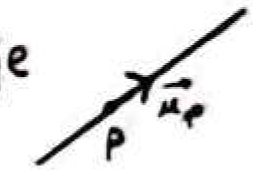
• Аналитичка геометрија простора

– имамо координате x, y, z. Растојање тачака $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ је $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

– Једначина праве p у простору која садржи тачку $P(x_P, y_P, z_P)$ и има вектор правца праве $\vec{u}_p=(a,b,c)\neq\vec{0}$ је

$$p:\ \frac{x-x_P}{a}=\frac{y-y_P}{b}=\frac{z-z_P}{c}\ (=t)$$

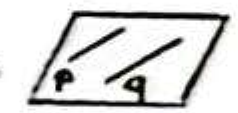


Параметарске једначине ове праве су $x=at+x_P,\ y=bt+y_P,\ z=ct+z_P,\ t\in\mathbb{R}$.

– Међусобни положај две праве p и q, при чему права p садржи тачку P и има вектор правца $\vec{u}_p$, а права q садржи тачку Q и има вектор правца $\vec{u}_q$

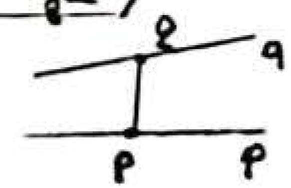
1) $p=q$ $\Leftrightarrow$ Важи да праве p и q имају бар једну заједничку тачку и вектори $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ су линеарно зависни.

2) p и q су дисјунктне и у истој су равни $\Leftrightarrow$ Важи да је $p\cap q=\emptyset$ и вектори $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ су линеарно зависни.



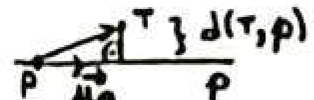
3) p и q се секу $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ су линеарно независни и $[\vec{PQ},\vec{u}_p,\vec{u}_q]=0$

4) p и q су мимоилазне $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ су линеарно независни и $[\vec{PQ},\vec{u}_p,\vec{u}_q]\neq 0$



– Растојање тачке $T(x_T, y_T, z_T)$ од праве $p:\ \frac{x-x_P}{a}=\frac{y-y_P}{b}=\frac{z-z_P}{c}$ је $d(T,p)=\frac{\|\vec{u}_p\times\vec{PT}\|}{\|\vec{u}_p\|}$

при чему је $P(x_P, y_P, z_P)\in p$.



– Једначина равни α која садржи тачку $T(x_T, y_T, z_T)$ и има вектор нормале $\vec{n}_\alpha=(a,b,c)\neq\vec{0}$ је

$\alpha:\ a\cdot(x-x_T)+b\cdot(y-y_T)+c\cdot(z-z_T)=0$

Параметарске једначине равни α су $x=x_T+tu_1+sv_1$, $y=y_T+tu_2+sv_2$, $z=z_T+tu_3+sv_3$, t и s су реални параметри.

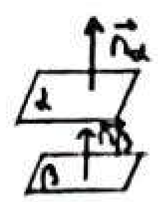
Ако су $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ и $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ два линеарно независна вектора из равни α, онда је $\vec{n}_\alpha=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$

један вектор нормале равни α.

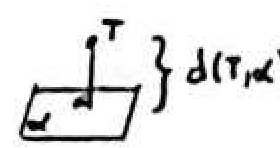
– Права p је нормална на раван α ако је $\vec{u}_p$ колинеаран са $\vec{n}_\alpha$.

– Права q је паралелна равни α ако је $\vec{n}_\alpha$ нормалан на $\vec{u}_q$.

– Равни α и β су паралелне ако су вектори $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ колинеарни.



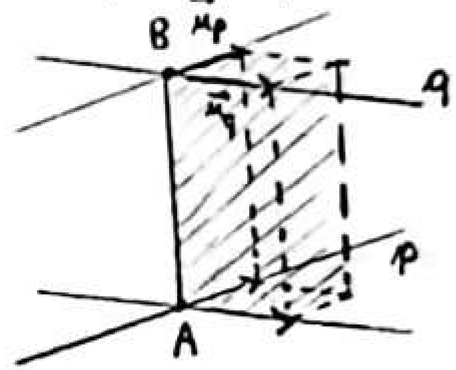
– Растојање тачке $T(x_T, y_T, z_T)$ од равни $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$ је $d(T,\alpha)=\frac{|ax_T+by_T+cz_T+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.



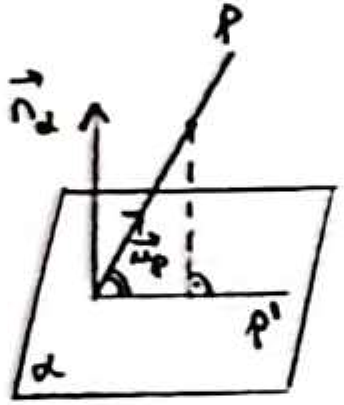
– Угао између две праве (мисли се на оштар угао) $p:\ \frac{x-x_P}{a}=\frac{y-y_P}{b}=\frac{z-z_P}{c}$ и $q:\ \frac{x-x_Q}{a_1}=\frac{y-y_Q}{b_1}=\frac{z-z_Q}{c_1}$ се одређује помоћу

$\cos\sphericalangle(p,q)=\frac{|\vec{u}_p\circ\vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\|\cdot\|\vec{u}_q\|}$.

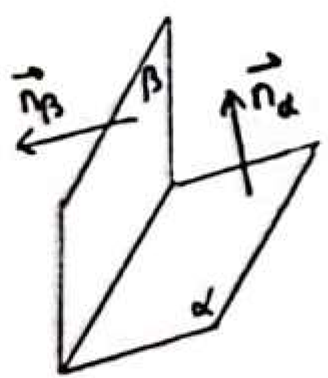
- Растојање између мимоилазних правих $p: \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c}$ и $q: \frac{x-x_q}{a_1} = \frac{y-y_q}{b_1} = \frac{z-z_q}{c_1}$ је $d(p,q) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{m}_p, \vec{m}_q]|}{\|\vec{m}_p \times \vec{m}_q\|}$ при чему су $A \in p$ и $B \in q$ произвољне тачке.



- Угао између праве p и равни α се одређује помоћу $\sin \measuredangle(p,\alpha) = \frac{|\vec{m}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{m}_p\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|}$.



- Угао између равни α и β се одређује помоћу $\cos \measuredangle(\alpha,\beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$.

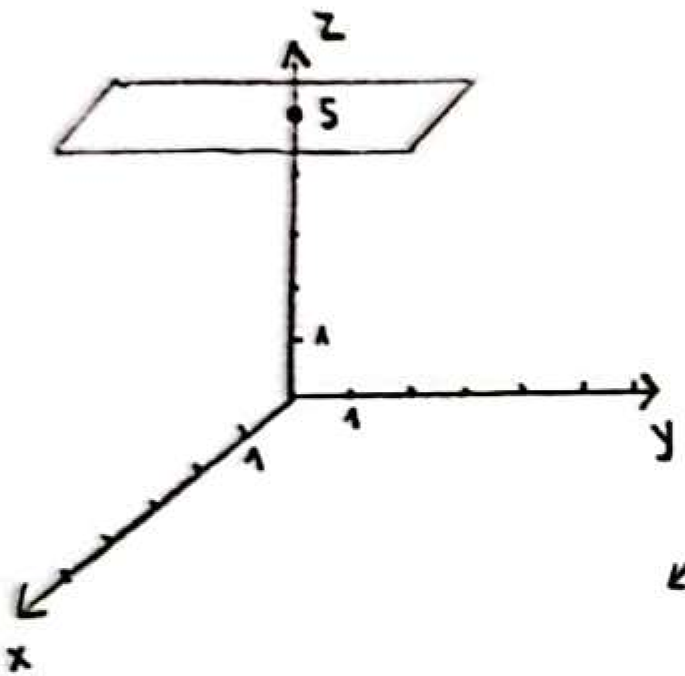


4.9. Скицирати раван а) $z-5=0$; б) $x=-2$; в) $y+z-3=0$; г) $x+2y+3z-6=0$.

Решење:

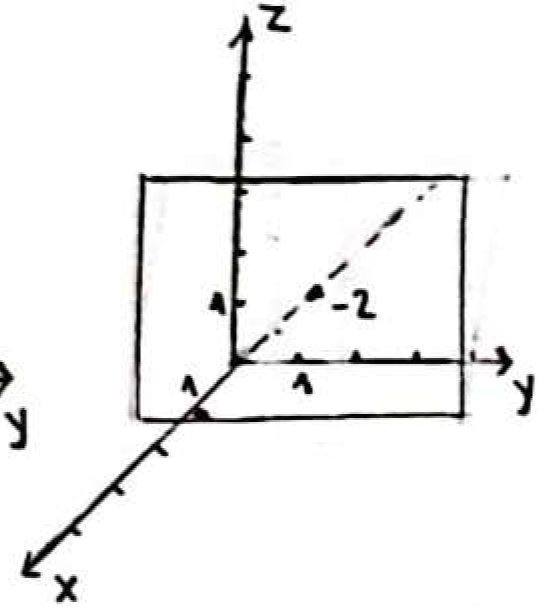
а) $z-5=0$

$z=5$



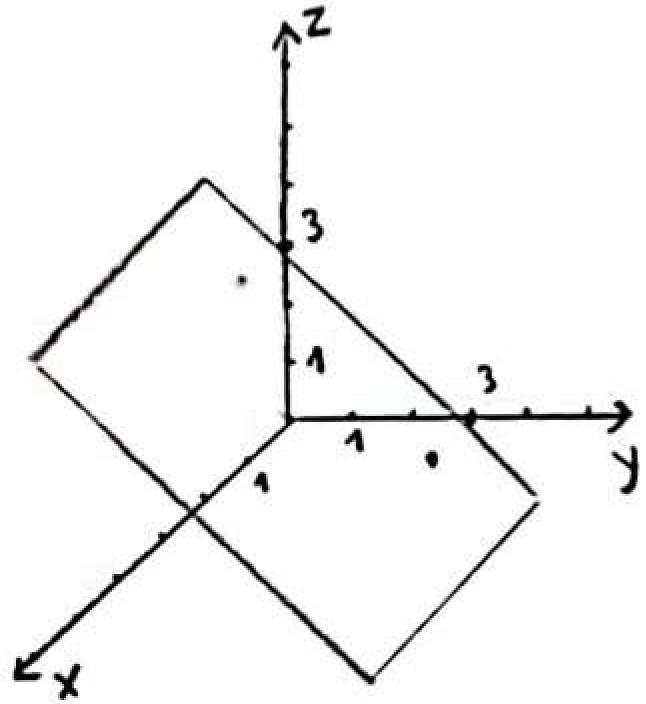
Тражена раван садржи тачку $(0,0,5)$ и паралелна је равни Oxy.

б) $x=-2$



Тражена раван садржи тачку $(-2,0,0)$ и паралелна је равни Oyz.

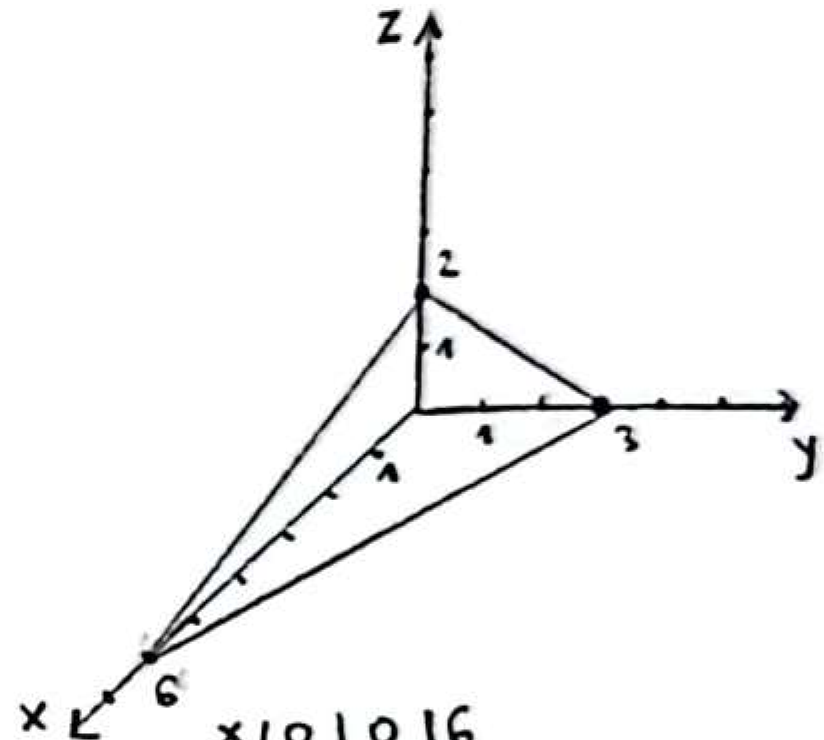
в) $y+z-3=0$



x	0	0	1
y	3	0	3
z	0	3	0

Тражена раван је паралелна x-оси и сече раван $x=0$ по правој $z=-y+3$.

г) $x+2y+3z-6=0$



x	0	0	6
y	0	3	0
z	2	0	0

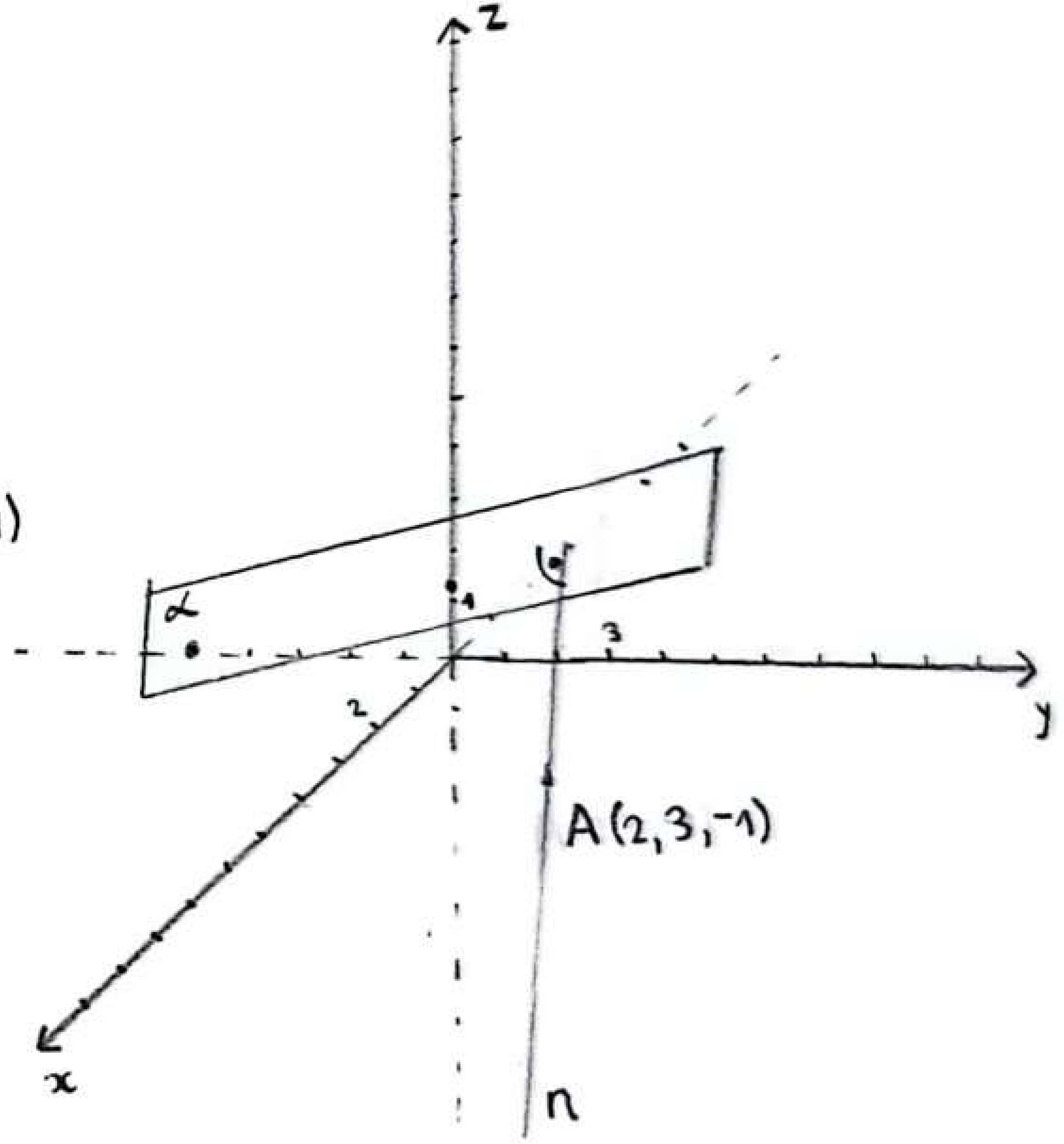
Тражена раван сече x-осу у тачки $(6,0,0)$, y-осу у тачки $(0,3,0)$, а z-осу у тачки $(0,0,2)$.

4.10. Одредити једначину нормале из тачке $A(2,3,-1)$ на раван $\alpha: 2x+y-4z+5=0$.

Решење:

$\alpha: 2x+y-4z+5=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha=(2,1,-4)$ је вектор нормале равни α

x	0	0	$-\frac{5}{2}$
y	-5	0	0
z	0	$\frac{5}{4}$	0



n – тражена нормала из тачке $A(2,3,-1)$ на раван α

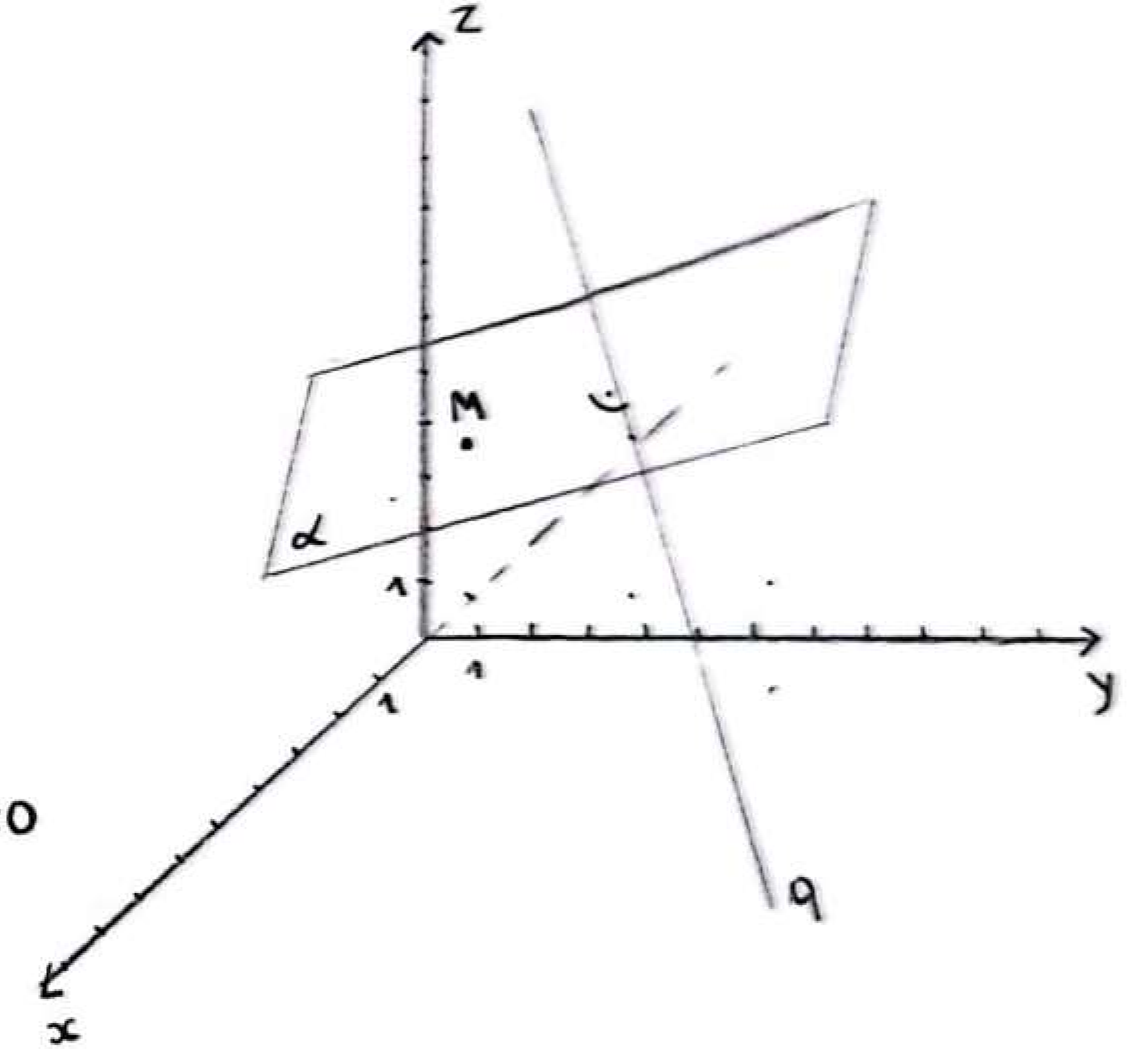
$n \perp \alpha \Rightarrow$ Један од вектора правца праве n је вектор нормале равни α. $\Rightarrow \vec{\mu}_n=\vec{n}_\alpha=(2,1,-4)$

Једначина праве n која садржи тачку $A(2,3,-1)$ и има вектор правца $(2,1,-4)$ је:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-(-1)}{-4}, \text{ тј. } n: \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-4}.$$

4.11. Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1,0,3)$ и нормална је на праву $q: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

<u>Решење:</u> $q: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow \vec{u}_q=(2,4,-1)$ је вектор правца праве q



α - тражена раван која садржи тачку $M(-1,0,3)$ и нормална је на праву q

$\Rightarrow$ Вектор правца праве q је (један од) вектор нормале равни α тј. $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_q=(2,4,-1)$.

Једначина равни α која садржи тачку $M(-1,0,3)$ и има вектор нормале $(2,4,-1)$ је $2\cdot(x-(-1))+4\cdot(y-0)+(-1)\cdot(z-3)=0$

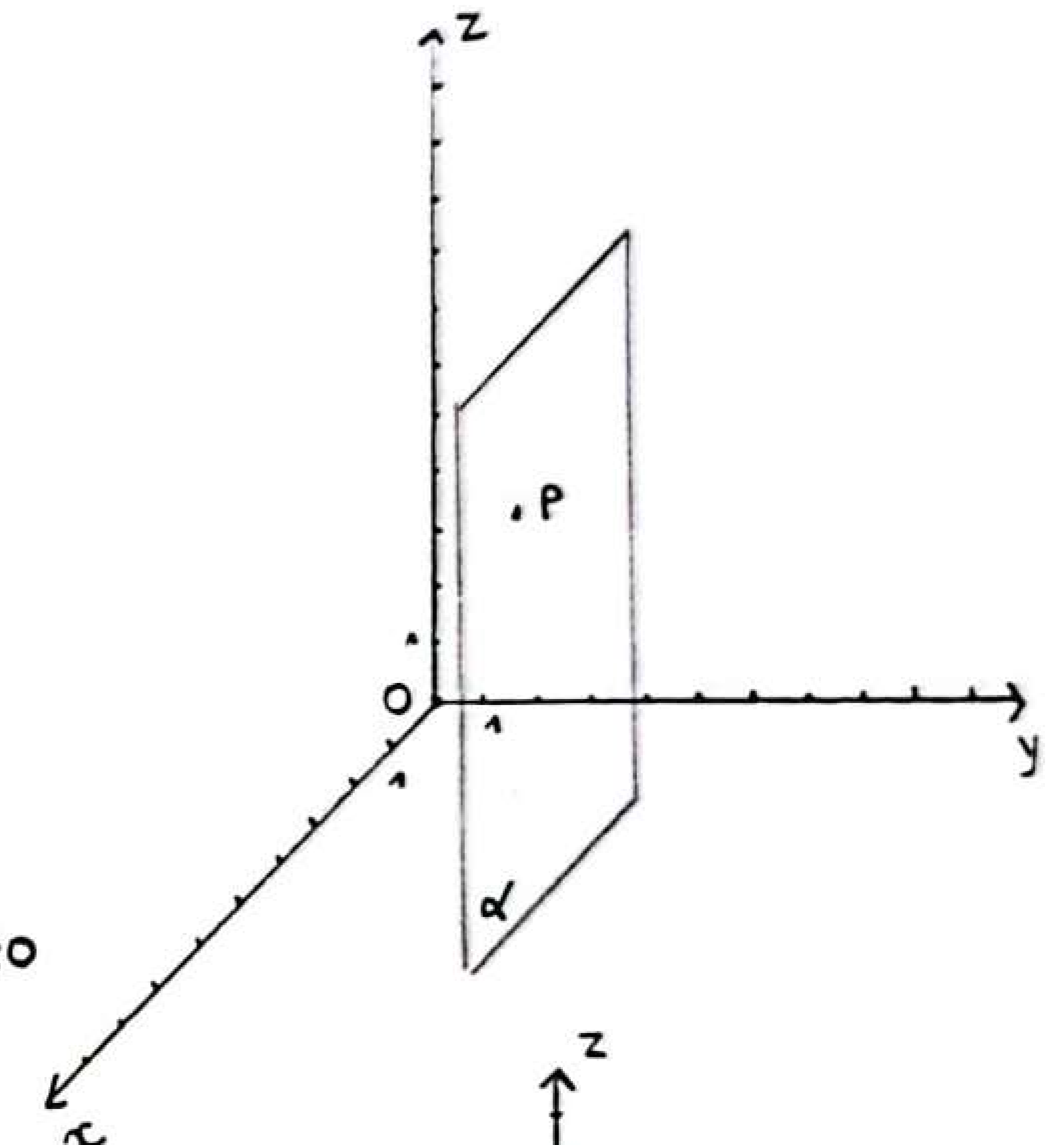
тј. $2\cdot(x+1)+4y-(z-3)=0$, односно $2x+2+4y-z+3=0$,

те је $\alpha: 2x+4y-z+5=0$.

4.12. Одредити једначину равни која:

а) је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2,3,5)$ б) садржи z-осу и тачку $M(-3,1,2)$

в) паралелна је x оси и садржи тачке $A(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$.

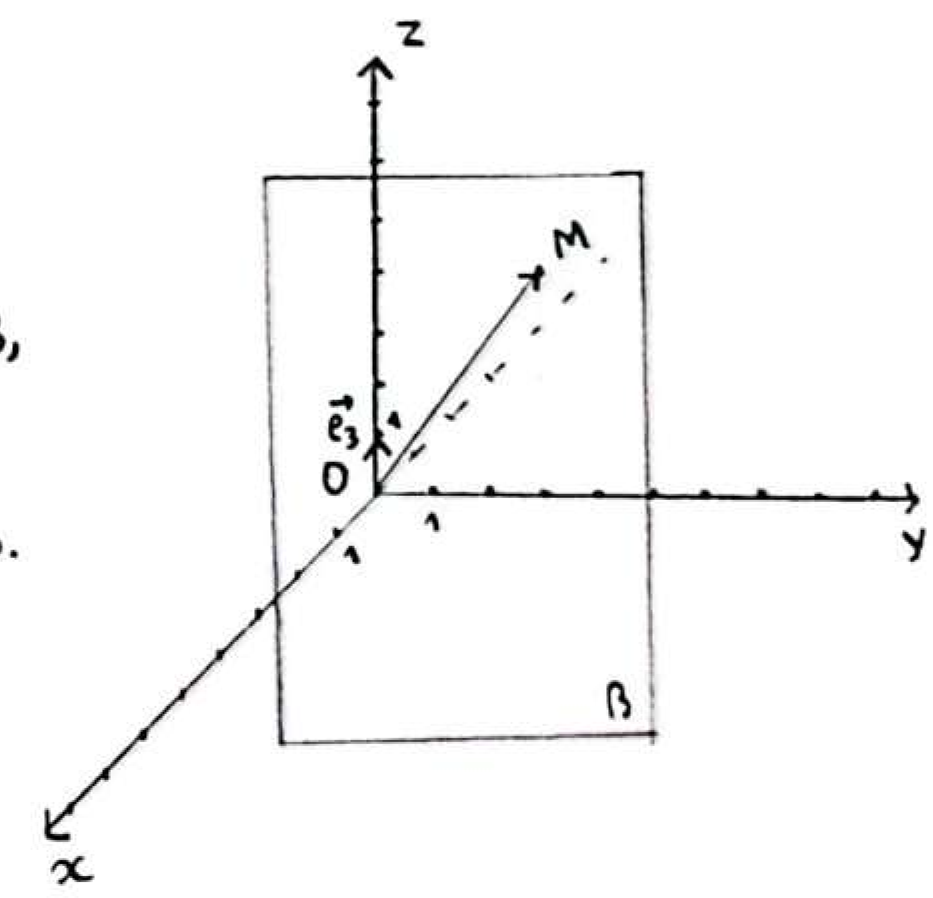


Решење: а) α - тражена раван која је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2,3,5)$

Паралелне равни α и Oxz имају исту нормалу.
Како је $Oy \perp Ox$ и $Oy \perp Oz$, то на основу Кошијеве теореме следи да је $Oy \perp Oxz$, те се за вектор нормале равни α може узети вектор $\vec{n}_\alpha = (0,1,0)$.
Једначина равни α која садржи тачку $P(2,3,5)$ и има вектор нормале $(0,1,0)$ је $\alpha: 0\cdot(x-2)+1\cdot(y-3)+0\cdot(z-5)=0$
тј. $\alpha: y=3$.

б) β - тражена раван која садржи z-осу и тачку $M(-3,1,2)$

Како тачка $O(0,0,0)$ припада z-оси, а z-оса припада равни β, то тачка $O(0,0,0)$ припада равни β.
$\overrightarrow{OM} = [M]-[O] = (-3,1,2)-(0,0,0) = (-3,1,2)$ је у равни β јер $O\in\beta$ и $M\in\beta$.
Један од вектора правца z-осе је $\vec{e_3} = (0,0,1)$.
Дакле, вектори $\vec{e_3}$ и $\overrightarrow{OM}$ су садржани у равни β.



Приметимо да су вектори $\vec{e}_3$ и $\vec{OM}$ линеарно независни.

$$\tilde{\alpha}\cdot\vec{e}_3+\tilde{\beta}\cdot\vec{OM}=\vec{o} \Rightarrow \tilde{\alpha}\cdot(0,0,1)+\tilde{\beta}\cdot(-3,1,2)=(0,0,0) \Rightarrow (0,0,\tilde{\alpha})+(-3\tilde{\beta},\tilde{\beta},2\tilde{\beta})=(0,0,0) \Rightarrow (-3\tilde{\beta},\tilde{\beta},\tilde{\alpha}+2\tilde{\beta})=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow -3\tilde{\beta}=0$$
$$\tilde{\beta}=0$$
$$\tilde{\alpha}+2\tilde{\beta}=0 \Rightarrow \tilde{\alpha}=0$$

Како из $\tilde{\alpha}\cdot\vec{e}_3+\tilde{\beta}\cdot\vec{OM}=\vec{o}$ следи $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}=0$, то су $\vec{e}_3$ и $\vec{OM}$ линеарно независни вектори равни β, те је $\vec{e}_3\times\vec{OM}$ један вектор нормале равни β.

$$\vec{e}_3\times\vec{OM}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{e}_1+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}\vec{e}_2+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{e}_3=(-1)^2\cdot(0\cdot2-1\cdot1)\vec{e}_1+(-1)^3\cdot(0\cdot2-(-3)\cdot1)\vec{e}_2$$

$$+(-1)^4\cdot(0\cdot1-(-3)\cdot0)\vec{e}_3=-\vec{e}_1-3\vec{e}_2=(-1,-3,0).$$

Једначина равни β која садржи тачку $M(-3,1,2)$ и има вектор нормале $(-1,-3,0)$ је

$\beta:\ -1(x-(-3))-3(y-1)+0\cdot(z-2)=0$ тј. $\beta:\ -(x+3)-3y+3=0$, односно $\beta: -x-3-3y+3=0$,

тј. $\beta: -x-3y=0$, односно $\beta: x+3y=0$.

в) γ - тражена раван која је паралелна x оси и садржи тачке $A(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$

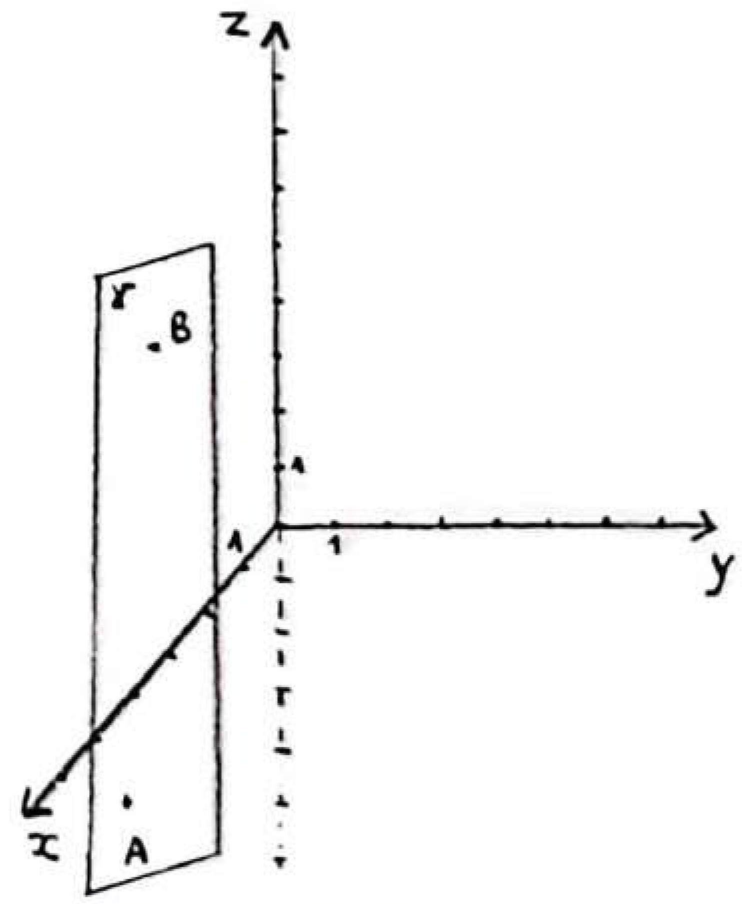
Како је γ паралелна x оси, то постоји представник вектора $\vec{e}_1=(1,0,0)$ који припада равни γ.

$A(4,0,-2)\in\gamma$, $B(5,1,7)\in\gamma \Rightarrow \vec{AB}=[B]-[A]=(5,1,7)-(4,0,-2)=(1,1,9)\subset\gamma$

Приметимо да су вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{AB}$ линеарно независни.

$$a\cdot\vec{e}_1+b\cdot\vec{AB}=\vec{o} \Rightarrow a\cdot(1,0,0)+b\cdot(1,1,9)=(0,0,0) \Rightarrow (a,0,0)+(b,b,9b)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (a+b,b,9b)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{matrix}a+b=0\\ b=0\\ 9b=0\end{matrix} \Rightarrow a=0$$



Како из $a\vec{e}_1+b\vec{AB}=\vec{o}$ следи $a=b=0$, то су $\vec{e}_1$ и $\vec{AB}$ линеарно независни вектори равни γ, те је $\vec{e}_1\times\vec{AB}$ један вектор нормале равни γ.

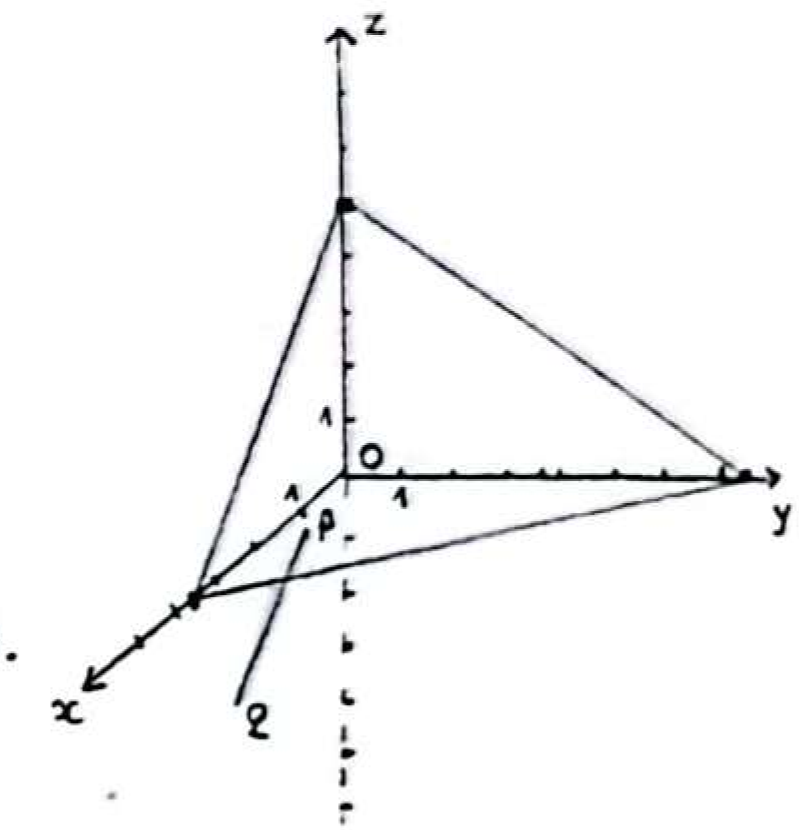
$$\vec{e}_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (-1)^2 \cdot (0 \cdot 9 - 0 \cdot 1) \vec{e}_1 + (-1)^3 \cdot (1 \cdot 9 - 0 \cdot 1) \vec{e}_2 + (-1)^4 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \vec{e}_3$$

$$= 1 \cdot (0 - 0) \vec{e}_1 + (-1) \cdot 9 \vec{e}_2 + 1 \cdot 1 \cdot \vec{e}_3 = -9 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (0, -9, 1)$$

Једначина равни γ која садржи тачку $A(4,0,-2)$ и има вектор нормале $(0,-9,1)$ је $\gamma: 0 \cdot (x-4) + (-9) \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-(-2)) = 0$

тј. $\gamma: -9y + z + 2 = 0$.

4.13. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(3,-2,-4)$ у односу на раван $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α.



<u>Решење:</u> n – права која садржи тачку $P(3,-2,-4)$ и нормална је на раван α

$$\vec{u}_n = \vec{n}_\alpha \underset{\uparrow}{=} (6,2,-3)$$

јер је $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$

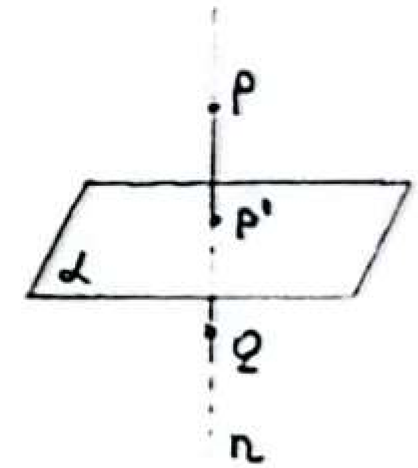
Једначина праве која садржи тачку $P(3,-2,-4)$ и има вектор правца $(6,2,-3)$ је

$$n: \frac{x-3}{6} = \frac{y-(-2)}{2} = \frac{z-(-4)}{-3} \quad \text{tj.} \quad n: \frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-3} = t.$$

Параметарске једначине праве n су: $x = 6t+3$, $y = 2t-2$, $z = -3t-4$, $t \in \mathbb{R}$.

По дефиницији пројекције P' тачке P на раван α је $\{P'\} = n \cap \alpha$.

Пронађимо $t' \in \mathbb{R}$ такво да су $x' = 6t'+3$, $y' = 2t'-2$ и $z' = -3t'-4$ координате тачке P'.



$$P' \in \alpha \;\Rightarrow\; 6\cdot x' + 2\cdot y' - 3z' - 75 = 0 \;\Rightarrow\; 6\cdot(6t'+3) + 2\cdot(2t'-2) - 3(-3t'-4) - 75 = 0$$

$$36t' + 18 + 4t' - 4 + 9t' + 12 - 75 = 0$$

$$40t' + 9t' + 14 - 63 = 0$$

$$49t' - 49 = 0$$

$$49t' = 49$$

$$t' = \frac{49}{49} = 1$$

$\Rightarrow$ $x' = 6t'+3 = 6\cdot 1+3 = 6+3 = 9$, $y' = 2t'-2 = 2\cdot 1 - 2 = 2-2 = 0$, $z' = -3t'-4 = -3\cdot 1 - 4 = -3-4 = -7$

$\Rightarrow$ Пројекција тачке P на раван α је тачка $P'(9,0,-7)$.

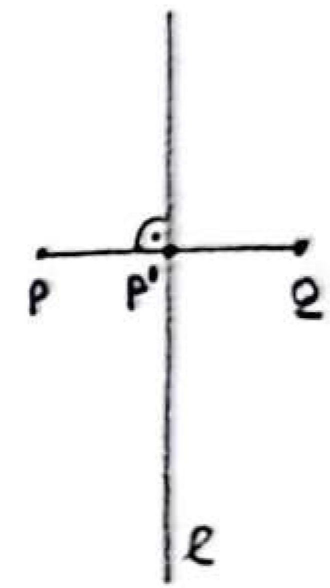
По дефиницији симетричне тачке Q тачке $P(3,-2,-4)$ у односу на раван α важи да је тачка P' средиште дужи PQ, те важи:

$$\left.\begin{aligned}
9 = x' = \frac{x_P + x_Q}{2} &\;\Rightarrow\; 18 = x_P + x_Q = 3 + x_Q \;\Rightarrow\; x_Q = 18-3 = 15 \\
0 = y' = \frac{y_P + y_Q}{2} &\;\Rightarrow\; 0 = y_P + y_Q = -2 + y_Q \;\Rightarrow\; y_Q = 2 \\
-7 = z' = \frac{z_P + z_Q}{2} &\;\Rightarrow\; -14 = -4 + z_Q \;\Rightarrow\; z_Q = -14+4 = -10
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Симетрична тачка тачке $P(3,-2,-4)$ у односу на раван α је тачка $Q(15,2,-10)$.

4.14. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(-1,-2,1)$ у односу на праву $\ell: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{1}$ као и пројекцију P' тачке P на праву ℓ.

Решење: $\ell: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{1}=t \Rightarrow x=-2t$
$y=4t+3$
$z=t+4,\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad \vec{u}_\ell=(-2,4,1)$



Нека је $t'\in\mathbb{R}$ такво да су $x'=-2t',\ y'=4t'+3,\ z'=t'+4$ координате тачке P'.

P' је пројекција тачке P на праву $\ell \Rightarrow PP'\perp\ell \Rightarrow \overrightarrow{PP'}\circ\vec{u}_\ell=0$

$\overrightarrow{PP'}=[P']-[P]=(-2t',4t'+3,t'+4)-(-1,-2,1)=(-2t'+1,4t'+5,t'+3)$

$\overrightarrow{PP'}\circ\vec{u}_\ell=0 \Rightarrow (-2t'+1,4t'+5,t'+3)\circ(-2,4,1)=0$

$$-2(-2t'+1)+4\cdot(4t'+5)+1\cdot(t'+3)=0$$
$$4t'-2+16t'+20+t'+3=0$$
$$21t'+21=0$$
$$21t'=-21$$
$$t'=\frac{-21}{21}=-1 \Rightarrow x'=-2t'=-2\cdot(-1)=2 \quad y'=4t'+3=4\cdot(-1)+3=-4+3=-1 \quad z'=t'+4=-1+4=3$$

Пројекција тачке P на праву ℓ је тачка $P'(2,-1,3)$.

Како је тачка Q симетрична тачки $P(-1,-2,1)$ у односу на праву ℓ, то је тачка P' средиште дужи PQ.

$\Rightarrow 2=x'=\frac{x_P+x_Q}{2} \Rightarrow 4=x_P+x_Q=-1+x_Q \Rightarrow x_Q=4+1=5$

$-1=y'=\frac{y_P+y_Q}{2} \Rightarrow -2=y_P+y_Q=-2+y_Q \Rightarrow y_Q=-2+2=0$

$3=z'=\frac{z_P+z_Q}{2} \Rightarrow 6=z_P+z_Q=1+z_Q \Rightarrow z_Q=6-1=5$

Симетрична тачка тачки P у односу на праву ℓ је тачка $Q(5,0,5)$.

(4.15.) Одредити једначину равни која садржи праву $\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha: 2x-4y+z+5=0$.

Решење: Приметимо да тачка $L(1,-2,3)$ припада правој ℓ (јер је $\frac{1-1}{2} = \frac{-2+2}{1} = \frac{3-3}{3} = 0$), те тражена раван β која садржи праву ℓ мора садржати и тачку L.

$\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \vec{u}_\ell = (2,1,3)$

Како раван β садржи праву ℓ, то вектор правца $\vec{u}_\ell$ праве ℓ припада равни β.

$\beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha = (2,-4,1)$ $\qquad \vec{u}_\ell \subset \beta,\ \vec{n}_\beta \perp \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{u}_\ell$

$\alpha: 2x-4y+z+5=0$

Приметимо да су вектори $\vec{u}_\ell$ и $\vec{n}_\alpha$ линеарно независни.

$a\vec{u}_\ell + b\vec{n}_\alpha = \vec{0} \Rightarrow a\cdot(2,1,3) + b\cdot(2,-4,1) = (0,0,0) \Rightarrow (2a,a,3a)+(2b,-4b,b)=(0,0,0) \Rightarrow (2a+2b, a-4b, 3a+b)=(0,0,0)$

$\Rightarrow 2a+2b=0 \ /:2 \quad a+b=0$

$a-4b=0 \quad \ominus \quad 5b=0 \Rightarrow b=0$

$3a+b=0 \quad a=-b=-0=0$

Како из $a\vec{u}_\ell + b\vec{n}_\alpha = \vec{0}$ следи да је $a=b=0$, то су $\vec{u}_\ell$ и $\vec{n}_\alpha$ линеарно независни.

$\Rightarrow$ Можемо сматрати да је $\vec{u}_\ell \times \vec{n}_\alpha$ вектор нормале на раван β.

$$\vec{u}_\ell \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_1 + (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\vec{e}_3 = 1\cdot(1\cdot1-(-4)\cdot3)\vec{e}_1 + (-1)\cdot(2\cdot1-2\cdot3)\vec{e}_2 + 1\cdot(2\cdot(-4)-2\cdot1)\vec{e}_3$$

$$= (1+12)\vec{e}_1 - (2-6)\vec{e}_2 + 1\cdot(-8-2)\vec{e}_3 = 13\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3 = (13,4,-10).$$

Једначина равни β која садржи тачку $L(1,-2,3)$ и има вектор нормале $(13,4,-10)$ је

$$\beta:\ 13\cdot(x-1) + 4\cdot(y-(-2)) - 10\cdot(z-3) = 0$$

$$13x-13+4(y+2)-10z+30=0$$

$$13x-13+4y+8-10z+30=0$$

$$13x+4y-10z+25=0.$$

4.16. Одредити λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-1}{-2}$ и $q: \frac{x-\lambda}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

Решење: Како је $p: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-1}{-2}$, то је $\vec{u}_p=(3,5,-2)$ и права p садржи тачку $P(2,-4,1)$ јер је $\frac{2-2}{3}=\frac{-4+4}{5}=\frac{1-1}{-2}=0$.

Како је $q: \frac{x-\lambda}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{0}$, то је $\vec{u}_q=(2,1,0)$ и права q садржи тачку $Q(\lambda,3,-5)$ јер је $\frac{\lambda-\lambda}{2}=\frac{3-3}{1}=\frac{-5+5}{0}=0$.

Како је $3=\frac{3}{2}\cdot 2$ али $5\neq\frac{3}{2}\cdot 1$, то вектори правца $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ правих p и q, редом, нису колинеарни те праве p и q нису паралелне (не поклапају се нити су дисјунктне и у истој равни).

Дакле, дате праве p и q се или секу или су мимоилазне. По дефиницији мимоилазних правих не постоји раван која их садржи, док за две праве које се секу постоји раван која их садржи.

Односно, дате праве p и q се секу само уколико су вектори $\vec{PQ}, \vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ компланарни, односно ако је $[\vec{PQ},\vec{u}_p,\vec{u}_q]=0$.

$$\vec{PQ}=[Q]-[P]=(\lambda,3,-5)-(2,-4,1)=(\lambda-2,7,-6)$$

$$0=[\vec{PQ},\vec{u}_p,\vec{u}_q]=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 7 & -6\\ 3 & 5 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}7 & -6\\ 5 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}\lambda-2 & -6\\ 3 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}\lambda-2 & 7\\ 3 & 5\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot 2\cdot(7\cdot(-2)-5\cdot(-6))$$

$$+(-1)^5\cdot((\lambda-2)\cdot(-2)-3\cdot(-6))+0=2\cdot(-14+30)-(-2\lambda+4+18)=2\cdot 16+2\lambda-22=32+2\lambda-22=10+2\lambda$$

Дакле, праве p и q се секу ако и само ако је $2\lambda+10=0$, тј. $2\lambda=-10$, тј. $\lambda=\frac{-10}{2}=-5$.

Означимо са $T(x_T,y_T,z_T)$ пресечну тачку правих p и q.

$T\in p \Rightarrow$ Постоји $t\in\mathbb{R}$ такво да важи $\frac{x_T-2}{3}=\frac{y_T+4}{5}=\frac{z_T-1}{-2}=t$, тј. $x_T=3t+2$, $y_T=5t-4$, $z_T=-2t+1$.

$T\in q \Rightarrow$ Постоји $s\in\mathbb{R}$ такво да важи $\frac{x_T+5}{2}=\frac{y_T-3}{1}=\frac{z_T+5}{0}=s$, тј. $x_T=2s-5$, $y_T=s+3$, $z_T=-5$.

$$3t+2=x_T=2s-5$$
$$5t-4=y_T=s+3$$
$$-2t+1=z_T=-5 \Rightarrow -2t=-5-1=-6 \Rightarrow t=\frac{-6}{-2}=3$$

Мора се проверити да су задовољене све једначине система.

$5\cdot 3-4=s+3$, $15-4-3=s$, $8=s$

$3\cdot 3+2=2s-5$, $9+2=2s-5$, $11+5=2s$, $16=2s$, $s=8$ ✓

$x_T=3t+2=3\cdot 3+2=9+2=11$

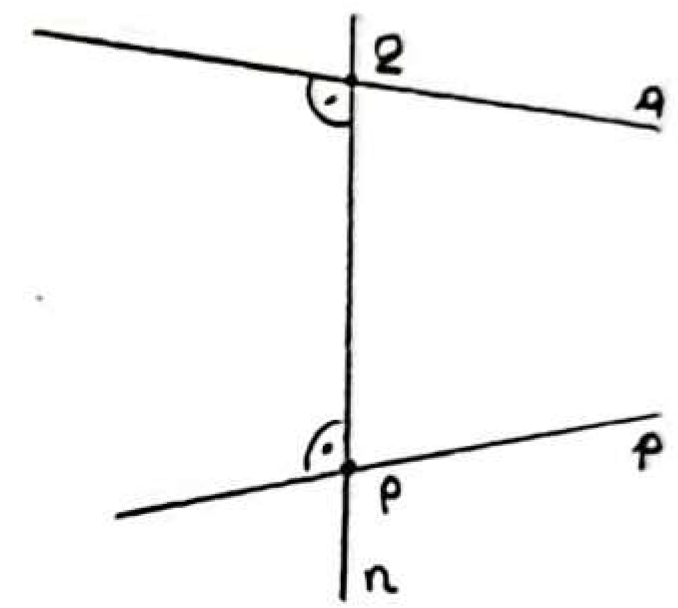
$y_T=5t-4=5\cdot 3-4=15-4=11$

$z_T=-5$

Координате пресечне тачке су $T(11,11,-5)$.

4.17. Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих $p: \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-12}{-1}$ и $q: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Решење: n – тражена заједничка нормала мимоилазних правих p и q



$n \cap p = \{P\}$ $\quad n \cap q = \{Q\}$ $\quad$ Нека су $P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$.

$P \in p \Rightarrow$ Постоји $t \in \mathbb{R}$ тако да важи $\frac{x_P-4}{1}=\frac{y_P+3}{2}=\frac{z_P-12}{-1}=t$, тј.

$x_P = t+4,\ y_P = 2t-3,\ z_P = -t+12.$

$Q \in q \Rightarrow$ Постоји $s \in \mathbb{R}$ тако да важи $\frac{x_Q-3}{-7}=\frac{y_Q-1}{2}=\frac{z_Q-1}{3}=s$, тј.

$x_Q = -7s+3,\ y_Q = 2s+1,\ z_Q = 3s+1.$

$$\vec{QP} = [P]-[Q] = (t+4, 2t-3, -t+12)-(-7s+3, 2s+1, 3s+1) =$$

$$= (t+4+7s-3,\ 2t-3-2s-1,\ -t+12-3s-1) = (t+7s+1,\ 2t-2s-4,\ -t-3s+11)$$

$QP \perp p \Rightarrow \vec{QP} \circ \vec{u}_p = 0 \Rightarrow (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11)\circ(1,2,-1)=0$

$p: \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-12}{-1}$

те је $\vec{u}_p = (1,2,-1)$

$$(t+7s+1)\cdot 1 + (2t-2s-4)\cdot 2 + (-t-3s+11)\cdot(-1) = 0$$

$$t+7s+1+4t-4s-8+t+3s-11=0$$

$$6t+6s-18=0 \quad /:6 \neq 0$$

$$t+s-3=0 \Rightarrow t=3-s$$

$QP \perp q \Rightarrow \vec{QP} \circ \vec{u}_q = 0 \Rightarrow (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11)\circ(-7,2,3)=0$

$q: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

те је $\vec{u}_q = (-7,2,3)$

$$(t+7s+1)\cdot(-7) + (2t-2s-4)\cdot 2 + (-t-3s+11)\cdot 3 = 0$$

$$-7t-49s-7+4t-4s-8-3t-9s+33=0$$

$$-6t-62s+18=0 \quad /:2 \neq 0$$

$$-3t-31s+9=0$$

$$-3(3-s)-31s+9=0$$

$$-9+3s-31s+9=0$$

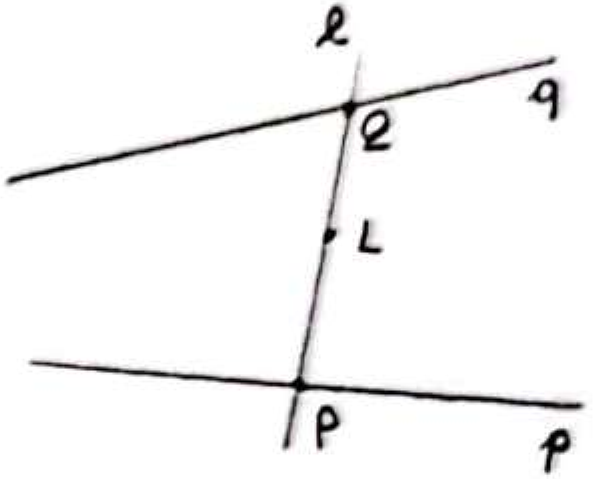
$-28s=0 \Rightarrow s=0 \quad t=3-s=3-0=3 \Rightarrow x_P=t+4=3+4=7 \quad y_P=2t-3=2\cdot3-3=6-3=3$

$z_P=-t+12=-3+12=9 \Rightarrow P(7,3,9)$

$\vec{QP} = (t+7s+1, 2t-2s-4, -t-3s+11) = (3+7\cdot0+1, 2\cdot3-2\cdot0-4, -3-3\cdot0+11) = (4,2,8) = 2\cdot(2,1,4) \Rightarrow \vec{u}_n = (2,1,4) \Rightarrow n: \frac{x-7}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-9}{4}$

је тражена заједничка нормала мимоилазних правих p и q, а растојање им је $QP = \|\vec{QP}\| = \sqrt{4^2+2^2+8^2} = \sqrt{16+4+64} = \sqrt{20+64} = \sqrt{84} = \sqrt{4\cdot21} = 2\sqrt{21}$.

(4.18.) Одредити једначину праве која садржи тачку $L(2,-1,7)$ и сече праве $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q: \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.



Решење: ℓ - тражена једначина праве која садржи тачку $L(2,-1,7)$ и сече праве p и q

$\ell \cap p = \{P\}$ $\quad \ell \cap q = \{Q\}$ Нека су $P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$.

$P \in p \Rightarrow$ Постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да је $\frac{x_P-1}{2} = \frac{y_P-4}{-3} = \frac{z_P-3}{1} = t$, тј.

$x_P = 2t+1$, $y_P = -3t+4$, $z_P = t+3$.

$Q \in q \Rightarrow$ Постоји $s \in \mathbb{R}$ такво да је $\frac{x_Q-7}{-1} = \frac{y_Q-11}{-3} = \frac{z_Q+2}{0} = s$, тј.

$x_Q = -s+7$, $y_Q = -3s+11$, $z_Q = -2$. Важи да $P_1(1,4,3) \in p$ јер је $\frac{1-1}{2} = \frac{4-4}{-3} = \frac{3-3}{1} = 0$.

Да би права ℓ секла праву p, праве LP_1, ℓ и p морају бити компланарне, односно $[\vec{LP_1}, \vec{u}_\ell, \vec{u}_p] = 0$.

$\vec{LP_1} = [P_1] - [L] = (1,4,3) - (2,-1,7) = (1-2, 4-(-1), 3-7) = (-1,5,-4)$

Означимо $\vec{u}_\ell = (a,b,c) \neq \vec{0}$

$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow \vec{u}_p = (2,-3,1)$

$$0 = [\vec{LP_1}, \vec{u}_\ell, \vec{u}_p] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ a & b & c \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 \cdot a \cdot (5\cdot 1 - (-3)\cdot(-4)) + (-1)^4 \cdot b \cdot (-1\cdot 1 - 2\cdot(-4)) + (-1)^5 \cdot c \cdot (-1\cdot(-3) - 2\cdot 5) = -a\cdot(5-12) + b(-1+8) - c(3-10) =$$

$$= -a\cdot(-7) + b\cdot 7 - c\cdot(-7) = 7a + 7b + 7c \Rightarrow a+b+c = 0$$

Важи да $Q_1(7,11,-2) \in q$ јер је $\frac{7-7}{-1} = \frac{11-11}{-3} = \frac{-2+2}{0} = 0$. Да би права ℓ секла праву q, праве LQ_1, ℓ и q морају бити компланарне, односно $[\vec{LQ_1}, \vec{u}_\ell, \vec{u}_q] = 0$.

$\vec{LQ_1} = [Q_1] - [L] = (7,11,-2) - (2,-1,7) = (7-2, 11-(-1), -2-7) = (5,12,-9)$

$q: \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0} \Rightarrow \vec{u}_q = (-1,-3,0)$

$$0 = [\vec{LQ_1}, \vec{u}_\ell, \vec{u}_q] = \begin{vmatrix} 5 & 12 & -9 \\ a & b & c \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 12 & -9 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot a \cdot (12\cdot 0 - (-3)\cdot(-9)) +$$

$$(-1)^4 \cdot b \cdot (5\cdot 0 - (-1)\cdot(-9)) + (-1)^5 \cdot c \cdot (5\cdot(-3) - (-1)\cdot 12) = -a\cdot(-27) + b\cdot(-9) - c\cdot(-15+12) = 27a - 9b + 3c$$

$a+b+c=0 \quad /\cdot(-3) \qquad -3a-3b-3c=0$

$27a-9b+3c=0 \quad \underline{\qquad\qquad} /\oplus$

$24a-12b=0 \quad /:12 \neq 0$

$2a-b=0$

$b=2a \rightsquigarrow c=-a-b=-a-2a=-3a$

$\vec{u}_l=(a,b,c)=(a,2a,-3a)=a\cdot(1,2,-3)$

$a\neq 0$ јер ако би $a=0$, онда би $\vec{u}_l=(0,0,0)$ ↯

Дакле, за вектор правца праве l се може узети вектор $(1,2,-3)$, а како права l садржи тачку $L(2,-1,7)$, то је њена једначина $l: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-7}{-3}$.

4.19. Кроз тачку $T(-3,1,2)$ одредити праву ℓ која је паралелна равни $\alpha: 4x-y+2z-5=0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Решење: $\ell \parallel \alpha \Rightarrow \vec{u}_\ell \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_\ell \circ \vec{n}_\alpha = 0$

Означимо вектор правца праве ℓ са $\vec{u}_\ell=(a,b,c)\neq\vec{0}$.

$\alpha: 4x-y+2z-5=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha=(4,-1,2)$ је вектор нормале равни α

$$(a,b,c)\circ(4,-1,2)=0$$
$$4a-b+2c=0$$

$p: \frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow \vec{u}_p=(0,2,-1)$ је вектор правца праве p, а тачка $P(-3,2,-1)$ је са ње јер је $\frac{-3+3}{0}=\frac{2-2}{2}=\frac{-1+1}{-1}=0$.

Како права ℓ сече праву p, то вектори $\vec{TP}$, $\vec{u}_\ell$ и $\vec{u}_p$ морају бити компланарни, тј. $[\vec{TP},\vec{u}_\ell,\vec{u}_p]=0$.

$$0=[\vec{TP},\vec{u}_\ell,\vec{u}_p]=\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ a & b & c\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot a\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot b\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot c\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=$$

$\vec{TP}=[P]-[T]=(-3,2,-1)-(-3,1,2)=(0,1,-3)$

$$=(-1)^3\cdot a\cdot(1\cdot(-1)-2\cdot(-3))+(-1)^4\cdot b\cdot(0\cdot(-1)-0\cdot(-3))+(-1)^5\cdot c\cdot(0\cdot2-0\cdot1)=$$

$$=-a\cdot(-1+6)+b\cdot(0+0)-c\cdot(0-0)=-5a \Rightarrow a=0 \rightsquigarrow 4a-b+2c=0$$

$$b=4a+2c=4\cdot0+2c=2c$$

$$\vec{u}_\ell=(a,b,c)=(0,2c,c)=c\cdot(0,2,1)$$

$c\neq0$ јер ако би $c=0$, онда би $\vec{u}_\ell=(0,0,0)$ $\lightning$

Дакле, за вектор правца праве ℓ се може узети вектор $(0,2,1)$, а како права ℓ садржи тачку T то је њена једначина $\ell: \frac{x+3}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$.

(4.20.) Одредити раван α која са равни $\gamma: x-4y-8z+12=0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву: а) $x+5y+z=0$, $x-z+4=0$ б) $p: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{-1}$.

Решење: $\alpha: ax+by+cz+d=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha=(a,b,c)$

Означимо са $\measuredangle(\alpha,\gamma)$ оштар угао између равни α и γ. Тада важи $\measuredangle(\alpha,\gamma)=\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma)$ или $\measuredangle(\alpha,\gamma)=\pi-\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma)$, те је $\cos\measuredangle(\alpha,\gamma)=\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma)$ или $\cos\measuredangle(\alpha,\gamma)=\cos(\pi-\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma))=-\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma)$, односно $\cos\measuredangle(\alpha,\gamma)=|\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma)|$.

$\gamma: x-4y-8z+12=0 \Rightarrow \vec{n}_\gamma=(1,-4,-8)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\measuredangle(\alpha,\gamma)=|\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\gamma)|=\frac{|\vec{n}_\alpha\circ\vec{n}_\gamma|}{\|\vec{n}_\alpha\|\cdot\|\vec{n}_\gamma\|}=\frac{|(a,b,c)\circ(1,-4,-8)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\frac{|a-4b-8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1+16+64}}=\frac{|a-4b-8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{81}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{9\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{\geq 0}=\underbrace{2\cdot|a-4b-8c|}_{\geq 0} \quad /^2 \quad \Rightarrow 81\cdot2\cdot(a^2+b^2+c^2)=4\cdot(a-4b-8c)^2 \Rightarrow (a-4b-8c)^2=\frac{81}{2}(a^2+b^2+c^2) \quad (1)$$

а) $p:$ $x+5y+z=0$

$x-z+4=0 \Rightarrow z=x+4$

$x=t \Rightarrow z=x+4=t+4$

$5y=-x-z=-t-t-4=-2t-4 \Rightarrow y=-\frac{2}{5}t-\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow p: \begin{array}{l} x=t \\ y=-\frac{2}{5}t-\frac{4}{5} \\ z=t+4 \end{array}$$

Уочавањем коефицијената који стоје испред t у изразима за x,y и z добијамо вектор правца праве p $(1,-\frac{2}{5},1)$, а можемо за $\vec{u}_p$ узети и $5\cdot(1,-\frac{2}{5},1)=(5,-2,5)$.

$p\subset\alpha \Rightarrow \vec{u}_p\perp\vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_p\circ\vec{n}_\alpha=0 \Rightarrow (5,-2,5)\circ(a,b,c)=0 \Rightarrow 5a-2b+5c=0 \Rightarrow 2b=5a+5c \Rightarrow b=\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c$ (2)

$P(0,-\frac{4}{5},4)\in p$ јер је за $t=0$ $x_P=0$, $y_P=-\frac{2}{5}\cdot0-\frac{4}{5}=-\frac{4}{5}$, $z_P=0+4=4$

$P\in p, p\subset\alpha \Rightarrow P\in\alpha \Rightarrow a\cdot0+b\cdot(-\frac{4}{5})+c\cdot4+d=0 \Rightarrow d=\frac{4}{5}b-4c$

Заменом (2) $b=\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c$ у (1) $(a-4b-8c)^2=\frac{81}{2}\cdot(a^2+b^2+c^2)$ добија се:

$$(a-4\cdot(\tfrac{5}{2}a+\tfrac{5}{2}c)-8c)^2=\frac{81}{2}\cdot(a^2+\frac{25}{4}(a+c)^2+c^2)$$

$$(a-10a-10c-8c)^2=\frac{81}{2}\cdot(a^2+\frac{25}{4}a^2+\frac{25}{2}ac+\frac{25}{4}c^2+c^2)$$

$$(-9a-18c)^2=\frac{81}{2}\cdot(\frac{29}{4}a^2+\frac{25}{2}ac+\frac{29}{4}c^2)$$

$$81(a+2c)^2=\frac{81}{2}\cdot\left(\frac{29}{4}a^2+\frac{25}{2}ac+\frac{29}{4}c^2\right) \quad /:81\neq 0$$

$$a^2+4ac+4c^2=\frac{29}{8}a^2+\frac{25}{4}ac+\frac{29}{8}c^2 \quad /\cdot 8\neq 0$$

$$8a^2+32ac+32c^2=29a^2+50ac+29c^2$$

$$29a^2-8a^2+50ac-32ac+29c^2-32c^2=0$$

$$21a^2+18ac-3c^2=0 \quad /:3\neq 0$$

$$7a^2+6ac-c^2=0$$

Ако би $c=0$, онда би било $7a^2+6\cdot a\cdot 0-0^2=0$ тј. $7a^2=0$, односно $a=0$, те би $b=\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c=\frac{5}{2}\cdot 0+\frac{5}{2}\cdot 0=0$ и $d=\frac{4}{5}b-4c=\frac{4}{5}\cdot 0-4\cdot 0=0-0=0$, али $0=0$ није једначина равни.

Ако је $c\neq 0$, онда можемо поделити $7a^2+6ac-c^2=0$ са $c^2\neq 0$.

$$7\cdot\frac{a^2}{c^2}+6\cdot\frac{ac}{c^2}-\frac{c^2}{c^2}=0$$

$$7\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^2+6\cdot\frac{a}{c}-1=0$$

Уведимо смену $s=\frac{a}{c}$.

$$7\cdot s^2+6\cdot s-1=0$$

$$D=(+6)^2-4\cdot 7\cdot(-1)=36+28=64=8^2$$

$$s_{1,2}=\frac{-(+6)\pm\sqrt{8^2}}{2\cdot 7}=\frac{-6\pm 8}{14}$$

$$s_1=\frac{-6-8}{14}=\frac{-14}{14}=-1 \qquad s_2=\frac{-6+8}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$$

1° случај $s=-1 \Rightarrow \frac{a}{c}=-1 \Rightarrow a=-c$

$$b=\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c=-\frac{5}{2}c+\frac{5}{2}c=0$$

$$d=\frac{4}{5}b-4c=\frac{4}{5}\cdot 0-4\cdot c=-4c$$

$\alpha_1:\ ax+by+cz+d=0$

$-cx+0\cdot y+cz-4c=0 \quad /:c\neq 0$

$-x+z-4=0$

2° случај $s=\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{7} \Rightarrow c=7a$

$$b=\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c=\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}\cdot 7a=\frac{5}{2}a+\frac{35}{2}a=\frac{40}{2}a=20a$$

$$d=\frac{4}{5}b-4c=\frac{4}{5}\cdot 20a-4\cdot 7a=16a-28a=-12a$$

$\alpha_2:\ ax+by+cz+d=0$

$ax+20ay+7az-12a=0 \quad /:a\neq 0$ јер ако је $a=0$ било би $b=c=d=0$, а $0=0$ није једначина равни

$x+20y+7z-12=0$

Тражене једначине равни су $-x+z-4=0$ и $x+20y+7z-12=0$.

б)

$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{u}_p = (1,0,-1)$

$p \subset \alpha \Rightarrow \vec{u}_p \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_p \circ \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (1,0,-1)\circ(a,b,c)=0 \Rightarrow 1\cdot a + 0\cdot b + (-1)\cdot c = 0$

$a - c = 0$

$a = c \quad (3)$

$P(1,2,0) \in p$ јер је $\frac{1-1}{1} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{-1} = 0$, $p \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha \Rightarrow a\cdot 1 + b\cdot 2 + c\cdot 0 + d = 0$

$a + 2b + d = 0$

$d = -a - 2b$

Заменом (3) $a=c$ у (1) $(a-4b-8c)^2 = \frac{81}{2}(a^2+b^2+c^2)$ добија се

$$(c-4b-8c)^2 = \frac{81}{2}\cdot(c^2+b^2+c^2)$$
$$(-4b-7c)^2 = \frac{81}{2}\cdot(b^2+2c^2)$$
$$(4b+7c)^2 = \frac{81}{2}b^2 + 81c^2$$
$$16b^2 + 56bc + 49c^2 = \frac{81}{2}b^2 + 81c^2$$
$$\frac{81}{2}b^2 - 16b^2 - 56bc + 81c^2 - 49c^2 = 0$$
$$\frac{81-32}{2}b^2 - 56bc + 32c^2 = 0$$
$$\frac{49}{2}b^2 - 56bc + 32c^2 = 0 \quad /\cdot 2$$
$$49b^2 - 112bc + 64c^2 = 0$$

Ако би $c=0$, онда би $49b^2 - 112\cdot b\cdot 0 + 64\cdot 0^2 = 0$, тј. $49b^2=0$, тј. $b=0$, а и $a=c=0$, као и $d=-a-2b=$ $=-0-2\cdot 0=0$, али $0=0$ није једначина равни.

$\Rightarrow c \neq 0 \qquad 49b^2 - 112bc + 64c^2 = 0 \quad /: c^2 \neq 0$

$$49\cdot\frac{b^2}{c^2} - 112\cdot\frac{bc}{c^2} + 64\frac{c^2}{c^2} = 0$$
$$49\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 112\cdot\frac{b}{c} + 64 = 0$$

Уведимо смену $s = \frac{b}{c}$

$$49s^2 - 112s + 64 = 0$$
$$\Delta = (-112)^2 - 4\cdot 49\cdot 64 = 112^2 - (2\cdot 7\cdot 8)^2 = 112^2 - 112^2 = 0$$
$$s_1 = s_2 = \frac{-(-112)}{2\cdot 49} = \frac{\cancel{2}\cdot 56}{\cancel{2}\cdot 49} = \frac{7\cdot 8}{7\cdot 7} = \frac{8}{7}$$

$\frac{b}{c} = \frac{8}{7} \Rightarrow b = \frac{8}{7}c$

$a = c$

$d = -a - 2b = -c - 2 \cdot \frac{8}{7}c = -c - \frac{16}{7}c = -\frac{23}{7}c$

$\alpha:\ ax + by + cz + d = 0$

$cx + \frac{8}{7}cy + cz - \frac{23}{7}c = 0 \quad / : c \neq 0$

$x + \frac{8}{7}y + z - \frac{23}{7} = 0 \quad / \cdot 7 \neq 0$

$7x + 8y + 7z - 23 = 0$

Тражена раван је: $7x + 8y + 7z - 23 = 0$.