\vec{e_2} = (0,1)$

координате другог новог базног вектора $\vec{f_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ у старој бази $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

координате новог координатног почетка O' у старој бази

$$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = (1,0) \cdot (0,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

$$\vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Како је $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ матрица преласка из ортонормираног афиног репера у ортонормирани афини репер $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$, то је $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и ово помножимо слева са $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Тада тачка $A(-2,-1)$ из Oxy координатног система постаје тачка чије су координате

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$ у $O'x'y'$ координатном

систему, а тачка $B(0,-2)$ из Oxy координатног система постаје тачка чије су координате

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ у $O'x'y'$ координатном

систему.

Крива коју тражимо има две осе симетрије (то су x' и y' оса), те мора бити елипса или хипербола. Трансформацијом координата постигли смо да у $O'x'y'$ координатном систему крива има једначину у канонском облику, односно да је једначина криве $\frac{x'^2}{a^2} + \beta\frac{y'^2}{b^2} = 1$, где је $\beta \in \{-1, 1\}$. Како тачке $A(-\sqrt{2}, 0)$ и $B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ у новом координатном систему припадају $\frac{x'^2}{a^2} + \beta\frac{y'^2}{b^2} = 1$, то важи

$$\frac{(-\sqrt{2})^2}{a^2} + \beta\cdot\frac{0^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{2}{a^2} = 1$$
$$a^2 = 2$$

$$\frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{a^2} + \beta\,\frac{(-\frac{3}{\sqrt{2}})^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{\frac{1}{2}}{2} + \beta\cdot\frac{\frac{9}{2}}{b^2} = 1$$
$$\frac{1}{4} + \beta\cdot\frac{9}{2b^2} = 1$$
$$\beta\frac{9}{2b^2} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\beta\cdot\frac{9}{2b^2} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \beta > 0$$ те мора бити $\beta = 1$ одакле је $1\cdot\frac{9}{2b^2} = \frac{3}{4}$

$$6b^2 = 36$$
$$b^2 = 6$$

Дакле, једначина криве (у питању је елипса) је $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$. У задатку се тражи једначина криве у почетном координатном систему Oxy. Како је $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}$, то заменом у добијену једначину у $O'x'y'$ координатном систему добијамо да је тражена једначина криве (елипсе) у Oxy координатном систему $\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{6} = 1$ тј. $\frac{(x+y+1)^2}{4} + \frac{(x-y+1)^2}{12} = 1$.

5.12. Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(2,1)$, ако су дате њена директриса $x-2y-5=0$ и оса симетрије $2x+y-1=0$.

Решење: Жижа $F(x_F,y_F)$ припада оси параболе $2x+y-1=0$. $\Rightarrow 2x_F+y_F-1=0 \Rightarrow y_F=1-2x_F \Rightarrow y_F-1=-2x_F$

Тачка $A(2,1)$ припада параболи. $\Rightarrow \dfrac{d(A,F)}{d(A,d)}=1$ јер је ексцентрицитет параболе једнак 1.

$$\left.\begin{aligned} d(A,F)&=AF=\sqrt{(x_F-2)^2+(y_F-1)^2}\\ d(A,d)&=\frac{|2-2\cdot1-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sqrt{(x_F-2)^2+(y_F-1)^2}=\sqrt5 \quad /^2$$

$$(x_F-2)^2+(y_F-1)^2=5$$

$$x_F^2-4x_F+4+(-2x_F)^2=5$$

$$x_F^2-4x_F+4+4x_F^2=5$$

$$5x_F^2-4x_F-1=0$$

$$D=(-4)^2-4\cdot5\cdot(-1)=16+20=36=6^2$$

$$x_{F_{1,2}}=\frac{4\pm6}{10}$$

$$x_F=\frac{4-6}{10}=\frac{-2}{10}=-\frac15 \qquad x_F=\frac{4+6}{10}=\frac{10}{10}=1$$

1° $x_F=-\frac15$ $\quad y_F=1-2x_F=1-2\cdot\left(-\frac15\right)=1+\frac25=\frac75 \Rightarrow F\left(-\frac15,\frac75\right)$

$\mathcal{P}_1:\ \dfrac{d(T,F)}{d(T,d)}=1$ где је $T(x,y)$ произвољна тачка са параболе

$$d(T,F)=TF=\sqrt{\left(x-\left(-\tfrac15\right)\right)^2+\left(y-\tfrac75\right)^2}=\sqrt{\left(x+\tfrac15\right)^2+\left(y-\tfrac75\right)^2}$$

$$d(T,d)=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt5}$$

$$\frac{\sqrt{\left(x+\frac15\right)^2+\left(y-\frac75\right)^2}}{\frac{|x-2y-5|}{\sqrt5}}=1 \quad /^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_1:\ \left(x+\tfrac15\right)^2+\left(y-\tfrac75\right)^2=\frac{(x-2y-5)^2}{5}}$$

2° $x_F=1$ $\quad y_F=1-2x_F=1-2\cdot1=1-2=-1 \Rightarrow F(1,-1)$

$\mathcal{P}_2:\ \dfrac{d(T,F)}{d(T,d)}=1$ где је $T(x,y)$ произвољна тачка са параболе

$$d(T,F)=TF=\sqrt{(x-1)^2+(y-(-1))^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

$$d(T,d)=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt5}$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}{\frac{|x-2y-5|}{\sqrt5}}=1 \quad /^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_2:\ (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{(x-2y-5)^2}{5}}$$

5.13. Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $\ell: x+y-1=0$, а жиже су јој тачке $F_1(1,1)$ и $F_2(-2,-2)$.

Решење: Тражена крива има две жиже, те је у питању елипса или хипербола. Центар криве је средиште дужи F_1F_2, те су координате центра O редом $\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$ и $\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$ јер су координате жижа $F_1(1,1)$ и $F_2(-2,-2)$. Растојање од центра до жиже (било које) је $c=OF_1=$

$= \sqrt{(1-(-\frac{1}{2}))^2+(1-(-\frac{1}{2}))^2} = \sqrt{(1+\frac{1}{2})^2+(1+\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2} = \sqrt{2\cdot(\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, а растојање од центра до директрисе је $\frac{a^2}{c} = d(O,\ell) = \frac{|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Следи да је $a^2 = c\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = 3$, те је $a=\sqrt{3}$. Како је $e=\frac{c}{a}$, следи да је $e = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Да бисмо искористили особину да је количник растојања произвољне тачке криве другог реда од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету, морамо утврдити која од ових жижа је у пару с директрисом. У пару с њом биће она жижа чије је растојање од ње мање. Како је $d(F_1,\ell) = \frac{|1+\cancel{1}-\cancel{1}|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $d(F_2,\ell) = \frac{|-2-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, следи да су жижа F_1 и директриса ℓ у пару. Дакле, једначина тражене криве (која је хипербола јер је $e=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$) је дата са $\frac{d(T,F_1)}{d(T,\ell)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ где је $T(x,y)$ произвољна тачка криве.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}_{\geq 0} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|x+y-1| = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}|x+y-1|}_{\geq 0} \quad /^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = \frac{3}{4}(x+y-1)^2$$

је тражена једначина криве

(5.14.) Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,4)$ и додирује криву $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$

Решење: Права t која садржи тачку $A(3,4)$ има једначину $t: \frac{x-3}{u} = \frac{y-4}{v}$ где је $(u,v) \neq (0,0)$ вектор правца праве t. Да би права t додиривала криву потребно је да постоји јединствена тачка $T(x_T, y_T)$ у пресеку праве t и криве. $T(x_T, y_T) \in t$ те постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је

$\frac{x_T-3}{u} = \frac{y_T-4}{v} = \lambda \implies x_T = u\lambda+3$, $y_T = v\lambda+4$ и ово убацимо у $2x_T^2-4x_Ty_T+y_T^2-2x_T+6y_T-3=0$

(што важи јер тачка $T(x_T,y_T)$ припада кривој $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$).

$$2\cdot(u\lambda+3)^2-4\cdot(u\lambda+3)\cdot(v\lambda+4)+(v\lambda+4)^2-2(u\lambda+3)+6(v\lambda+4)-3=0$$

$$2(u^2\lambda^2+6u\lambda+9)-4(uv\lambda^2+4u\lambda+3v\lambda+12)+v^2\lambda^2+8v\lambda+16-2u\lambda-6+6v\lambda+24-3=0$$

$$2u^2\lambda^2+12u\lambda+18-4uv\lambda^2-16u\lambda-12v\lambda-48+v^2\lambda^2+14v\lambda+10-2u\lambda+21=0$$

$$(2u^2-4uv+v^2)\lambda^2+(-6u+2v)\lambda+1=0$$

Постоје две могућности да се добије само једно λ, односно јединствена тачка пресека праве t и криве.

Из теорије је познато да би се у првој могућности, када је $2u^2-4uv+v^2=0$, тј. имамо линеарну једначину добиле праве које имају јединствену тачку пресека са кривом, али које нису тангенте (нпр. ако је крива парабола онда права паралелна са осом има једну заједничку тачку са параболом, али није тангента).

Познато је и да ако $2u^2-4uv+v^2 \neq 0$ и добијена квадратна једначина има дискриминанту једнаку 0, да ће права бити тангента, те нам та друга могућност одговара.

$$D=(-6u+2v)^2-4\cdot(2u^2-4uv+v^2)\cdot 1 = 36u^2-24uv+\cancel{4v^2}-8u^2+16uv-\cancel{4v^2} = 28u^2-8uv = 4u(7u-2v)=0$$

$u=0$ $\quad$ $7u-2v=0$

$u=0$

$t_1: \frac{x-3}{u} = \frac{y-4}{v}$

$\frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{v}$ / скратимо v

$\frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{1}$

$2u^2-4uv+v^2 = 2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 \cdot 1 + 1^2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ t_1 је тангента

$7u-2v=0$

$7u=2v$

$u:v = 2:7 \Rightarrow u=2k,\ v=7k$

$t_2: \frac{x-3}{u} = \frac{y-4}{v}$

$\frac{x-3}{2k} = \frac{y-4}{7k}$ / скратимо k

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{7}$

$2u^2-4uv+v^2 = 2\cdot 2^2 - 4\cdot 2\cdot 7 + 7^2 = 2\cdot 4 - 8\cdot 7 + 49 =$

$= 8-56+49 = 8-7 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ t_2 је тангента

Постоје две тражене праве и оне су $t_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{1}$ и $t_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{7}$.

Свођење криве другог реда на канонски облик

Нека је дата крива другог реда $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Нека је $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Важи $(x\ y\ 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{1\times 3}{(x\ y\ 1)} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \quad a_{13}x + a_{23}y + a_{33}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) \cdot x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})y + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = a_{11}x^2 + \underline{a_{12}xy} + \underline{\underline{a_{13}x}} + \underline{a_{12}xy} + a_{22}y^2 + a_{23}y +$

$\underline{\underline{a_{13}x}} + a_{23}y + a_{33} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$. Зато се једначина криве може написати као $(x\ y\ 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Свођење криве на канонски облик представља тражење новог Декартовог правоуглог координатног система у којем ће та крива имати једначину облика $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је крива елипса, облика $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је крива хипербола, односно облика $y^2 = 2px$ ако је крива парабола.

Приметимо да ниједна крива у канонском облику нема члан xy.

Дакле, из подматрице $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ треба прећи у матрицу $B' = \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$.

Ако претпоставимо да је трансформација координата $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ онда је

$(x\ y)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^T B \left(R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T R_1^T B R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x'\ y')\, R_1^T B R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

те је циљ да матрица R_1 буде таква да је $R_1^T B R_1 = B' = \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$ тј. да $R_1^T B R_1$ буде дијагонална матрица.

Такође, како се свођењем криве другог реда на канонски облик прелази из полазног Декартовог правоуглог координатног система у нови Декартов правоугли координатни систем, а R_1 је матрица трансформације координата из полазног система у нови систем, то је матрица R_1 ортогонална, односно $R_1^T = R_1^{-1}$.

Дакле, тражимо матрицу R_1 са својством $R_1^T = R_1^{-1}$ такву да је $R_1^{-1} B R_1 = R_1^T B R_1$ дијагонална матрица, а из Линеарне алгебре нам је познато да до те матрице дођемо поступком дијагонализације.

5.15. Свести криву другог реда $xy+x+y=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле трансформације. Одредити основне елементе криве (центар, осе симетрије, жиже, ексцентрицитет, асимптоте – ако постоје). Скицирати криву.

Решење:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ јер из једначине криве $xy+x+y=0$ закључујемо да је $a_{11}=0$, $2a_{12}=1$ тј. $a_{12}=\frac{1}{2}$, $a_{22}=0$, $2a_{13}=1$ тј. $a_{13}=\frac{1}{2}$, $2a_{23}=1$ тј. $a_{23}=\frac{1}{2}$, $a_{33}=0$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Потражимо сопствене вредности матрице B.

$$\det(B-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}=(-\lambda)\cdot(-\lambda)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\lambda^2-\frac{1}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{2} \text{ или } \lambda=\frac{1}{2}$$

Дакле, сопствене вредности су $\lambda=-\frac{1}{2}$ и $\lambda=\frac{1}{2}$. Потражимо сопствене векторе.

1°

$$B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\left(B-\frac{1}{2}E\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v=0 \Rightarrow \frac{1}{2}v=\frac{1}{2}u \Rightarrow u=v$$

$$\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v=0 \Rightarrow \frac{1}{2}v=\frac{1}{2}u \Rightarrow u=v$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}=v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Јединични сопствени вектор је $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

2°

$$B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\left(B+\frac{1}{2}E\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v=0 \Rightarrow \frac{1}{2}u=-\frac{1}{2}v \Rightarrow u=-v$$

$$\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v=0 \Rightarrow \frac{1}{2}u=-\frac{1}{2}v \Rightarrow u=-v$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix}=v\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Јединични сопствени вектор је $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Дакле, трансформација је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, односно $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нова матрица коефицијената је $A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ Нова једначина криве је $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' = 0$ (јер је $a'_{11} = \frac{1}{2}$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = -\frac{1}{2}$, $a'_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a'_{23} = 0$, $a'_{33} = 0$).

$$x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}x' = 0$$
$$x'^2 + 2\sqrt{2}x' - y'^2 = 0$$
$$(x' + \sqrt{2})^2 - 2 - y'^2 = 0$$
$$(x' + \sqrt{2})^2 - y'^2 = 2 \quad / : 2 \neq 0$$
$$\frac{(x' + \sqrt{2})^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

Уочимо трансформацију $x'' = x' + \sqrt{2}$, $y'' = y'$ и нова једначина је $\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} = 1$, те је у питању хипербола.

$$a^2 = 2 \underset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{2}$$
$$b^2 = 2 \underset{b>0}{\Rightarrow} b = \sqrt{2}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 2 = 4 \underset{c>0}{\Rightarrow} c = 2$$

Формуле трансформације су $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' - \sqrt{2} \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$

Центар криве у (x'', y'') је $(0,0)$, те је центар у (x,y) одређен са $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 - \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Жиже хиперболе у (x'', y'') су $(-2, 0)$ и $(2, 0)$ јер је $c = 2$, те су жиже хиперболе у (x, y) дате са

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2-\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2}(-2-\sqrt2)-\frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt2}\cdot(-2-\sqrt2)+\frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt2-1 \\ -\sqrt2-1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2}\cdot(2-\sqrt2)+(-\frac{1}{\sqrt2})\cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt2}\cdot(2-\sqrt2)+\frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt2-1 \\ \sqrt2-1 \end{pmatrix}.$$

Осе симетрије хиперболе у (x'',y'') су $y''=0$ и $x''=0$.

Убацивањем $y''=0$ у $x=\frac{1}{\sqrt2}x''-\frac{1}{\sqrt2}y''-1$ и $y=\frac{1}{\sqrt2}x''+\frac{1}{\sqrt2}y''-1$ добијамо $x=\frac{1}{\sqrt2}x''-1$, $y=\frac{1}{\sqrt2}x''-1$ тј. $y=x$.

Убацивањем $x''=0$ у $x=\frac{1}{\sqrt2}x''-\frac{1}{\sqrt2}y''-1$ и $y=\frac{1}{\sqrt2}x''+\frac{1}{\sqrt2}y''-1$ добијамо $x=-\frac{1}{\sqrt2}y''-1$, $y=\frac{1}{\sqrt2}y''-1$ тј. $y=-x-2$.

Осе симетрије у (x,y) су $y=x$ и $y=-x-2$.

Асимптоте у (x'',y'') су $y''=-\frac{b}{a}x''=-\frac{\sqrt2}{\sqrt2}x''=-x''$ и $y''=\frac{b}{a}x''=\frac{\sqrt2}{\sqrt2}x''=x''$.

Убацујемо $y''=-x''$ у $x=\frac{1}{\sqrt2}x''-\frac{1}{\sqrt2}y''-1=\frac{1}{\sqrt2}x''+\frac{1}{\sqrt2}x''-1=\frac{2}{\sqrt2}x''-1=\sqrt2x''-1$

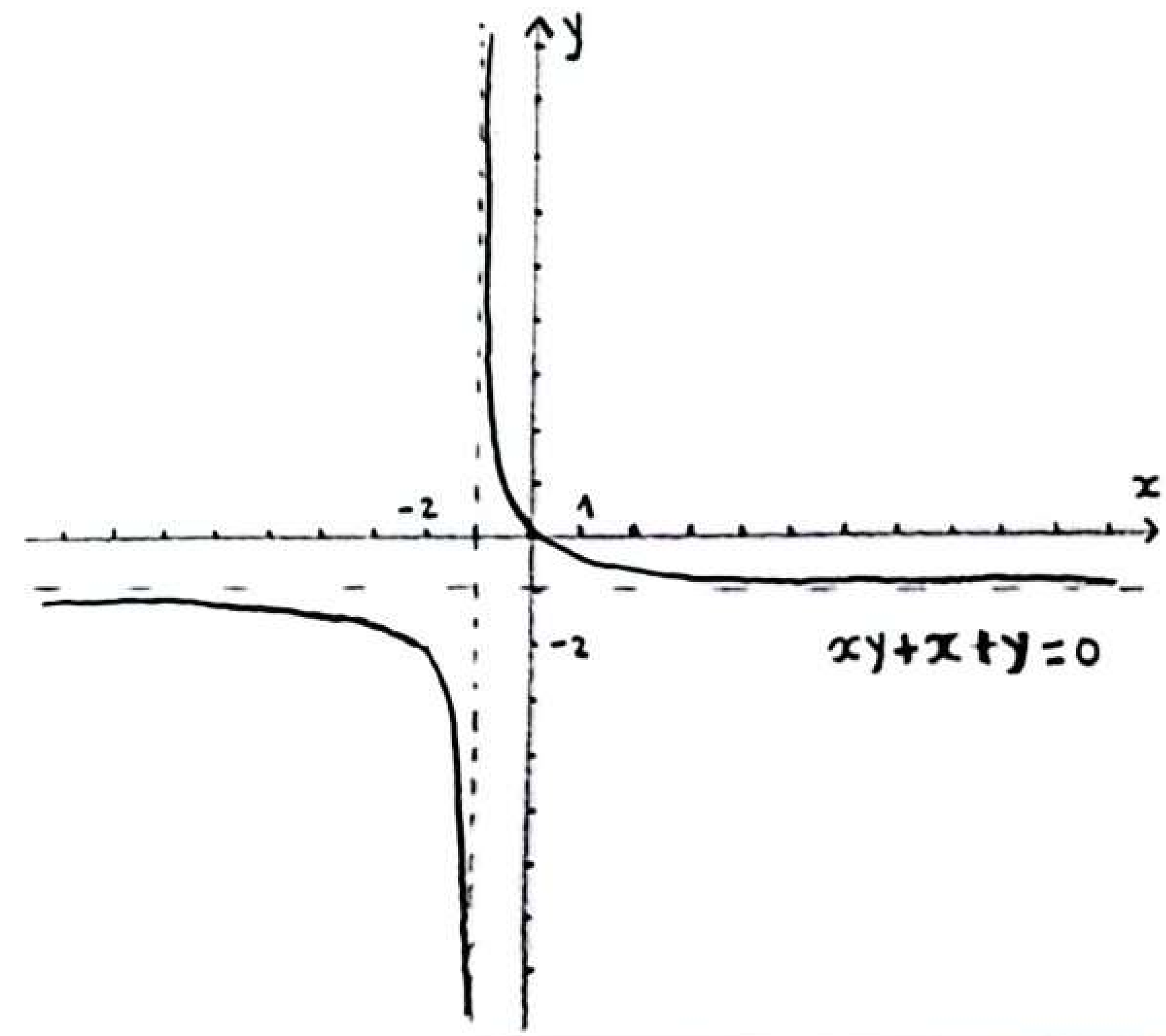
$y=\frac{1}{\sqrt2}x''+\frac{1}{\sqrt2}y''-1=\frac{1}{\sqrt2}x''-\frac{1}{\sqrt2}x''-1=-1.$

Убацујемо $y''=x''$ у $x=\frac{1}{\sqrt2}x''-\frac{1}{\sqrt2}y''-1=\frac{1}{\sqrt2}x''-\frac{1}{\sqrt2}x''-1=-1$

$y=\frac{1}{\sqrt2}x''+\frac{1}{\sqrt2}y''-1=\frac{1}{\sqrt2}x''+\frac{1}{\sqrt2}x''-1=\frac{2}{\sqrt2}x''-1=\sqrt2x''-1$

Дакле, асимптоте хиперболе у (x,y) су $y=-1$ и $x=-1$.

Ексцентрицитет хиперболе је $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$.



5.16. Свести криву другог реда $4x^2-4xy+y^2+x+12y+6=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива и колики јој је ексцентрицитет? Скицирати криву.

<u>Решење:</u> $4x^2-4xy+y^2+x+12y+6=0 \Rightarrow a_{11}=4 \quad a_{12}=-2 \quad a_{22}=1 \quad a_{13}=\frac{1}{2} \quad a_{23}=6 \quad a_{33}=6$

$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix}$ је матрица придружена кривој

$B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Нађимо сопствене вредности матрице B.

$\det(B-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)\cdot(1-\lambda)-(-2)\cdot(-2)=\cancel{4}-4\lambda-\lambda+\lambda^2-\cancel{4}=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)$

$\lambda(\lambda-5)=0$ за $\lambda=0$ и $\lambda=5$ те су то сопствене вредности.

Нађимо сопствене векторе.

1° $\lambda=0$

$(B-\lambda E)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$4u-2v=0 \quad /:2 \qquad 2u-v=0$

$-2u+v=0 \qquad\qquad + \quad 0=0$

$2u-v=0$

$0=0$

Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности 0 су $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Да бисмо обезбедили својство $R_1^T=R_1^{-1}$ из теорије потребно је узети јединични вектор (вектор дужине 1).

Пошто је $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, следи да ћемо узети вектор $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

2° $\lambda=5$

$$(B-\lambda E)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} -u-2v=0 & /\cdot(-1) \\ -2u-4v=0 & /:(-2) \\ \hline u+2v=0 & \Rightarrow u=-2v \\ u+2v=0 & \end{array}$$

Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\lambda=5$ су $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2v \\ v \end{pmatrix}=v\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Поново, треба узети јединични сопствени вектор, па пошто је $\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, следи да можемо узети вектор $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$.

При томе, можемо приметити да смо овај сопствени вектор добили од сопственог вектора $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$ који смо добили за претходну сопствену вредност помоћу: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$.
То важи и генерално (из линеарне алгебре је познато да су код симетричних матрица сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима међусобно нормални), те не морамо рачунати сопствени вектор за другу сопствену вредност.

$\Rightarrow R_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$ и проширимо је до матрице 3x3, $R=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тада добијамо трансформацију координата $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=R_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, тј. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$ и једначину криве у новом координатном систему $O'x'y'$:

$$(x\ y\ 1)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\left(R\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T A\left(R\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}^T R^T A R\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=(x'\ y'\ 1)\ R^TAR\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

односно нова матрица коефицијената је $A' = R^T A R$.

$$A' = R^TAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{25}{2\sqrt5} \\ -\frac{10}{\sqrt5} & \frac{5}{\sqrt5} & \frac{5}{\sqrt5} \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{25}{2\sqrt5} \\ 0 & \frac{25}{5} & \frac{5}{\sqrt5} \\ \frac{25}{2\sqrt5} & \frac{5}{\sqrt5} & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5\sqrt5}{2} \\ 0 & 5 & \sqrt5 \\ \frac{5\sqrt5}{2} & \sqrt5 & 6 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ У новом координатном систему $O'x'y'$ крива има једначину

$$0\cdot x'^2 + 2\cdot 0\cdot x'y' + 5\cdot y'^2 + 2\cdot\frac{5\sqrt5}{2}x' + 2\sqrt5 y' + 6 = 0 \quad \text{тј.} \quad 5y'^2 + 5\sqrt5 x' + 2\sqrt5 y' + 6 = 0.$$

Приметимо да овде нема x'^2. Да има, извршили бисмо следећу трансформацију коју ћемо извршити над y'.

$$5\cdot\left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt5}y'\right) + 5\sqrt5 x' + 6 = 0$$

$$5\cdot\left(\left(y' + \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2\right) + 5\sqrt5 x' + 6 = 0$$

$$5\cdot\left(y' + \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 - 5\cdot\frac{1}{5} + 5\sqrt5 x' + 6 = 0$$

$$5\left(y' + \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 - 1 + 5\sqrt5 x' + 6 = 0$$

$$5\left(y' + \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 + 5\sqrt5 x' + 5 = 0$$

$$5\left(y' + \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 + 5\sqrt5\left(x' + \frac{1}{\sqrt5}\right) = 0$$

Дакле, правимо потпун квадрат од y'^2 и y', а ако имамо и x'^2, онда и од x'^2 и x'. При томе, у загради коју подижемо на квадрат коефицијент уз x', односно y' треба бити 1 и та заграда постаје ново x'', односно y''.

Вршимо следећу трансформацију:

$$y'' = y' + \frac{1}{\sqrt5} \qquad x'' = x' + \frac{1}{\sqrt5}$$

$$5y''^2 + 5\sqrt5 x'' = 0 \quad /:5$$

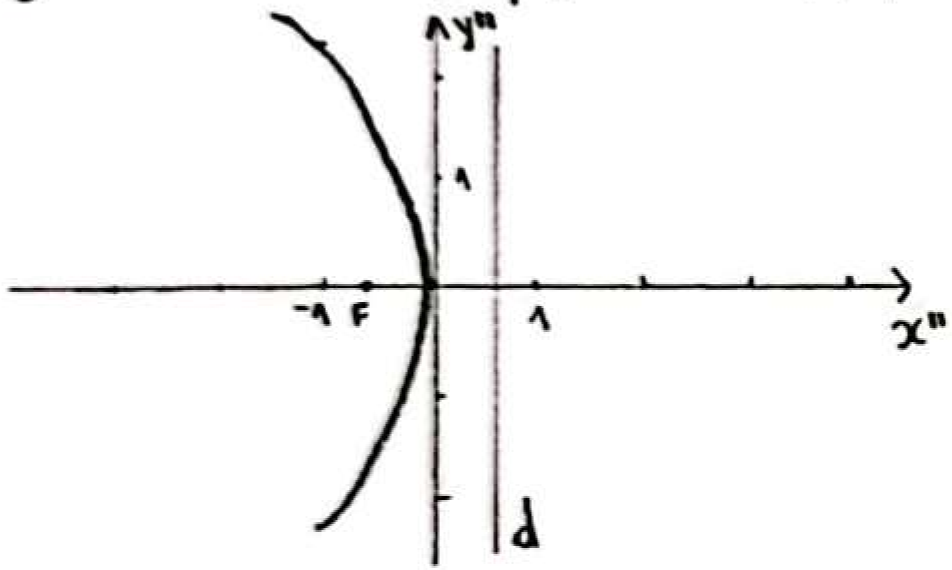
$$y''^2 + \sqrt5 x'' = 0$$

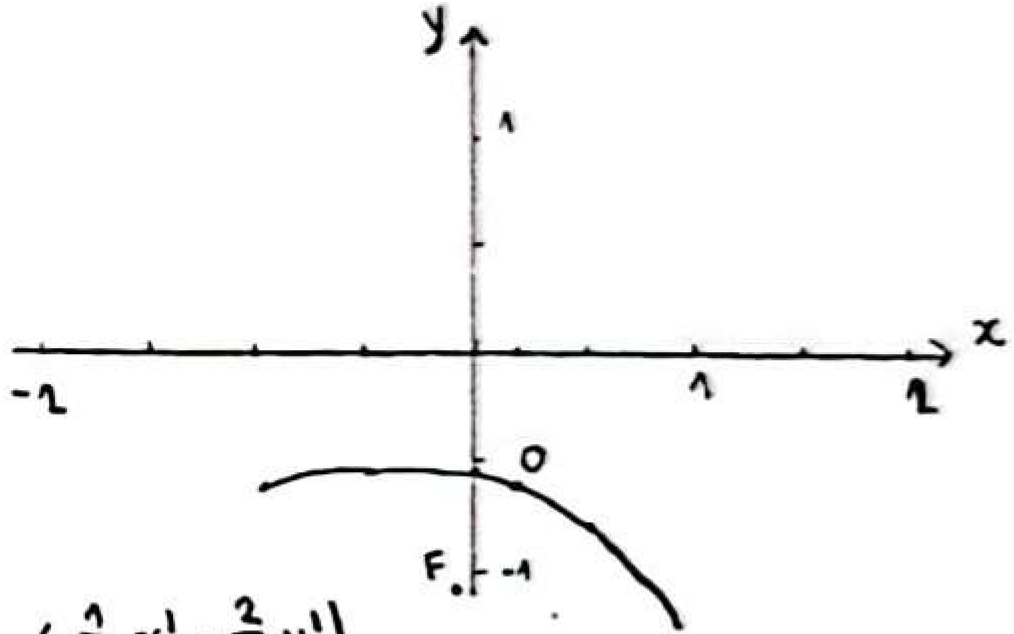
$$y''^2 = -\sqrt5 x'' = -2\cdot\frac{\sqrt5}{2}x'' \Rightarrow p = \frac{\sqrt5}{2}$$ и крива је парабола

Приметимо да је $y''^2 = -2px''$, $p>0$, те је ова парабола симетрична стандардној канонској параболи $y''^2 = 2px''$, $p>0$, у односу на y''-осу.

Ексцентрицитет је једнак 1 јер је у питању парабола.

У канонском облику се одмах види да је теме параболе $O(0,0)$, да је оса $\sigma: y''=0$, да је жижа $F(-\frac{\sqrt{5}}{4},0)$ и директриса $d: x''=\frac{\sqrt{5}}{4}$.





Како су формуле трансформације $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{pmatrix}$ тј. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$ и $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ и како је $x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{5}}$ тј. $x' = x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$ тј. $y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{5}}$, то је

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(x''-\frac{1}{\sqrt{5}}) - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(y''-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{2}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{1}{5}$ и $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2}{\sqrt{5}}(x''-\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y''-\frac{1}{\sqrt{5}}) =$
$= \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - \frac{3}{5}$. Заменом одговарајућих x'' и y'' координата темена добијамо

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0 - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0 - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$, а заменом одговарајућих x'' и y'' координата жиже

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-\frac{\sqrt{5}}{4}) - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0 + \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{-5+4}{20} = \frac{-1}{20}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(-\frac{\sqrt{5}}{4}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0 - \frac{3}{5} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = -\frac{5}{10} - \frac{6}{10} = -\frac{11}{10}$