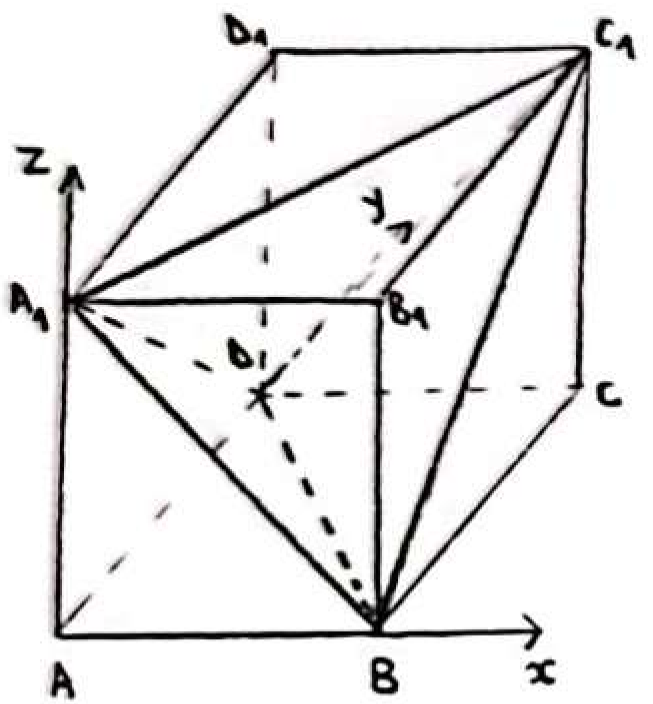
4.21. Одредити угао између пљосни правилног тетраедра.

Решење: Сетимо се погодно одабраног ортонормираног репера из задатка 3.8 а) у коме су координате темена правилног тетраедра A_1BC_1D ивице a биле $A_1(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2})$, $B(\frac{a\sqrt{2}}{2},0,0)$, $C_1(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2})$, $D(0,\frac{a\sqrt{2}}{2},0)$.



Због симетрије правилног тетраедра важи да су углови између сваке две његове пљосни једнаки, те је довољно израчунати угао између пљосни A_1BD и A_1BC_1.

$$\overrightarrow{A_1B} = [B]-[A_1] = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2},0,0\right)-\left(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2},0,-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{A_1D} = [D]-[A_1] = \left(0,\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right)-\left(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \left(0,\frac{a\sqrt{2}}{2},-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

Вектор нормале равни A_1BD можемо узети да је $\overrightarrow{A_1B}\times\overrightarrow{A_1D}$ јер су $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D}$ линеарно независни вектори равни A_1BD (зато што $\alpha\cdot\overrightarrow{A_1B}+\beta\cdot\overrightarrow{A_1D}=\vec{0} \Rightarrow$

$$\alpha\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},0,-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\beta\cdot\left(0,\frac{a\sqrt{2}}{2},-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=(0,0,0) \Rightarrow \left(\alpha\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2},0,-\alpha\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\left(0,\beta\frac{a\sqrt{2}}{2},-\beta\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left(\alpha\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2},\beta\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2},-\alpha\frac{a\sqrt{2}}{2}-\beta\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=(0,0,0) \Rightarrow \alpha\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=0,\ \beta\frac{a\sqrt{2}}{2}=0,\ -\alpha\frac{a\sqrt{2}}{2}-\beta\frac{a\sqrt{2}}{2}=0\ )$$

$$\Downarrow a\neq0 \qquad \Downarrow a\neq0$$

$$\alpha=0 \qquad \beta=0 \qquad \checkmark$$

$$\vec{n}_{A_1BD}=\overrightarrow{A_1B}\times\overrightarrow{A_1D}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{a\sqrt{2}}{2} & -\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2}\\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & -\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_1+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}\frac{a\sqrt{2}}{2} & -\frac{a\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_2+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}\frac{a\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{a\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_3=$$

$$=(-1)^2\cdot\left(0\cdot\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right)\vec{e}_1+(-1)^3\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)-0\cdot\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right)\vec{e}_2+(-1)^4\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}-0\cdot0\right)\vec{e}_3=$$

$$=1\cdot\frac{2a^2}{4}\vec{e}_1-\left(-\frac{2a^2}{4}\right)\vec{e}_2+1\cdot\frac{2a^2}{4}\vec{e}_3=\frac{a^2}{2}\vec{e}_1+\frac{a^2}{2}\vec{e}_2+\frac{a^2}{2}\vec{e}_3=\left(\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{A_1C_1}=[C_1]-[A_1]=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)-\left(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$$\gamma\cdot\overrightarrow{A_1B}+\delta\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=\vec{0} \Rightarrow \gamma\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},0,-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\delta\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right)=(0,0,0) \Rightarrow \left(\gamma\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2},0,-\gamma\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\delta\frac{a\sqrt{2}}{2},\delta\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$\left(\gamma\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}+\delta\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2},\delta\frac{a\sqrt{2}}{2},-\gamma\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=(0,0,0) \Rightarrow \gamma\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}+\delta\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=0,\quad \delta\frac{a\sqrt{2}}{2}=0,\ -\gamma\frac{a\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\Downarrow a\neq0 \qquad \Downarrow a\neq0$$

$$\checkmark \qquad \delta=0 \qquad \gamma=0$$

$\Rightarrow$ Вектори $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ су линеарно независни вектори равни A_1BC_1, те се $\overrightarrow{A_1B} \times \overrightarrow{A_1C_1}$ може узети за вектор нормале равни A_1BC_1.

$$\Rightarrow \vec{n}_{A_1BC_1} = \overrightarrow{A_1B} \times \overrightarrow{A_1C_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-1)^2 \cdot \left(0 \cdot 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \vec{e}_3 =$$

$$= 1 \cdot \left(0 + \frac{2a^2}{4}\right)\vec{e}_1 - \left(0 + \frac{2a^2}{4}\right)\vec{e}_2 + 1 \cdot \left(\frac{2a^2}{4} - 0\right)\vec{e}_3 = \frac{a^2}{2}\vec{e}_1 - \frac{a^2}{2}\vec{e}_2 + \frac{a^2}{2}\vec{e}_3 = \left(\frac{a^2}{2}, -\frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2}\right)$$

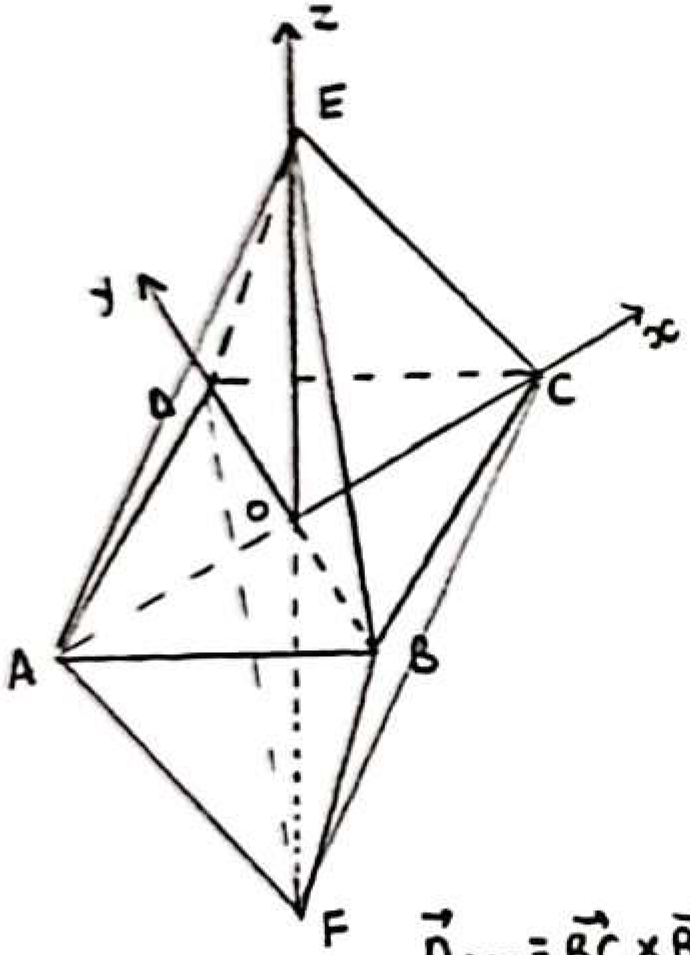
$$\cos \measuredangle(A_1BD, A_1BC_1) = |\cos \measuredangle(\vec{n}_{A_1BD}, \vec{n}_{A_1BC_1})| = \frac{|\vec{n}_{A_1BD} \circ \vec{n}_{A_1BC_1}|}{\|\vec{n}_{A_1BD}\| \cdot \|\vec{n}_{A_1BC_1}\|} = \frac{\left|\left(\frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2}\right) \circ \left(\frac{a^2}{2}, -\frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{2}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left|\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(-\frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2}\right|}{\sqrt{3 \cdot \frac{a^4}{4}} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{a^4}{4}}} = \frac{\left|\cancel{\frac{a^4}{4}} - \cancel{\frac{a^4}{4}} + \frac{a^4}{4}\right|}{\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2}} = \frac{\cancel{\frac{a^4}{4}}}{3 \cdot \cancel{\frac{a^4}{4}}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(A_1BD, A_1BC_1) = \arccos\frac{1}{3}$$

Дакле, угао између пљосни правилног тетраедра је $\arccos\frac{1}{3}$.

4.22. Одредити угао између (свих могућих) пљосни правилног октаедра које имају заједничку ивицу.

Решење: Сетимо се погодно одабраног ортонормираног репера из задатка 3.8б) у коме су координате темена правилног октаедра $EABCDF$ ивице d биле $E(0,0,\frac{d\sqrt{2}}{2})$, $A(-\frac{d\sqrt{2}}{2},0,0)$, $B(0,-\frac{d\sqrt{2}}{2},0)$, $C(\frac{d\sqrt{2}}{2},0,0)$, $D(0,\frac{d\sqrt{2}}{2},0)$, $F(0,0,-\frac{d\sqrt{2}}{2})$.



Одредимо прво угао између пљосни BCE и BCF које се секу по дужи BC.

$$\vec{BC}=[C]-[B]=(\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0,0)-(0,-\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)=(\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)$$

$$\vec{BE}=[E]-[B]=(0,0,\tfrac{d\sqrt{2}}{2})-(0,-\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)=(0,\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\tfrac{d\sqrt{2}}{2})$$

$$\alpha\cdot\vec{BC}+\beta\cdot\vec{BE}=\vec{0} \Rightarrow \alpha\cdot(\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)+\beta\cdot(0,\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\tfrac{d\sqrt{2}}{2})=(0,0,0)\Rightarrow(\alpha\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\alpha\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)+(0,\beta\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\beta\tfrac{d\sqrt{2}}{2})=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\alpha\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}+\beta\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\beta\tfrac{d\sqrt{2}}{2})=(0,0,0)\Rightarrow \alpha\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}=0,\quad \alpha\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}+\beta\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}=0,\quad \beta\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\Downarrow d\neq 0 \qquad\qquad \checkmark \qquad\qquad \Downarrow d\neq 0$$

$$\alpha=0 \qquad\qquad\qquad\qquad \beta=0$$

$\Rightarrow$ Вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BE}$ су линеарно независни вектори равни BCE, те је $\vec{BC}\times\vec{BE}$ један вектор нормале равни BCE.

$$\vec{n}_{BCE}=\vec{BC}\times\vec{BE}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_1+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_2+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_3=$$

$$=(-1)^2\cdot(\tfrac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}-\tfrac{d\sqrt{2}}{2}\cdot 0)\vec{e}_1+(-1)^3\cdot(\tfrac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}-0\cdot 0)\vec{e}_2+(-1)^4\cdot(\tfrac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2}-0\cdot\tfrac{d\sqrt{2}}{2})\vec{e}_3=$$

$$=1\cdot(\tfrac{2d^2}{4}-0)\vec{e}_1-(\tfrac{2d^2}{4}-0)\vec{e}_2+(\tfrac{2d^2}{4}-0)\vec{e}_3=\tfrac{d^2}{2}\vec{e}_1-\tfrac{d^2}{2}\vec{e}_2+\tfrac{d^2}{2}\vec{e}_3=(\tfrac{d^2}{2},-\tfrac{d^2}{2},\tfrac{d^2}{2})$$

$$\vec{BF}=[F]-[B]=(0,0,-\tfrac{d\sqrt{2}}{2})-(0,-\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)=(0,\tfrac{d\sqrt{2}}{2},-\tfrac{d\sqrt{2}}{2})$$

$$\gamma\cdot\vec{BC}+\delta\cdot\vec{BF}=\vec{0}\Rightarrow\gamma\cdot(\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)+\delta\cdot(0,\tfrac{d\sqrt{2}}{2},-\tfrac{d\sqrt{2}}{2})=(0,0,0)\Rightarrow(\gamma\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\gamma\tfrac{d\sqrt{2}}{2},0)+(0,\delta\tfrac{d\sqrt{2}}{2},-\delta\tfrac{d\sqrt{2}}{2})=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow(\gamma\tfrac{d\sqrt{2}}{2},\gamma\tfrac{d\sqrt{2}}{2}+\delta\tfrac{d\sqrt{2}}{2},-\delta\tfrac{d\sqrt{2}}{2})=(0,0,0)\Rightarrow\gamma\tfrac{d\sqrt{2}}{2}=0,\quad\gamma\tfrac{d\sqrt{2}}{2}+\delta\tfrac{d\sqrt{2}}{2}=0,\quad -\delta\tfrac{d\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\Downarrow d\neq 0 \qquad\qquad \checkmark \qquad\qquad \Downarrow d\neq 0$$

$$\gamma=0 \qquad\qquad\qquad\qquad \delta=0$$

$\Rightarrow$ Вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BF}$ су линеарно независни вектори равни BCF, те је $\vec{BC}\times\vec{BF}$ један вектор нормале равни BCF.

$$\vec{n}_{BCF}=\vec{BC}\times\vec{BF}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2} & -\frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{d\sqrt{2}}{2} & -\frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_1+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_2+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}\frac{d\sqrt{2}}{2} & \frac{d\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{d\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{e}_3=$$

$$=(-1)^2\cdot\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)-0\cdot\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)\vec{e}_1+(-1)^3\cdot\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)-0\cdot 0\right)\vec{e}_2+(-1)^4\cdot\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{d\sqrt{2}}{2}-0\cdot\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)\vec{e}_3=$$

$$=1\cdot\left(-\frac{2d^2}{4}-0\right)\vec{e}_1-\left(-\frac{2d^2}{4}-0\right)\vec{e}_2+\left(\frac{2d^2}{4}-0\right)\vec{e}_3=-\frac{d^2}{2}\vec{e}_1+\frac{d^2}{2}\vec{e}_2+\frac{d^2}{2}\vec{e}_3=\left(-\frac{d^2}{2},\frac{d^2}{2},\frac{d^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \cos\measuredangle(BCE,BCF)=|\cos\measuredangle(\vec{n}_{BCE},\vec{n}_{BCF})|=\frac{|\vec{n}_{BCE}\circ\vec{n}_{BCF}|}{\|\vec{n}_{BCE}\|\cdot\|\vec{n}_{BCF}\|}=\frac{\left|\left(\frac{d^2}{2},-\frac{d^2}{2},\frac{d^2}{2}\right)\circ\left(-\frac{d^2}{2},\frac{d^2}{2},\frac{d^2}{2}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{2}\right)^2+\left(-\frac{d^2}{2}\right)^2+\left(\frac{d^2}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{d^2}{2}\right)^2+\left(\frac{d^2}{2}\right)^2+\left(\frac{d^2}{2}\right)^2}}=\frac{\left|\frac{d^2}{2}\cdot\left(-\frac{d^2}{2}\right)+\left(-\frac{d^2}{2}\right)\cdot\frac{d^2}{2}+\frac{d^2}{2}\cdot\frac{d^2}{2}\right|}{\sqrt{3\cdot\frac{d^4}{4}}\cdot\sqrt{3\cdot\frac{d^4}{4}}}$$

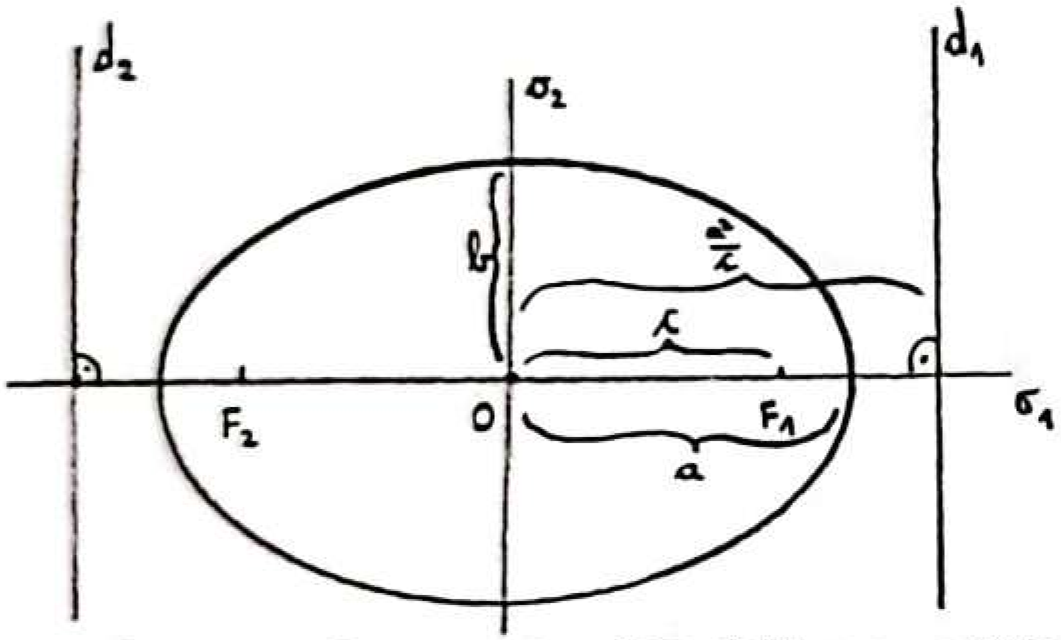
$$=\frac{\left|-\frac{d^4}{4}-\cancel{\frac{d^4}{4}}+\cancel{\frac{d^4}{4}}\right|}{3\cdot\frac{d^4}{4}}=\frac{\cancel{\frac{d^4}{4}}}{3\cdot\cancel{\frac{d^4}{4}}}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \arccos\frac{1}{3}=\measuredangle(BCE,BCF)$$

Због симетрије правилног октаедра ће угао између свих могућих пљосни тог октаедра које имају заједничку ивицу бити $\arccos\frac{1}{3}$.

Криве другог реда

- Крива другог реда је скуп тачака (x,y) у равни Oxy такав да је $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, за неке $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, при чему је бар један од бројева a_{11}, a_{12}, a_{22} различит од нуле.
- Постоје три врсте недегенерисаних кривих другог реда и то су елипса (специјалан случај је круг), хипербола и парабола.

Елипса



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ су жиже, при чему је $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Ако тачка $T(x_T,y_T)$ припада елипси, једначина тангенте те елипсе у тачки T је $t: \frac{xx_T}{a^2}+\frac{yy_T}{b^2}=1$. Једначине директриса су $d_1: x=\frac{a^2}{c}$ и $d_2: x=-\frac{a^2}{c}$. Једначине оса су $\sigma_1: y=0$, $\sigma_2: x=0$. За сваку тачку елипсе важи да је збир растојања од ње до једне и друге жиже елипсе једнак дужини велике осе, тј. $TF_1+TF_2=2a$, за све тачке T са елипсе.

O - центар (то је центар симетрије)

F_1, F_2 - жиже (фокуси) $\quad d_1, d_2$ - директрисе

a - велика полуоса $\quad b$ - мала полуоса $\quad a>b$

Елипса има две осе симетрије (једна садржи велику, а друга малу полуосу)

$c^2=a^2-b^2$

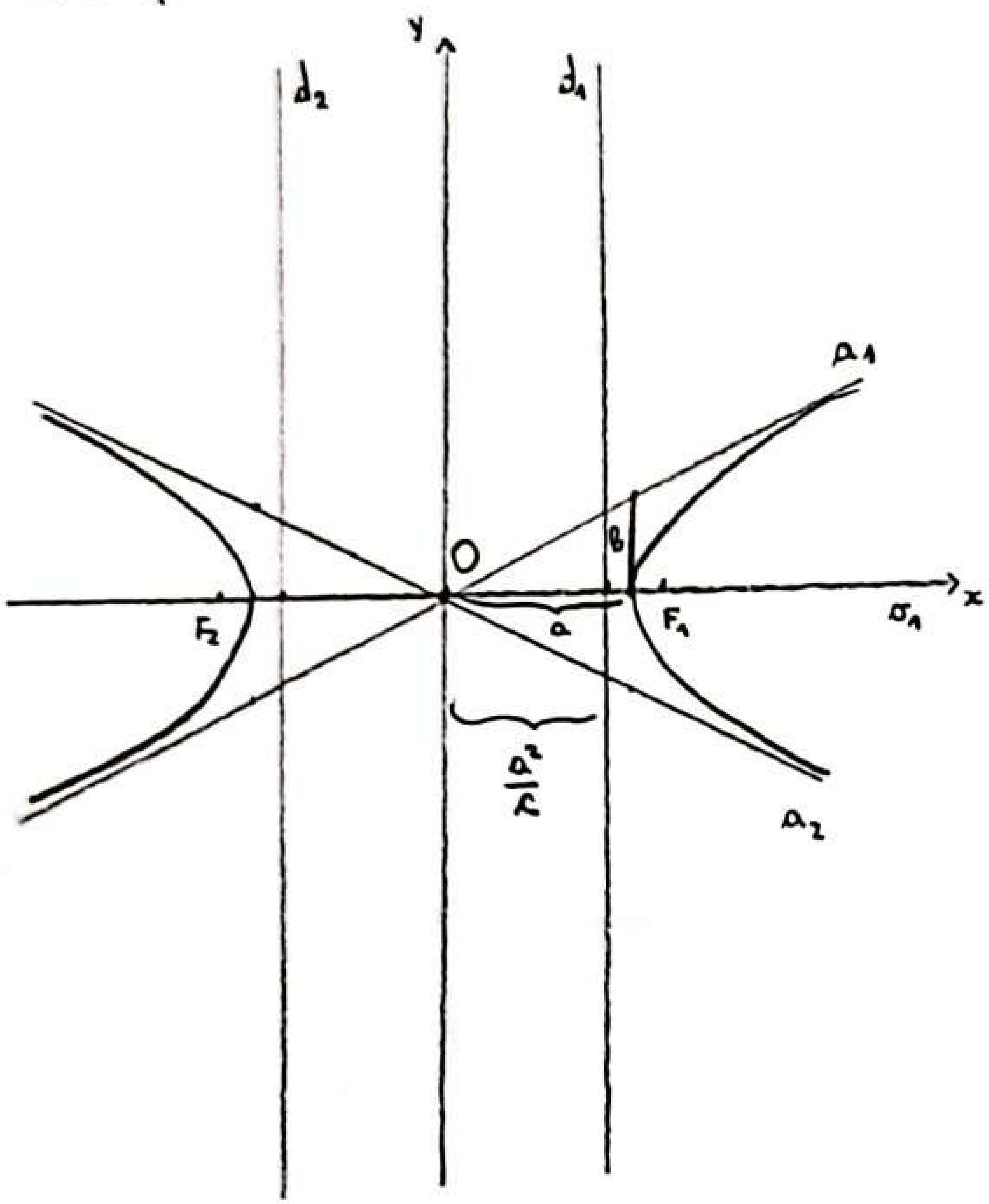
$e=\frac{c}{a}$ ексцентрицитет (важи $0<e<1$)

O је средиште F_1F_2 и важи $OF_1=OF_2=c$

$d(O,d_1)=d(O,d_2)=\frac{a^2}{c}$

F_1, F_2 припадају оси која садржи велику полуосу елипсе, а d_1, d_2 су нормалне на њој

Хипербола



O - центар (то је центар симетрије)

F_1, F_2 - жиже (фокуси) $\quad d_1, d_2$ - директрисе

a - растојање од центра до темена

b - висина од темена до правих a_1, a_2

$c^2 = a^2 + b^2$

$e = \frac{c}{a}$ ексцентрицитет ($e > 1$)

Хипербола има две осе симетрије (једна садржи темена хиперболе, а друга је нормална на њој у центру хиперболе)

O је средиште F_1F_2

$OF_1 = OF_2 = c$, $d(O, d_1) = d(O, d_2) = \frac{a^2}{c}$

F_1, F_2 припадају оси која садржи темена, а d_1, d_2 су нормалне на њој

a_1, a_2 су асимптоте (косе)

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме хипербола има једначину $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ су жиже, при чему је $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Ако тачка $T(x_T, y_T)$ припада хиперболи, једначина тангенте хиперболе у тачки T је $t: \frac{xx_T}{a^2} - \frac{yy_T}{b^2} = 1$.

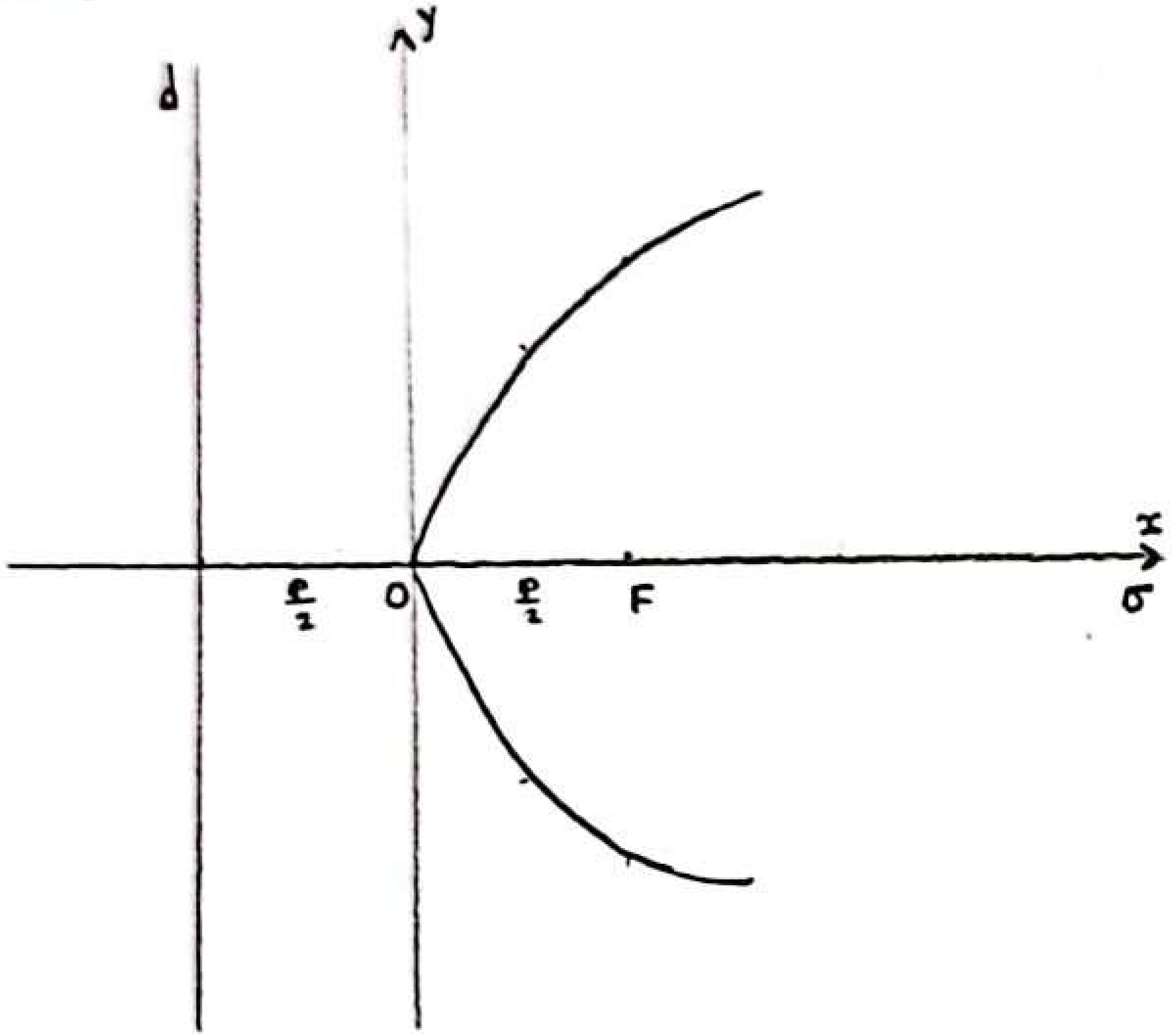
Једначине директриса су: $d_1: x = \frac{a^2}{c}$, $d_2: x = -\frac{a^2}{c}$.

Једначине оса су: $\sigma_1: y = 0$, $\sigma_2: x = 0$.

Једначине асимптота су: $a_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $a_2: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, тј. $a_1: y = \frac{b}{a}x$, $a_2: y = -\frac{b}{a}x$.

За сваку тачку хиперболе важи да је разлика растојања од ње до једне и друге жиже хиперболе једнака $2a$, тј. $|TF_1 - TF_2| = 2a$, за све тачке T са хиперболе.

Парабола



Нема центар.

F - жижа (фокус)

d - директриса

O - теме параболе

$d(O,F) = d(O,d) = \frac{p}{2}$

$e = 1$

Парабола има једну осу симетрије која садржи теме и жижу, а директриса је нормална на оси.

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме парабола има једначину $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Тада је $O(0,0)$ теме, $F(\frac{p}{2},0)$ је жижа, $d: x = -\frac{p}{2}$ је једначина директрисе, $\sigma: y = 0$ је једначина осе.

Ако је $T(x_T, y_T)$ тачка са параболе, онда је једначина тангенте на параболу у тачки T дата са $t: yy_T = p(x + x_T)$.

За сваку тачку параболе важи да је растојање од ње до жиже исто као растојање од ње до директрисе.

Теорема: За сваку тачку T са недегенерисане криве другог реда важи $\frac{d(T,F)}{d(T,d)} = e$ (за елипсу и хиперболу се F и d узимају са истим индексом).

5 Криве другог реда

(5.1.) а) Доказати да средишта тетива паралелних дијаметру p елипсе (хиперболе) припадају некој правој q која пролази кроз центар елипсе (хиперболе).

Решење: Дијаметар елипсе, односно хиперболе, јесте њена тетива (дуж чији су крајеви тачке са елипсе, односно хиперболе) која садржи њен центар.

Постоји Декартов правоугли координатни систем такав да је једначина дате криве $\frac{x^2}{a^2}+\beta\frac{y^2}{b^2}=1$, где је $\beta=1$ ако је посматрана крива елипса, односно $\beta=-1$ ако је посматрана крива хипербола.

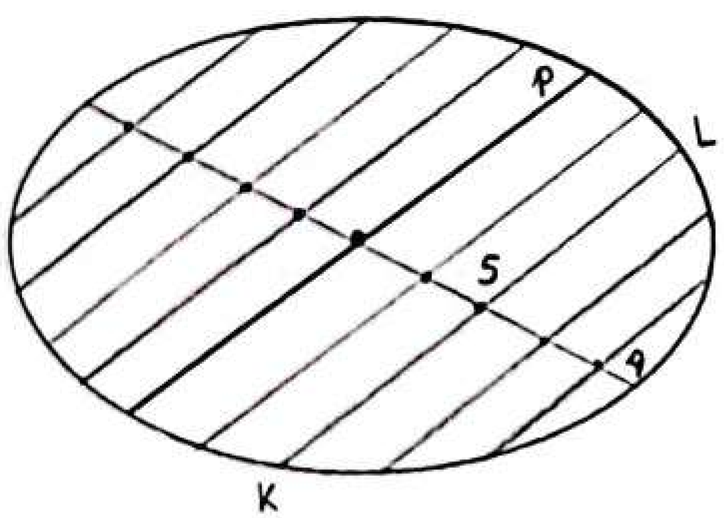
Тада је $O(0,0)$ центар криве, а једначина праве на којој је посматрани дијаметар p је $p: \frac{x-0}{u}=\frac{y-0}{v}$, где је $(u,v)\neq(0,0)$ ненула вектор који представља вектор правца праве p.

Нека је KL произвољна тетива посматране криве, при чему су $K(x_K,y_K)$ и $L(x_L,y_L)$ координате тачака K и L.

$\Rightarrow \frac{x_K^2}{a^2}+\beta\frac{y_K^2}{b^2}=1$ * , $\frac{x_L^2}{a^2}+\beta\frac{y_L^2}{b^2}=1$ јер тачке K и L припадају посматраној криви.

Да би KL била тетива паралелна дијаметру p, мора бити $l: \frac{x-x_K}{u}=\frac{y-y_K}{v}$ једначина праве којој припада та тетива.

$L\in KL \Rightarrow (\exists\lambda\in\mathbb{R})\ \frac{x_L-x_K}{u}=\frac{y_L-y_K}{v}=\lambda \Rightarrow x_L=u\lambda+x_K,\ y_L=v\lambda+y_K$ и ово заменимо у $\frac{x_L^2}{a^2}+\beta\frac{y_L^2}{b^2}=1$.



$$\frac{(u\lambda+x_K)^2}{a^2}+\beta\frac{(v\lambda+y_K)^2}{b^2}=1 \searrow *$$

$$\frac{u^2\lambda^2+2\lambda x_K u+x_K^2}{a^2}+\beta\cdot\frac{v^2\lambda^2+2\lambda y_K v+y_K^2}{b^2}=\frac{x_K^2}{a^2}+\beta\frac{y_K^2}{b^2}$$

$$\frac{u^2\lambda^2}{a^2}+\frac{2\lambda x_K u}{a^2}+\cancel{\frac{x_K^2}{a^2}}+\beta\frac{v^2\lambda^2}{b^2}+2\beta\lambda\frac{y_K v}{b^2}+\cancel{\beta\frac{y_K^2}{b^2}}=\cancel{\frac{x_K^2}{a^2}}+\cancel{\beta\frac{y_K^2}{b^2}}$$

$$\lambda\cdot\left(\frac{u^2\lambda}{a^2}+\frac{2x_K u}{a^2}+\beta\frac{v^2\lambda}{b^2}+2\beta\frac{y_K v}{b^2}\right)=0$$

$$\lambda\cdot\left(2\cdot\left(\frac{x_K u}{a^2}+\frac{\beta y_K v}{b^2}\right)+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)\right)=0$$

$\lambda=0$ или $2\cdot\left(\frac{x_K u}{a^2}+\frac{\beta y_K v}{b^2}\right)+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)=0$

↯ јер би за $\lambda=0$ $x_L=x_K$ и $y_L=y_K$ тј. $K=L$

мора бити $\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\neq0$ јер тражимо пресек праве l и посматране криве, а знамо да у пресеку постоје две различите тачке K и L

$$\lambda=-\frac{2\left(\frac{x_K u}{a^2}+\beta\frac{y_K v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$$

Средиште S дужи KL има координате $S\left(\frac{x_K+x_L}{2}, \frac{y_K+y_L}{2}\right)$.

$$\frac{x_K+x_L}{2} = \frac{x_K+x_K+\mu\lambda}{2} = \frac{2x_K+\mu\lambda}{2} = \frac{2x_K}{2}+\frac{\mu\lambda}{2} = x_K+\frac{\mu}{2}\cdot\left(-\frac{2\left(\frac{x_K\mu}{a^2}+\beta\frac{y_K\vartheta}{b^2}\right)}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}\right) = x_K - \frac{\frac{x_K\mu^2}{a^2}+\frac{y_K\mu\vartheta}{b^2}\beta}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}} = \frac{\cancel{\frac{x_K\mu^2}{a^2}}+\beta\frac{x_K\vartheta^2}{b^2}-\cancel{\frac{x_K\mu^2}{a^2}}-\frac{\beta y_K\mu\vartheta}{b^2}}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\beta\frac{\vartheta}{b^2}\cdot(x_K\vartheta-y_K\mu)}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}$$

$$\frac{y_K+y_L}{2} = \frac{y_K+y_K+\vartheta\lambda}{2} = \frac{2y_K+\vartheta\lambda}{2} = \frac{2y_K}{2}+\frac{\vartheta\lambda}{2} = y_K+\frac{\vartheta}{2}\cdot\left(-\frac{2\left(\frac{x_K\mu}{a^2}+\beta\frac{y_K\vartheta}{b^2}\right)}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}\right) = y_K - \frac{\frac{x_K\mu\vartheta}{a^2}+\frac{\beta y_K\vartheta^2}{b^2}}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}} = \frac{\frac{y_K\mu^2}{a^2}+\cancel{\beta\frac{y_K\vartheta^2}{b^2}}-\frac{x_K\mu\vartheta}{a^2}-\cancel{\frac{\beta y_K\vartheta^2}{b^2}}}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{\mu}{a^2}(x_K\vartheta-y_K\mu)}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}$$

. Означимо $x_S = \frac{x_K+x_L}{2}$ и $y_S = \frac{y_K+y_L}{2}$. Ако је $y_S = \frac{y_K+y_L}{2} \neq 0$, онда је

$$\frac{x_S}{y_S} = \frac{\frac{x_K+x_L}{2}}{\frac{y_K+y_L}{2}} = \frac{\frac{\beta\frac{\vartheta}{b^2}\cancel{(x_K\vartheta-y_K\mu)}}{\cancel{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}}{\frac{-\frac{\mu}{a^2}\cancel{(x_K\vartheta-y_K\mu)}}{\cancel{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}} = \frac{\beta\frac{\vartheta}{b^2}}{-\frac{\mu}{a^2}}$$

$\Rightarrow$ Таква средишта тетива паралелних дијаметру p посматране криве припадају правој $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$ и важи да та права садржи центар $(0,0)$ криве (јер је $\frac{0}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}} = \frac{0}{-\frac{\mu}{a^2}} = 0$).

Ако је $y_S = \frac{y_K+y_L}{2} = \frac{-\frac{\mu}{a^2}(x_K\vartheta-y_K\mu)}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}} = 0$, то значи да је $\mu=0$ или $x_K\vartheta-y_K\mu=0$. Ако је $\mu=0$, онда је $\vartheta\neq0$ јер је $(\mu,\vartheta)\neq(0,0)$ и права p на којој је дијаметар има једначину $\frac{x}{0}=\frac{y}{\vartheta}$ тј. $x=0$, а то је y оса. Тада за сваку тачку K добијамо да средиште S тетиве KL која је паралелна дијаметру p, односно y оси, због симетрије посматране криве, припада x оси тј. правој $y=0$. Овај резултат се уклапа у малопре добијени јер је $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$ за $\mu=0$ заправо $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}} = \frac{y}{0}$ тј. x оса. Ако је $x_K\vartheta-y_K\mu=0$, онда је и $x_S = \frac{x_K+x_L}{2} = \frac{\beta\frac{\vartheta}{b^2}(x_K\vartheta-y_K\mu)}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}} = 0$. То значи да смо тачку K одабрали тако да је средиште тетиве KL тачка $(0,0)$, а та тачка је и на дијаметру са којим је тетива KL паралелна, те је KL у овом случају посматрани дијаметар. Тачка $S(0,0)$ задовољава једначину $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$, те у сваком од могућих случајева средишта тетива паралелних посматраном дијаметру припадају правој $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$.

б) Доказати да су тангенте у крајевима дијаметра p паралелне правој q.

Решење: Нека је $A(x_A,y_A)$ једна од крајњих тачака дијаметра p.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_A,y_A)\in p:\ \frac{x}{\mu}=\frac{y}{\vartheta} \Rightarrow \frac{x_A}{\mu}=\frac{y_A}{\vartheta}=t \Rightarrow x_A=\mu t,\ y_A=\vartheta t \\ \frac{x_A^2}{a^2}+\beta\frac{y_A^2}{b^2}=1 \ {}^{*} \ \text{јер је тачка } A(x_A,y_A) \text{ на посматраној кривој} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\mu t)^2}{a^2}+\beta\frac{(\vartheta t)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\mu^2t^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2t^2}{b^2}=1$$

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}\right)t^2=1 \quad \Big/ : \frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}\neq 0$$

јер би у супротном било $0=1$ ↯

$$t^2=\frac{1}{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}$$

Мора бити $\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}>0$ да бисмо имали два реална решења за t јер дијаметар p сече посматрану криву у две тачке.

$$t=-\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}} \quad \text{или} \quad t=\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}$$

Једно од ових решења одговара тачки A, а друго тачки $B(x_B,y_B)$ која је друга крајња тачка дијаметра p.

Нека је, без умањења општости, $x_A=\mu\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}=\frac{\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}$ и $y_A=\vartheta\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}=\frac{\vartheta}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}$.

Тангента t_A у тачки A има једначину $t_A: \frac{xx_A}{a^2}+\beta\frac{yy_A}{b^2}=1.$ *

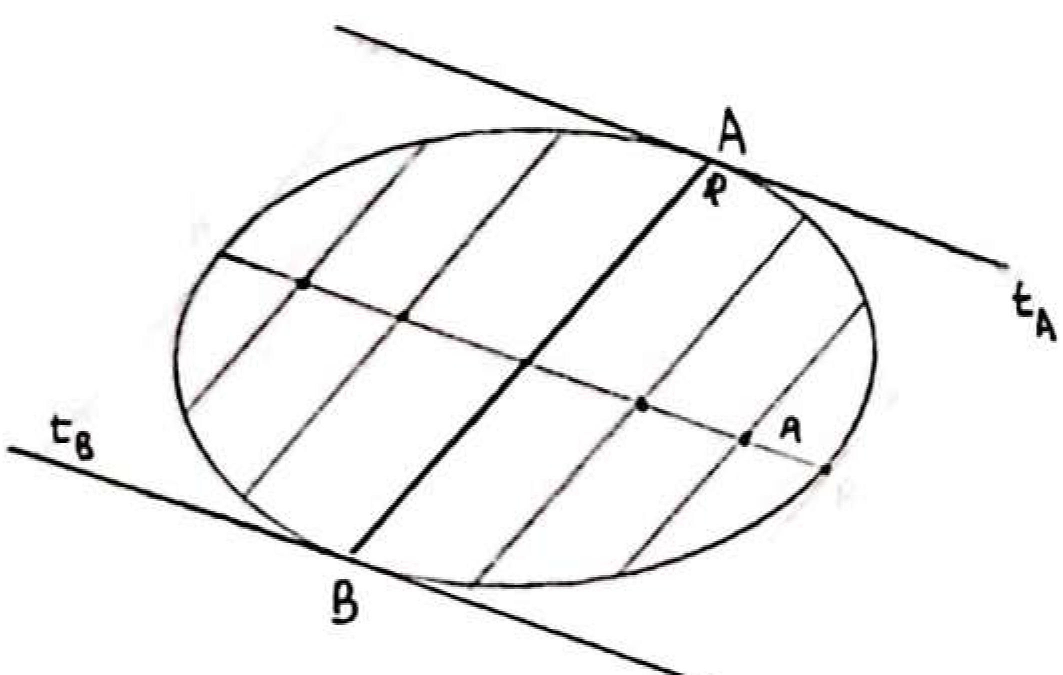
$$\frac{xx_A}{a^2}+\beta\frac{yy_A}{b^2}=\frac{x_A^2}{a^2}+\beta\frac{y_A^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_A}{a^2}-\frac{x_A^2}{a^2}=\beta\frac{y_A^2}{b^2}-\beta\frac{yy_A}{b^2}$$

$$\frac{x_A}{a^2}\cdot(x-x_A)=-\beta\frac{y_A}{b^2}(y-y_A)$$

$$\frac{x-x_A}{-\beta\frac{y_A}{b^2}}=\frac{y-y_A}{\frac{x_A}{a^2}}$$

ово јесте једначина праве јер $\left(-\beta\frac{y_A}{b^2},\frac{x_A}{a^2}\right)\neq(0,0)$ зато што ако би $-\beta\frac{y_A}{b^2}=0$ и $\frac{x_A}{a^2}=0$, онда би било $y_A=0$ и $x_A=0$, тј. $\frac{\vartheta}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}=0$ и $\frac{\mu}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}=0$, односно $\vartheta=0$ и $\mu=0$, а то није могуће јер за вектор правца (μ,ϑ) праве p на којој је дијаметар важи да је различит од $(0,0)$.



$$\frac{x-x_A}{-\frac{\beta}{b^2}\cdot\frac{\vartheta}{\cancel{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}}}=\frac{y-y_A}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\mu}{\cancel{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\beta\frac{\vartheta^2}{b^2}}}}}$$

$\Rightarrow t_A: \frac{x-x_A}{-\beta\frac{\vartheta}{b^2}}=\frac{y-y_A}{\frac{\mu}{a^2}} \Rightarrow$ Пошто права t_A има исти вектор правца као и права $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}}=\frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$, тј. $q: \frac{x}{-\beta\frac{\vartheta}{b^2}}=\frac{y}{\frac{\mu}{a^2}}$, то је $t_A \parallel q$.

$$x_B = u\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}\right) = \frac{-u}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}} \qquad y_B = v\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}\right) = \frac{-v}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$$

Тангента t_B у тачки B има једначину $t_B: \frac{xx_B}{a^2}+\beta\frac{yy_B}{b^2}=1$ → важи $\frac{x_B^2}{a^2}+\beta\frac{y_B^2}{b^2}=1$ јер тачка B припада посматраној кривој

$$\frac{xx_B}{a^2}+\beta\cdot\frac{yy_B}{b^2} = \frac{x_B^2}{a^2}+\beta\frac{y_B^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_B}{a^2}-\frac{x_B^2}{a^2} = \beta\frac{y_B^2}{b^2}-\beta\frac{yy_B}{b^2}$$

$$\frac{x_B}{a^2}\cdot(x-x_B) = -\frac{\beta y_B}{b^2}(y-y_B)$$

$$\frac{x-x_B}{-\frac{\beta y_B}{b^2}} = \frac{y-y_B}{\frac{x_B}{a^2}}$$

ово јесте једначина праве јер $\left(-\beta\frac{y_B}{b^2}, \frac{x_B}{a^2}\right)\neq(0,0)$ зато што ако би $-\beta\frac{y_B}{b^2}=0$ и $\frac{x_B}{a^2}=0$, онда би било $y_B=0$ и $x_B=0$, тј. $\frac{-v}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}=0$ и $\frac{-u}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}=0$, односно $v=0$ и $u=0$, а то није могуће јер за вектор правца (u,v) праве p на којој је дијаметар важи да је различит од $(0,0)$.

$$\frac{x-x_B}{-\frac{\beta}{b^2}\cdot\frac{-v}{\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}}} = \frac{y-y_B}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{-u}{\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}}}$$

$\Rightarrow t_B: \frac{x-x_B}{\frac{\beta v}{b^2}} = \frac{y-y_B}{-\frac{u}{a^2}}$ $\Rightarrow$ Пошто права t_B има исти вектор правца као и права $q: \frac{x}{\beta\frac{v}{b^2}} = \frac{y}{-\frac{u}{a^2}}$, то је $t_B \parallel q$.

$\Rightarrow$ Тангенте у крајевима дијаметра p паралелне су правој q.

в) Доказати да су (у случају елипсе) тангенте у крајевима дијаметра q паралелне дијаметру p.

<u>Решење:</u> Како је сада посматрана крива елипса, то је $\beta=1$, односно једначина те криве је $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Како је $\beta=1$, то права $q: \frac{x}{\beta\frac{\vartheta}{b^2}}=\frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$ постаје $q: \frac{x}{\frac{\vartheta}{b^2}}=\frac{y}{-\frac{\mu}{a^2}}$. Означимо са $C(x_c,y_c)$ и $D(x_d,y_d)$ тачке пресека праве q и елипсе $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$C\in q \Rightarrow \frac{x_c}{\frac{\vartheta}{b^2}}=\frac{y_c}{-\frac{\mu}{a^2}}=t \Rightarrow x_c=\frac{\vartheta}{b^2}t,\ y_c=-\frac{\mu}{a^2}t$$

$$C\in\mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_c^2}{a^2}+\frac{y_c^2}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{\vartheta}{b^2}t\right)^2+\frac{1}{b^2}\cdot\left(-\frac{\mu}{a^2}t\right)^2=1$$

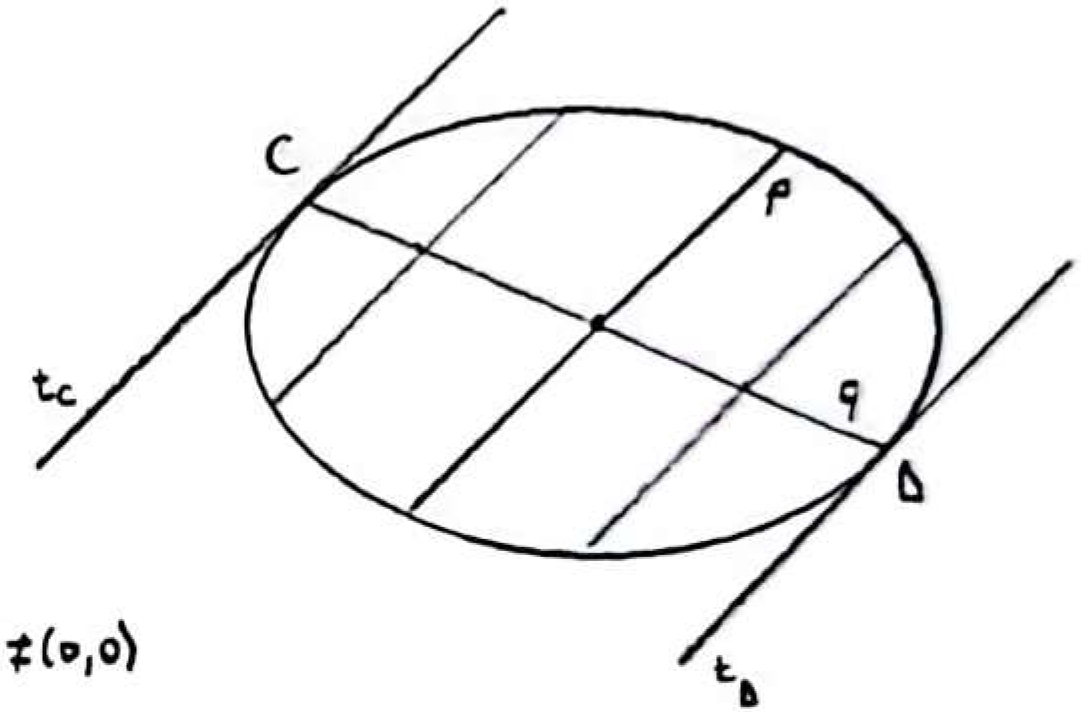
$$\frac{\vartheta^2}{a^2b^4}t^2+\frac{\mu^2}{b^2a^4}t^2=1 \quad /\cdot a^2b^2\neq 0$$

$$\frac{\vartheta^2}{b^2}t^2+\frac{\mu^2}{a^2}t^2=a^2b^2$$

$$\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}\right)t^2=a^2b^2 \quad /:\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}\right)\neq 0 \text{ јер је } (\mu,\vartheta)\neq(0,0)$$

$$t^2=\frac{a^2b^2}{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}>0$$

$$t_1=-\frac{ab}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}} \qquad t_2=\frac{ab}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}$$ ← једно од ових t-ова одговара тачки C, а друго тачки D



Нека, без умањења општости $t=-\frac{ab}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}$ одговара тачки C, тј. $x_c=\frac{\vartheta}{b^2}\cdot\left(-\frac{ab}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}\right)=\frac{\vartheta}{b}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}\right)$ и

$y_c=\frac{-\mu}{a^2}\cdot\left(-\frac{ab}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}\right)=\frac{\mu b}{a\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}$. Тангента на елипсу у тачки C има једначину $t_c: \frac{xx_c}{a^2}+\frac{yy_c}{b^2}=1$ јер $C\in\mathcal{E}$

$$\frac{xx_c}{a^2}+\frac{yy_c}{b^2}=\frac{x_c^2}{a^2}+\frac{y_c^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_c}{a^2}-\frac{x_c^2}{a^2}=-\frac{yy_c}{b^2}+\frac{y_c^2}{b^2}$$

$$\frac{x_c}{a^2}(x-x_c)=-\frac{y_c}{b^2}(y-y_c)$$

$$\frac{x-x_c}{-\frac{y_c}{b^2}}=\frac{y-y_c}{\frac{x_c}{a^2}}$$

ово јесте једначина праве јер не може бити $\left(-\frac{y_c}{b^2},\frac{x_c}{a^2}\right)=(0,0)$ јер би тада било $y_c=0$ и $x_c=0$, тј. $\frac{\mu b}{a\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}=0$ и $\frac{-\vartheta a}{b\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\vartheta^2}{b^2}}}=0$ тј. $\mu=0$ и $\vartheta=0$

али $(\mu,\vartheta)\neq(0,0)$

$$\frac{x-x_c}{-\frac{y_c}{b^2}} = \frac{y-y_c}{\frac{x_c}{a^2}} \Rightarrow \frac{x-x_c}{-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{ub}{a\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}}} = \frac{y-y_c}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{v}{b}\cdot\left(-\frac{a}{\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}}\right)} \Rightarrow \frac{x-x_c}{-\frac{u}{ab}} = \frac{y-y_c}{-\frac{v}{ab}} \Rightarrow \frac{x-x_c}{u} = \frac{y-y_c}{v}$$

Дакле, тангента $t_c: \frac{x-x_c}{u} = \frac{y-y_c}{v}$ има исти вектор правца као права $p: \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$ на којој је дијаметар p, те је $t_c \parallel p$.

За $t = \frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$ добијамо $x_D = \frac{v}{b^2}t = \frac{v}{b^2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}} = \frac{va}{b\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$ и $y_D = -\frac{u}{a^2}t = -\frac{u}{a^2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}} = -\frac{ub}{a\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$, те је

тангента на елипсу у тачки D, тј. $t_D: \frac{xx_D}{a^2} + \frac{yy_D}{b^2} = 1$

$\downarrow$ јер $D \in \mathcal{E}$

$$\frac{xx_D}{a^2} + \frac{yy_D}{b^2} = \frac{x_D^2}{a^2} + \frac{y_D^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_D}{a^2} - \frac{x_D^2}{a^2} = \frac{y_D^2}{b^2} - \frac{yy_D}{b^2}$$

$$\frac{x_D}{a^2}(x-x_D) = -\frac{y_D}{b^2}(y-y_D)$$

$$\frac{x-x_D}{-\frac{y_D}{b^2}} = \frac{y-y_D}{\frac{x_D}{a^2}}$$

ово јесте једначина праве јер не може бити $\left(-\frac{y_D}{b^2}, \frac{x_D}{a^2}\right) = (0,0)$ јер би тада $y_D = 0$ и $x_D = 0$, тј. $-\frac{ub}{a\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}} = 0$ и $\frac{va}{b\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}} = 0$, те би $u=0$ и $v=0$, али $(u,v) \neq (0,0)$

$$\frac{x-x_D}{-\frac{1}{b^2}\cdot\left(-\frac{ub}{a\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}}\right)} = \frac{y-y_D}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{va}{b\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}}}$$

$$\frac{x-x_D}{\frac{u}{\cancel{ab}}} = \frac{y-y_D}{\frac{v}{\cancel{ab}}}$$

$$\frac{x-x_D}{u} = \frac{y-y_D}{v}$$

Дакле, тангента $t_D: \frac{x-x_D}{u} = \frac{y-y_D}{v}$ има исти вектор правца као права $p: \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$ на којој је дијаметар p, те је $t_D \parallel p$.

<u>Дефиниција</u>: За правце одређене дијаметром p и правом q кажемо да су међусобно конјуговани.

Дакле, правци (u,v) и $\left(\beta\frac{v}{b^2}, -\frac{u}{a^2}\right)$ су међусобно конјуговани правци.

(5.2.) Доказати да средишта паралелних тетива параболе припадају правој која је паралелна оси параболе.

<u>Решење:</u> Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме посматрана парабола има једначину $y^2=2px$, $p>0$.
Нека је (u,v) произвољан ненула вектор такав да посматране паралелне тетиве леже на правама које имају вектор правца $(u,v)\neq(0,0)$.

Ако би $v=0$, онда би једначина праве која садржи произвољну тачку $T(x_T,y_T)$ параболе и има вектор правца $(u,v)=(u,0)$ била $\frac{x-x_T}{u}=\frac{y-y_T}{0}=t$, тј. $x=ut+x_T$, $y=y_T$. Нађимо пресечне тачке те праве и параболе $y^2=2px$. Заменом $x=ut+x_T$ и $y=y_T$ у $y^2=2px$ добијамо $y_T^2=2p(ut+x_T)$, тј. $y_T^2=2put+2px_T$, тј. $2put=y_T^2-2px_T$, а како је $p>0$ и $u\neq 0$ (јер је $v=0$ и $(u,v)\neq(0,0)$), то је $t=\frac{y_T^2-2px_T}{2pu}$, односно постоји јединствена тачка у пресеку те праве и параболе (то је баш тачка T јер је $x=ut+x_T=u\cdot\frac{y_T^2-2px_T}{2pu}+x_T=$
$=\frac{y_T^2-2px_T}{2p}+\frac{2px_T}{2p}=\frac{y_T^2-\cancel{2px_T}+\cancel{2px_T}}{2p}\underset{\uparrow}{=}\frac{2px_T}{2p}=x_T$ и $y=y_T$), те не бисмо имали тетиве.

$y_T^2=2px_T$ јер је T на параболи

У наставку сматрамо да је $v\neq 0$. Једначина праве која садржи произвољну тачку $T(x_T,y_T)$ параболе и има вектор правца $(u,v)\neq(0,0)$ и $v\neq 0$ је $\frac{x-x_T}{u}=\frac{y-y_T}{v}$. Постоји $\lambda\in\mathbb{R}$ такво да за другу пресечну тачку $P(x_P,y_P)$ те праве и параболе важи $\frac{x_P-x_T}{u}=\frac{y_P-y_T}{v}=\lambda$, одакле је $x_P=u\lambda+x_T$, $y_P=v\lambda+y_T$, а када то убацимо у једначину параболе $y^2=2px$, добијамо $(v\lambda+y_T)^2=2p(u\lambda+x_T)$

$$v^2\lambda^2+2vy_T\lambda+y_T^2=2pu\lambda+2px_T$$

$y_T^2=2px_T$ јер $T(x_T,y_T)$ припада параболи $y^2=2px$

$$v^2\lambda^2+2vy_T\lambda-2pu\lambda=\cancel{2px_T-y_T^2}$$

$$\lambda(\lambda v^2+2vy_T-2pu)=0$$

$\lambda=0$

$x_P=u\cdot 0+x_T=x_T$

$y_P=v\cdot 0+y_T=y_T$

↯ јер $P\neq T$

$\lambda v^2+2vy_T-2pu=0$

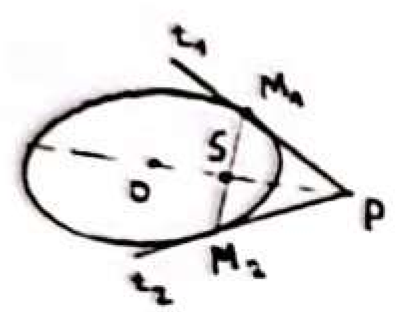
$\lambda v^2=2pu-2vy_T \quad /:v^2\neq 0$

$\lambda=\frac{2(pu-vy_T)}{v^2}$

Средиште S тетиве TP има координате $x_S=\frac{x_T+x_P}{2}=\frac{x_T+u\lambda+x_T}{2}=\frac{2x_T+u\lambda}{2}=x_T+\frac{u}{2}\cdot\frac{2(pu-vy_T)}{v^2}=x_T+\frac{u(pu-vy_T)}{v^2}$ и
$y_S=\frac{y_T+y_P}{2}=\frac{y_T+v\lambda+y_T}{2}=\frac{2y_T+v\lambda}{2}=y_T+\frac{v}{2}\cdot\frac{2(pu-vy_T)}{v^2}=y_T+\frac{pu-vy_T}{v}=\frac{vy_T+pu-vy_T}{v}=\frac{pu}{v}=\text{const}$, те сва средишта посматраних паралелних тетива леже на правој $y=\frac{pu}{v}=\text{const}$ која је паралелна оси $y=0$ параболе $y^2=2px$.

5.3. Тангенте у тачкама M_1 и M_2 елипсе секу се у тачки P. Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2.

Решење:



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме дата елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Нека су $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ координате тачака M_1 и M_2. Како тачке M_1 и M_2 припадају елипси, то су једначине тангенти t_1 и t_2 у тачкама M_1 и M_2, редом:

$$t_1: \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad t_2: \frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$$

$\{P\}=t_1\cap t_2$. Нека је $P(x_P,y_P)$.

$$P\in t_1 \Rightarrow \frac{x_Px_1}{a^2}+\frac{y_Py_1}{b^2}=1 \qquad P\in t_2 \Rightarrow \frac{x_Px_2}{a^2}+\frac{y_Py_2}{b^2}=1$$

$\ominus$

$$\frac{x_P}{a^2}\cdot(x_1-x_2)+\frac{y_P}{b^2}(y_1-y_2)=\underbrace{1-1}_{0} \Rightarrow \frac{x_P}{a^2}(x_1-x_2)=-\frac{y_P}{b^2}(y_1-y_2)$$

Како $\frac{0\cdot x_1}{a^2}+\frac{0\cdot y_1}{b^2}=0+0=0\neq 1$, то тачка $O(0,0)\notin t_1$, а како $P\in t_1$, то је $P\neq O$, те је $(x_P,y_P)\neq(0,0)$.

Разликујемо три случаја:

1° $x_1-x_2\neq 0$ и $y_1-y_2\neq 0$

$$\frac{x_P}{a^2}(x_1-x_2)=-\frac{y_P}{b^2}(y_1-y_2)=t\neq 0 \Rightarrow x_P=\frac{a^2t}{x_1-x_2}, \quad y_P=\frac{-b^2t}{y_1-y_2}$$

Посматрајмо једначину праве p која садржи тачке $O(0,0)$ (центар елипсе) и $P(x_P,y_P)$.

$$p: \frac{x-0}{x_P-0}=\frac{y-0}{y_P-0} \text{ тј. } p: \frac{x}{x_P}=\frac{y}{y_P} \text{ тј. } p: \frac{x}{\frac{a^2\cancel{t}}{x_1-x_2}}=\frac{y}{\frac{-b^2\cancel{t}}{y_1-y_2}} \text{ тј. } p: \frac{x}{\frac{a^2}{x_1-x_2}}=\frac{y}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}}.$$

Проверимо да ли средиште S тетиве M_1M_2 припада правој p. Координате средишта S су $x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$ и $y_S=\frac{y_1+y_2}{2}$.

$$\frac{x_S}{\frac{a^2}{x_1-x_2}}=\frac{y_S}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{x_1+x_2}{\cancel{2}}}{\frac{a^2}{x_1-x_2}}=\frac{\frac{y_1+y_2}{\cancel{2}}}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}} \Leftrightarrow \frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{-b^2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{a^2}=-\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{y_2^2}{b^2} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}_{1}=\underbrace{\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}}_{1} \Leftrightarrow T$$

јер тачке M_1 и M_2 припадају елипси

Како права p садржи центар елипсе, средиште S тетиве M_1M_2 и тачку P, то тачка P припада правој OS тј. правој која садржи дијаметар елипсе који полови тетиву M_1M_2.

2° $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$

$$\frac{x_p}{a^2}(x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2}\cdot(y_1 - y_2)$$

$$\frac{x_p}{a^2}(x_1 - x_1) = -\frac{y_p}{b^2}(y_1 - y_2)$$

$$\frac{x_p}{a^2}\cdot 0 = -\frac{y_p}{b^2}(y_1 - y_2)$$

$$0 = -\frac{y_p}{b^2}\underbrace{(y_1 - y_2)}_{\neq 0} \Rightarrow y_p = 0 \Rightarrow P \text{ припада } x\text{-оси}$$

Како је $y_p = 0$ и $P = (x_p, y_p) \neq (0,0) = O$, то мора бити $x_p \neq 0$. Једначина праве p која садржи центар елипсе O и тачку P је $\frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-0}{y_p-0}$ тј. $\frac{x}{x_p} = \frac{y}{0-0}$ тј. $\frac{x}{x_p} = \frac{y}{0}$ што је једначина x осе тј. $y=0$. Довољно је још доказати да средиште $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ припада тој правој $y=0$, тј. да је $\frac{y_1+y_2}{2} = 0$.

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad M_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ $\quad M_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \underset{x_1 = x_2}{\Longrightarrow} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$

$$\ominus$$

$$\frac{y_1^2}{b^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = \underbrace{1-1}_{0} \Rightarrow \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{y_2^2}{b^2} \Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \underset{y_1 \neq y_2}{\Longrightarrow} y_1 = -y_2 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow \frac{y_1+y_2}{2} = 0$$

Како S припада правој OP, то тачка P припада правој која садржи дијаметар елипсе и полови тетиву M_1M_2.

3° $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$

$$\frac{x_p}{a^2}(x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2}(y_1 - y_2) \Rightarrow \frac{x_p}{a^2}(x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2}(y_1 - y_1) \Rightarrow \frac{x_p}{a^2}(x_1 - x_2) = -\frac{y_p}{b^2}\cdot 0 \Rightarrow \frac{x_p}{a^2}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x_p = 0 \Rightarrow P \text{ припада } y\text{-оси}$$

Како је $x_p = 0$ и $P(x_p, y_p) \neq O(0,0)$, то мора бити $y_p \neq 0$. Једначина праве p која садржи центар елипсе O и тачку P је $\frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-0}{y_p-0}$ тј. $\frac{x}{0-0} = \frac{y}{y_p}$ тј. $\frac{x}{0} = \frac{y}{y_p}$ што је једначина y осе тј. $x=0$. Довољно је још доказати да средиште $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ припада тој правој $x=0$, тј. да је $\frac{x_1+x_2}{2} = 0$.

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad M_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ $\quad M_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \underset{y_1 = y_2}{\Longrightarrow} \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

$$\ominus$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2} = \underbrace{1-1}_{0} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{x_2^2}{a^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \underset{x_1 \neq x_2}{\Longrightarrow} x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 0$$

Како S припада правој OP, то тачка P припада правој која садржи дијаметар елипсе и полови тетиву M_1M_2.

5.4. Доказати да је геометријско место тачака из којих се елипса види под правим углом круг (еквивалентно: кад елипса клизи додирујући координатне осе њен центар се креће по кругу).

Решење: Тачка $T(x_T, y_T)$ задовољава својство да се елипса из ње види под правим углом ако две тангенте из тачке T на датој елипси граде прав угао. Постоји Декартов правоугли координатни систем такав да у њему посматрана елипса има једначину $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Доказујемо да је скуп свих тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом један круг, тј. да су то једнаки скупови.

$\boxed{\subseteq}$ Нека је $T(x_T, y_T)$ тачка из које се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом. Нека је $t_1: \frac{x-x_T}{u}=\frac{y-y_T}{v}$ права која садржи тачку $T(x_T, y_T)$. Права t_1 је тангента елипсе $\mathcal{E}$ ако и само ако има само једну заједничку тачку са елипсом $\mathcal{E}$.

$t_1: \frac{x-x_T}{u}=\frac{y-y_T}{v}=t \Rightarrow x=ut+x_T,\ y=vt+y_T$ и то заменимо у $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{(ut+x_T)^2}{a^2}+\frac{(vt+y_T)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{u^2t^2+2x_Tut+x_T^2}{a^2}+\frac{v^2t^2+2y_Tvt+y_T^2}{b^2}=1$$

$$\frac{u^2t^2}{a^2}+\frac{2x_Tu}{a^2}t+\frac{x_T^2}{a^2}+\frac{v^2t^2}{b^2}+\frac{2y_Tv}{b^2}t+\frac{y_T^2}{b^2}=1$$

$$\underbrace{\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)}_{\neq 0}t^2+2\left(\frac{x_Tu}{a^2}+\frac{y_Tv}{b^2}\right)t+\frac{x_T^2}{a^2}+\frac{y_T^2}{b^2}-1=0$$

$\neq 0$ јер $(u,v)\neq(0,0)$ као вектор правца праве t_1

Да би права t_1 била тангента, ова квадратна једначина по t мора имати дискриминанту једнаку 0.

$$\Rightarrow 0=D=\left(2\left(\frac{x_Tu}{a^2}+\frac{y_Tv}{b^2}\right)\right)^2-4\cdot\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{x_T^2}{a^2}+\frac{y_T^2}{b^2}-1\right)=4\cdot\left(\left(\frac{x_Tu}{a^2}+\frac{y_Tv}{b^2}\right)^2-\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{x_T^2}{a^2}+\frac{y_T^2}{b^2}-1\right)\right) \quad / :4\neq 0$$

$$\Rightarrow 0=\cancel{\frac{x_T^2u^2}{a^4}}+2\frac{x_Ty_Tuv}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_T^2v^2}{b^4}}-\left(\cancel{\frac{x_T^2u^2}{a^4}}+\frac{y_T^2u^2}{a^2b^2}-\frac{u^2}{a^2}+\frac{x_T^2v^2}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_T^2v^2}{b^4}}-\frac{v^2}{b^2}\right)$$

$$\Rightarrow 0=2\frac{x_Ty_Tuv}{a^2b^2}-\frac{x_T^2v^2}{a^2b^2}-\frac{y_T^2u^2}{a^2b^2}+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=0 \quad (*)$$

Нека је $t_2: \frac{x-x_T}{-v}=\frac{y-y_T}{u}$ права која садржи тачку $T(x_T, y_T)$ и нормална је на праву t_1 (вектор правца $(-v,u)$ праве t_2 нормалан је на вектору правца (u,v) праве t_1 јер је $(-v,u)\circ(u,v)=-vu+uv=0$).

Како се елипса $\mathcal{E}$ из тачке T види под правим углом и t_1 је тангента на $\mathcal{E}$, то и права t_2 мора бити тангента на $\mathcal{E}$.

$t_2: \frac{x-x_T}{-v} = \frac{y-y_T}{u} = \lambda \Rightarrow x = -\lambda v + x_T,\ y = \lambda u + y_T$ и то заменимо у једначину елипсе $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{(-\lambda v + x_T)^2}{a^2} + \frac{(\lambda u + y_T)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\lambda^2 v^2 - 2x_T v\lambda + x_T^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 u^2 + 2y_T u\lambda + y_T^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\lambda^2 v^2}{a^2} - 2\frac{x_T v}{a^2}\lambda + \frac{x_T^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 u^2}{b^2} + 2\frac{y_T u}{b^2}\lambda + \frac{y_T^2}{b^2} = 1$$

$$\underbrace{\left(\frac{v^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}\right)}_{\neq 0 \text{ јер је } (u,v)\neq(0,0)}\lambda^2 + 2\left(\frac{-x_T v}{a^2}+\frac{y_T u}{b^2}\right)\lambda + \frac{x_T^2}{a^2}+\frac{y_T^2}{b^2}-1=0$$

Да би права t_2 била тангента на $\mathcal{E}$, ова квадратна једначина по t мора имати дискриминанту једнаку 0.

$$\Rightarrow\ 0 = \Delta = \left(2\left(\frac{-x_T v}{a^2}+\frac{y_T u}{b^2}\right)\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{v^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{x_T^2}{a^2}+\frac{y_T^2}{b^2}-1\right) = 4\cdot\left(\cancel{\frac{x_T^2 v^2}{a^4}} - 2\frac{x_T y_T u v}{a^2 b^2} + \cancel{\frac{y_T^2 u^2}{b^4}} - \left(\cancel{\frac{x_T^2 v^2}{a^4}} + \frac{y_T^2 v^2}{a^2 b^2} - \frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2 x_T^2}{a^2 b^2} + \cancel{\frac{y_T^2 u^2}{b^4}} - \frac{u^2}{b^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ 0 = -2\frac{x_T y_T u v}{a^2 b^2} - \frac{x_T^2 u^2}{a^2 b^2} - \frac{y_T^2 v^2}{a^2 b^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \qquad (**)$$

Сабирањем једнакости $(*)$ и $(**)$ добијамо $0 = -\frac{x_T^2}{a^2 b^2}\cdot(v^2+u^2) - \frac{y_T^2}{a^2 b^2}(v^2+u^2) + \frac{u^2+v^2}{a^2} + \frac{u^2+v^2}{b^2}$ $\quad / : \frac{u^2+v^2}{a^2 b^2} \neq 0$ јер је $(u,v)\neq(0,0)$

$$0 = -x_T^2 - y_T^2 + b^2 + a^2$$

$$x_T^2 + y_T^2 = a^2 + b^2$$

$\Rightarrow$ Тачка $T(x_T, y_T)$ припада кругу са центром $(0,0)$ (што је и центар елипсе) и полупречником $\sqrt{a^2+b^2}$.

$\boxed{2}$ Нека је $K(x_к, y_к)$ произвољна тачка круга $k: x^2+y^2=a^2+b^2$ и нека је $\frac{x-x_к}{A}=\frac{y-y_к}{B}$, $(A,B)\neq(0,0)$ тангента елипсе $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\frac{x-x_к}{A}=\frac{y-y_к}{B}=\lambda \Rightarrow x=A\lambda+x_к,\ y=B\lambda+y_к$ и заменимо ово у $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{(A\lambda+x_к)^2}{a^2}+\frac{(B\lambda+y_к)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{A^2\lambda^2+2Ax_к\lambda+x_к^2}{a^2}+\frac{B^2\lambda^2+2By_к\lambda+y_к^2}{b^2}=1$$

$$\frac{A^2\lambda^2}{a^2}+\frac{2Ax_к}{a^2}\lambda+\frac{x_к^2}{a^2}+\frac{B^2\lambda^2}{b^2}+\frac{2By_к}{b^2}\lambda+\frac{y_к^2}{b^2}=1$$

$$\underbrace{\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)}_{\neq 0 \text{ јер је } (A,B)\neq(0,0)}\lambda^2+\left(\frac{2Ax_к}{a^2}+\frac{2By_к}{b^2}\right)\lambda+\frac{x_к^2}{a^2}+\frac{y_к^2}{b^2}-1=0$$

Да би права $\frac{x-x_к}{A}=\frac{y-y_к}{B}$ била тангента елипсе $\mathcal{E}$, добијена квадратна једначина мора имати дискриминанту једнаку 0.

$$\Rightarrow\ 0=D=\left(\frac{2Ax_к}{a^2}+\frac{2By_к}{b^2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{x_к^2}{a^2}+\frac{y_к^2}{b^2}-1\right)=4\cdot\left(\left(\frac{Ax_к}{a^2}+\frac{By_к}{b^2}\right)^2-\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{x_к^2}{a^2}+\frac{y_к^2}{b^2}-1\right)\right)=$$

$$=4\cdot\left(\cancel{\frac{A^2x_к^2}{a^4}}+2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2}+\cancel{\frac{B^2y_к^2}{b^4}}-\left(\cancel{\frac{A^2x_к^2}{a^4}}+\frac{A^2y_к^2}{a^2b^2}-\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2x_к^2}{a^2b^2}+\cancel{\frac{B^2y_к^2}{b^4}}-\frac{B^2}{b^2}\right)\right)=$$

$$=4\cdot\left(2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2}-\frac{A^2y_к^2}{a^2b^2}+\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2x_к^2}{a^2b^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\qquad /:4\neq0$$

$\Rightarrow\ 0=2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2}-\frac{A^2y_к^2}{a^2b^2}+\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2x_к^2}{a^2b^2}+\frac{B^2}{b^2}$. Да бисмо могли ово поделити са A^2 размотримо прво када је $A=0$. То је за $(A,B)=(0,B)$ при чему $B\neq0$ јер је $(A,B)\neq(0,0)$.

Када заменимо $A=0$ у $0=2\frac{x_ky_kAB}{a^2b^2}-\frac{A^2y_к^2}{a^2b^2}+\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2x_к^2}{a^2b^2}+\frac{B^2}{b^2}$ добијамо $0=-\frac{B^2x_к^2}{a^2b^2}+\frac{B^2}{b^2}=\underbrace{\frac{B^2}{b^2}}_{\neq0 \text{ јер је } B\neq0}\left(1-\frac{x_к^2}{a^2}\right)\Leftrightarrow 0=1-\frac{x_к^2}{a^2}$
$\Leftrightarrow \frac{x_к^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x_к^2=a^2$.

Разликујемо два случаја:

1) случај $x_K^2=a^2$ и то заменимо у $x_K^2+y_K^2=a^2+b^2$

$$\cancel{a^2}+y_K^2=\cancel{a^2}+b^2$$

$$y_K^2=b^2$$

у $0=\frac{2ABx_Ky_K}{a^2b^2}-\frac{A^2y_K^2}{a^2b^2}+\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2x_K^2}{a^2b^2}+\frac{B^2}{b^2}$ убацимо $x_K^2=a^2$ и $y_K^2=b^2$ и добијамо:

$$0=\frac{2ABx_Ky_K}{a^2b^2}-\frac{A^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}b^2}+\frac{B^2}{b^2} \quad \text{тј.} \quad 0=\frac{2ABx_Ky_K}{a^2b^2}-\cancel{\frac{A^2}{a^2}}+\cancel{\frac{A^2}{a^2}}-\cancel{\frac{B^2}{b^2}}+\cancel{\frac{B^2}{b^2}}=\frac{2ABx_Ky_K}{a^2b^2}$$

Како је $x_K^2=a^2$, то $x_K\in\{-a,a\}$, а како је $y_K^2=b^2$, то $y_K\in\{-b,b\}$, те $x_Ky_K\in\{-ab,ab\}$, односно $x_Ky_K\neq 0$, те из $\frac{2ABx_Ky_K}{a^2b^2}=0$ следи $AB=0$, те је $A=0$ или $B=0$.

Следи да постоје два решења, тј. две тангенте и то су $\frac{x-x_K}{0}=\frac{y-y_K}{B_1}$ и $\frac{x-x_K}{A_2}=\frac{y-y_K}{0}$ за неке $B_1, A_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Оне су међусобно нормалне јер за њихове векторе правца важи $(0,B_1)\circ(A_2,0)=0\cdot A_2+B_1\cdot 0=0+0=0$. Дакле, тангенте елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ из тачке $K(x_K,y_K)$ за коју важи $x_K^2=a^2$ и $y_K^2=b^2$ су међусобно нормалне, односно елипса $\mathcal{E}$ се из те тачке K види под правим углом, те тачка $K(x_K,y_K)$ припада скупу свих тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом.

2) случај $x_K^2\neq a^2$ тј. $x_K\notin\{-a,a\}$. Тада не може бити $A=0$ (јер из $A=0$ следи $x_K^2=a^2$), те једначину

$0=\frac{2ABx_Ky_K}{a^2b^2}-\frac{A^2y_K^2}{a^2b^2}+\frac{A^2}{a^2}-\frac{B^2x_K^2}{a^2b^2}+\frac{B^2}{b^2}$ можемо поделити са $A^2\neq 0$.

$$0=\frac{2x_Ky_K}{a^2b^2}\cdot\frac{AB}{A^2}-\frac{y_K^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{x_K^2}{a^2b^2}\cdot\frac{B^2}{A^2}+\frac{1}{b^2}\frac{B^2}{A^2} \Rightarrow 0=\frac{2x_Ky_K}{a^2b^2}\cdot\frac{B}{A}-\frac{y_K^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{x_K^2}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{B}{A}\right)^2$$

Обележимо $\frac{B}{A}$ са s.

$$0=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{x_K^2}{a^2b^2}\right)s^2+\frac{2x_Ky_K}{a^2b^2}\cdot s+\frac{1}{a^2}-\frac{y_K^2}{a^2b^2}$$

$$0=\frac{a^2-x_K^2}{a^2b^2}s^2+\frac{2x_Ky_K}{a^2b^2}s+\frac{b^2-y_K^2}{a^2b^2} \quad /\cdot a^2b^2\neq 0$$

$$0=(a^2-x_K^2)s^2+2x_Ky_Ks+b^2-y_K^2$$

$$(a^2-x_K^2)s^2+2x_Ky_Ks+b^2-y_K^2=0$$

$\underbrace{(a^2-x_K^2)}_{\neq 0}$ јер $x_K^2\neq a^2$ $\qquad \underbrace{b^2-y_K^2}_{x_K^2-a^2}$ јер тачка K припада кругу $k: x^2+y^2=a^2+b^2$, те је $x_K^2+y_K^2=a^2+b^2$

$$x_K^2-a^2=b^2-y_K^2$$

$$\underbrace{(a^2-x_K^2)}_{\neq 0}s^2+2x_Ky_Ks+x_K^2-a^2=0$$

$D=(2x_Ky_K)^2-4\cdot(a^2-x_K^2)\cdot(x_K^2-a^2)=4x_K^2y_K^2+4\underbrace{(a^2-x_K^2)^2}_{\neq 0}>0$ јер је $x_K^2\neq a^2$ $\Rightarrow$ ова квадратна једначина по s има два реална решења s_1 и s_2.

На основу Виетових формула је $s_1s_2=\dfrac{x_K^2-a^2}{a^2-x_K^2}=\dfrac{-(a^2-x_K^2)}{a^2-x_K^2}\overset{*}{=}-1$.

Једначина тангенте елипсе $\mathcal{E}$ је $\dfrac{x-x_K}{A}=\dfrac{y-y_K}{B}$ тј. $\dfrac{x-x_K}{1}=\dfrac{y-y_K}{\frac{B}{A}}$ тј. $\dfrac{x-x_K}{1}=\dfrac{y-y_K}{s}$.

Како имамо два реална решења за s, то имамо две тангенте елипсе $\mathcal{E}$ које садрже тачку $K(x_K,y_K)$ и њихови вектори праваца су $(1,s_1)$ и $(1,s_2)$, а како је $(1,s_1)\circ(1,s_2)=1\cdot 1+s_1s_2\overset{*}{=}1-1=0$, то су тангенте елипсе $\mathcal{E}$ из тачке K међусобно нормалне, тј. елипса $\mathcal{E}$ се из тачке K види под правим углом, те тачка $K(x_K,y_K)$ са круга k таква да је $x_K^2\neq a^2$ припада скупу свих тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом.

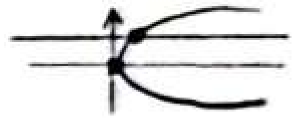
Дакле, круг $k: x^2+y^2=a^2+b^2$ је подскуп скупа свих тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом, а како смо већ доказали и да је скуп свих тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом подскуп круга $k: x^2+y^2=a^2+b^2$, то следи да је тражено геометријско место тачака из којих се елипса $\mathcal{E}$ види под правим углом круг $k: x^2+y^2=a^2+b^2$.

5.5. Шта је геометријско место тачака из којих се парабола види под правим углом?

<u>Решење:</u> Нека је $T(x_T, y_T)$ тачка из које се парабола $y^2=2px$ види под правим углом. То значи да угао између тангенти из тачке T на параболу мора бити $90°$, те ако је $(u,\vartheta)\neq(0,0)$ вектор правца једне тангенте из тачке T на параболу, онда је $(-\vartheta,u)$ вектор правца друге тангенте из тачке T на параболу (јер је $(u,\vartheta)\circ(-\vartheta,u)=u\cdot(-\vartheta)+\vartheta\cdot u=-u\vartheta+u\vartheta=0$).

$$t_1:\ \frac{x-x_T}{u}=\frac{y-y_T}{\vartheta}=t \implies x=ut+x_T,\ y=\vartheta t+y_T$$

Приметимо да не може бити $\vartheta=0$, иначе би права t_1 имала вектор правца $(u,0)$ и била би паралелна са Ox осом, те иако сече параболу у једној тачки, она не би била тангента.



Дакле, $\vartheta\neq0$. Да би права t_1 била тангента параболе мора постојати јединствена тачка пресека праве t_1 и параболе, назовимо је $P(x_P,y_P)$. $P\in t_1 \implies (\exists t_P\in\mathbb{R})\ x_P=ut_P+x_T,\ y_P=\vartheta t_P+y_T$ и то заменимо у

$$y_P^2=2px_P \implies (\vartheta t_P+y_T)^2=2p(ut_P+x_T)$$

$$\vartheta^2t_P^2+2\vartheta y_T t_P+y_T^2=2put_P+2px_T$$

$$\vartheta^2t_P^2+2(\vartheta y_T-pu)t_P+y_T^2-2px_T=0$$

Како је $\vartheta\neq0$ ово је квадратна једначина по t_P која има јединствено решење само ако је $\Delta=0$.

$$\Delta=(2(\vartheta y_T-pu))^2-4\vartheta^2\cdot(y_T^2-2px_T)=4(\vartheta^2y_T^2-2\vartheta y_Tpu+p^2u^2)-4\vartheta^2y_T^2+8\vartheta^2px_T=\cancel{4\vartheta^2y_T^2}-8\vartheta y_Tpu+4p^2u^2-\cancel{4\vartheta^2y_T^2}+8\vartheta^2px_T$$

$$=4\cdot(p^2u^2-2\vartheta y_Tpu+2\vartheta^2px_T)=0 \implies p^2u^2-2\vartheta y_Tpu+2\vartheta^2px_T=0 \quad (1)$$

$$t_2:\ \frac{x-x_T}{-\vartheta}=\frac{y-y_T}{u}=\lambda \implies x=-\vartheta\lambda+x_T,\ y=u\lambda+y_T$$

Приметимо да не може бити $u=0$, иначе би права t_2 имала вектор правца $(-\vartheta,0)$ и била би паралелна са Ox осом, те иако сече параболу у једној тачки, она не би била тангента.

Дакле, $u\neq0$. Да би права t_2 била тангента параболе мора постојати јединствена тачка пресека праве t_2 и параболе, назовимо је $S(x_S,y_S)$. $S\in t_2 \implies (\exists\lambda_S\in\mathbb{R})\ x_S=-\vartheta\lambda_S+x_T,\ y_S=u\lambda_S+y_T$ и то заменимо у

$$y_S^2=2px_S \implies (u\lambda_S+y_T)^2=2p(-\vartheta\lambda_S+x_T)$$

$$\mu^2\lambda_S^2+2\mu y_T\lambda_S+y_T^2=-2p\vartheta\lambda_S+2px_T$$

$$\mu^2\lambda_S^2+2(\mu y_T+p\vartheta)\lambda_S+y_T^2-2px_T=0$$

Како је $\mu\neq 0$ ово је квадратна једначина по λ_S која има јединствено решење само ако је $D=0$.

$$D=(2(\mu y_T+p\vartheta))^2-4\mu^2(y_T^2-2px_T)=4\cdot(\mu^2y_T^2+2\mu y_Tp\vartheta+p^2\vartheta^2)-4\mu^2y_T^2+8\mu^2px_T=\cancel{4\mu^2y_T^2}+8\mu y_Tp\vartheta+4p^2\vartheta^2-\cancel{4\mu^2y_T^2}+8\mu^2px_T$$

$$=4\cdot(p^2\vartheta^2+2\mu y_Tp\vartheta+2\mu^2px_T)=0 \quad\Rightarrow\quad p^2\vartheta^2+2\mu y_Tp\vartheta+2\mu^2px_T=0 \quad (2)$$

Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо $p^2\mu^2\cancel{-2\vartheta y_Tp\mu}+2\vartheta^2px_T+p^2\vartheta^2\cancel{+2\mu y_Tp\vartheta}+2\mu^2px_T=0$

$$p^2(\mu^2+\vartheta^2)+2px_T(\mu^2+\vartheta^2)=0$$

$$2px_T(\mu^2+\vartheta^2)=-p^2(\mu^2+\vartheta^2) \quad /:p(\mu^2+\vartheta^2)\neq 0$$

јер је $(\mu,\vartheta)\neq(0,0)$ и $p\neq 0$

$$2x_T=-p$$

$$x_T=-\frac{p}{2}$$

Дакле, све тачке T из којих се парабола $y^2=2px$ види под правим углом припадају директриси $x=-\frac{p}{2}$ те параболе.

Докажимо сада да свака тачка директрисе $x=-\frac{p}{2}$ припада геометријском месту тачака из којих се парабола $y^2=2px$ види под правим углом.

Нека је $N(x_N,y_N)$ произвољна тачка с директрисе $x=-\frac{p}{2}$. Тада је $x_N=-\frac{p}{2}$.

Нека је $\frac{x-(-\frac{p}{2})}{A}=\frac{y-y_N}{B}$, $(A,B)\neq(0,0)$ тангента параболе $y^2=2px$ која садржи тачку N.

$$\frac{x+\frac{p}{2}}{A}=\frac{y-y_N}{B}=\varrho \quad\Rightarrow\quad x=A\varrho-\frac{p}{2},\quad y=B\varrho+y_N$$

Приметимо да не може бити $B=0$, иначе би ова права имала вектор правца $(A,0)$ и била би паралелна са Ox осом, те иако сече параболу у једној тачки, она не би била тангента. Дакле, $B\neq 0$.

Да би права $q: x = A\varrho - \frac{p}{2}$, $y = B\varrho + y_N$ била тангента параболе $y^2=2px$ мора постојати јединствена тачка пресека те праве и параболе, назовимо је $M(x_M, y_M)$. $M \in q \Rightarrow (\exists \varrho_M \in \mathbb{R})\ x_M = A\varrho_M - \frac{p}{2}, y_M = B\varrho_M + y_N$ и то заменимо у $y_M^2 = 2px_M \Rightarrow (B\varrho_M + y_N)^2 = 2p\cdot(A\varrho_M - \frac{p}{2})$

$$B^2\varrho_M^2 + 2By_N\varrho_M + y_N^2 = 2pA\varrho_M - p^2$$

$$B^2\varrho_M^2 + 2(By_N - Ap)\varrho_M + y_N^2 + p^2 = 0$$

Како је $B \neq 0$ ово је квадратна једначина по ϱ_M која има јединствено решење само ако је $\Delta = 0$.

$$\Delta = (2(By_N - Ap))^2 - 4B^2\cdot(y_N^2+p^2) = 4\cdot(B^2y_N^2 - 2By_NAp + A^2p^2) - 4B^2y_N^2 - 4B^2p^2 = \cancel{4B^2y_N^2} - 8By_NAp + 4A^2p^2 - \cancel{4B^2y_N^2} - 4B^2p^2 =$$

$$= 4\cdot(A^2p^2 - 2y_NpAB - B^2p^2) = 0 \Rightarrow A^2p^2 - 2y_NpAB - B^2p^2 = 0 \quad / : p \neq 0$$

$$A^2p - 2y_NAB - B^2p = 0 \quad / : B^2 \neq 0$$

$$p\frac{A^2}{B^2} - 2y_N\cdot\frac{AB}{B^2} - p\frac{B^2}{B^2} = 0$$

$$p\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^2 - 2y_N\frac{A}{B} - p = 0$$

Уведимо смену $k = \frac{A}{B}$.

$$pk^2 - 2y_Nk - p = 0$$

Како је $p \neq 0$, то је ово квадратна једначина по k.

$\Delta = (-2y_N)^2 - 4\cdot p\cdot(-p) = 4y_N^2 + 4p^2 = 4(y_N^2+p^2) > 0$ јер је $p \neq 0$ $\Rightarrow$ Ова квадратна једначина по k има два реална решења k_1 и k_2, а на основу Виетове формуле је $k_1\cdot k_2 = \frac{-p}{p} = -1$.

$\frac{x+\frac{p}{2}}{A} = \frac{y-y_N}{B} \Rightarrow \frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{A}{B}} = \frac{y-y_N}{1}$ тј. $\frac{x+\frac{p}{2}}{k_1} = \frac{y-y_N}{1}$ и $\frac{x+\frac{p}{2}}{k_2} = \frac{y-y_N}{1}$ су једначине тангенти из тачке $N(x_N, y_N)$ на параболу $y^2=2px$, а како су им вектори праваца $(k_1, 1)$ и $(k_2, 1)$ и важи $(k_1,1)\circ(k_2,1) = k_1\cdot k_2 + 1\cdot 1 = -1+1 = 0$, те су те дијагонале нормалне и зато тачка N припада геометријском месту тачака из којих се парабола $y^2=2px$ види под правим углом. Дакле, тражено геометријско место тачака је директриса $x = -\frac{p}{2}$ те параболе.