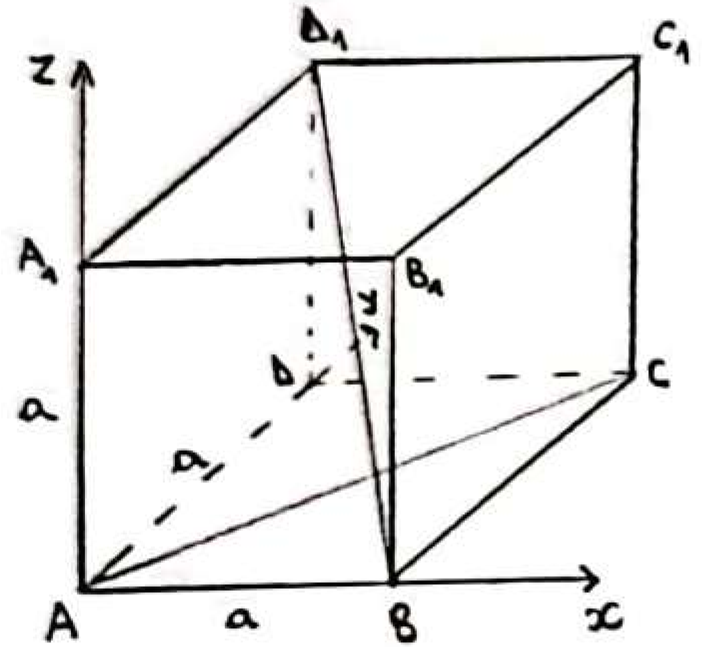
3.7) Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице a. Одредити а) угао између мимоилазних правих AC и BD_1; б) растојање између правих AC и BD_1; в) угао између праве AC и равни $\alpha = BCD_1$.

Решење:



Посматрајмо ортонормирани репер $Axyz$ такав да су тачке B, D и A_1, редом на позитивном делу x-осе, y-осе и z-осе.

Тада су $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $D(0,a,0)$ и $A_1(0,0,a)$ координате ових тачака. Важи и $C(a,a,0)$, $D_1(0,a,a)$.

а) $\overrightarrow{AC} = [C]-[A] = (a,a,0)-(0,0,0) = (a,a,0)$

$\overrightarrow{BD_1} = [D_1]-[B] = (0,a,a)-(a,0,0) = (-a,a,a)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1} = (a,a,0)\cdot(-a,a,a) = -\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+0 = 0 \\ \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{a^2+a^2+0^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \neq 0 \\ \|\overrightarrow{BD_1}\| = \sqrt{(-a)^2+a^2+a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}) = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD_1$$

Тражени угао између мимоилазних правих AC и BD_1 је 90°.

б) Растојање између правих AC и BD_1 може се израчунати по формули $d(AC,BD_1) = \dfrac{|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AB}]|}{\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD_1}\|}$.

$\overrightarrow{AC} = [C]-[A] = (a,a,0)-(0,0,0) = (a,a,0)$ $\quad$ $\overrightarrow{BD_1} = [D_1]-[B] = (0,a,a)-(a,0,0) = (-a,a,a)$

$$\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD_1}\| = \left\|\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix}\right\| = \left\|(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix}\vec{e}_1 + (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a & 0 \\ -a & a \end{vmatrix}\vec{e}_2 + (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a & a \\ -a & a \end{vmatrix}\vec{e}_3\right\| = \|1\cdot(a\cdot a - a\cdot 0)\vec{e}_1 + (-1)\cdot(a\cdot a-(-a)\cdot 0)\vec{e}_2$$

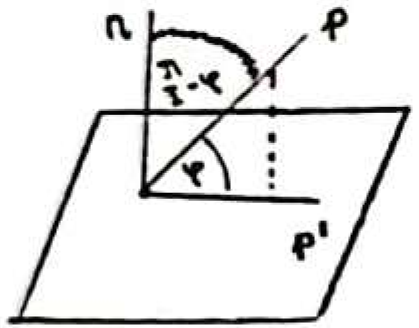
$$+1\cdot(a\cdot a-(-a)\cdot a)\vec{e}_3\| = \|a^2\vec{e}_1 - a^2\vec{e}_2 + 2a^2\vec{e}_3\| = \sqrt{(a^2)^2+(-a^2)^2+(2a^2)^2} = \sqrt{a^4+a^4+4a^4} = \sqrt{6a^4} = a^2\sqrt{6}$$

$$|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AB}]| \underset{\uparrow}{=} \left|\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = \left|(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix}\cdot a + 0 + 0\right| = |(a\cdot a - a\cdot 0)\cdot a| = |a^2\cdot a| = |a^3| = a^3$$

$\overrightarrow{AB} = [B]-[A] = (a,0,0)-(0,0,0) = (a,0,0)$

Растојање између правих AC и BD_1 је $\dfrac{|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AB}]|}{\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD_1}\|} = \dfrac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

в) Угао φ између праве и равни је, по дефиницији, угао између праве и њене нормалне пројекције на ту раван. Ако у тачки продора посматране праве и равни уочимо нормалу на ту раван, онда је угао између посматране праве и нормале једнак $\frac{\pi}{2}-\varphi$.



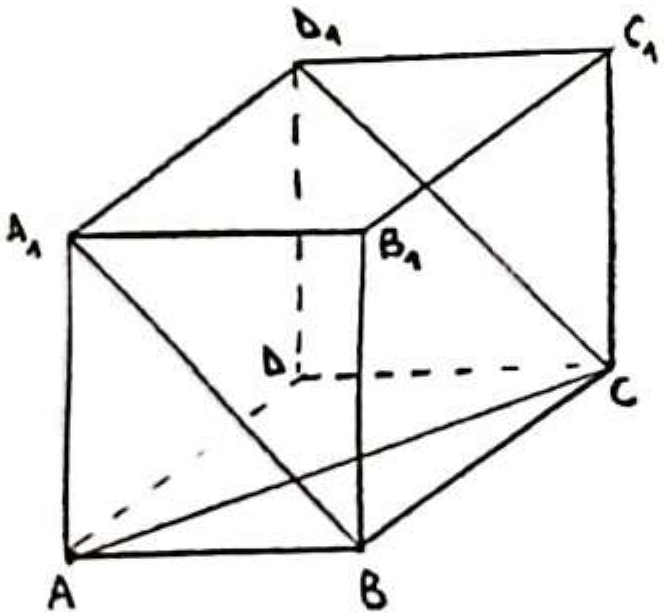
Како су вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BA_1}$ линеарно независни, то по дефиницији векторског производа следи да је $\vec{BC}\times\vec{BA_1}$ нормалан на равни BCD_1A_1 коју разапињу вектори $\vec{BC}$ и $\vec{BA_1}$.

$$\vec{BC}=[C]-[B]=(a,a,0)-(a,0,0)=(0,a,0)$$

$$\vec{BA_1}=[A_1]-[B]=(0,0,a)-(a,0,0)=(-a,0,a)$$

$$\vec{BC}\times\vec{BA_1}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 0 & a & 0\\ -a & 0 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{vmatrix}\vec{e_1}-\begin{vmatrix}0 & 0\\ -a & a\end{vmatrix}\vec{e_2}+\begin{vmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{vmatrix}\vec{e_3}=(a\cdot a-0\cdot 0)\vec{e_1}-(0\cdot a-(-a)\cdot 0)\vec{e_2}$$

$$+(0\cdot 0-(-a)\cdot a)\vec{e_3}=a^2\vec{e_1}+a^2\vec{e_3}=(a^2,0,a^2)$$



$$\vec{AC}=[C]-[A]=(a,a,0)-(0,0,0)=(a,a,0)$$

φ – угао између праве AC и равни BCD_1

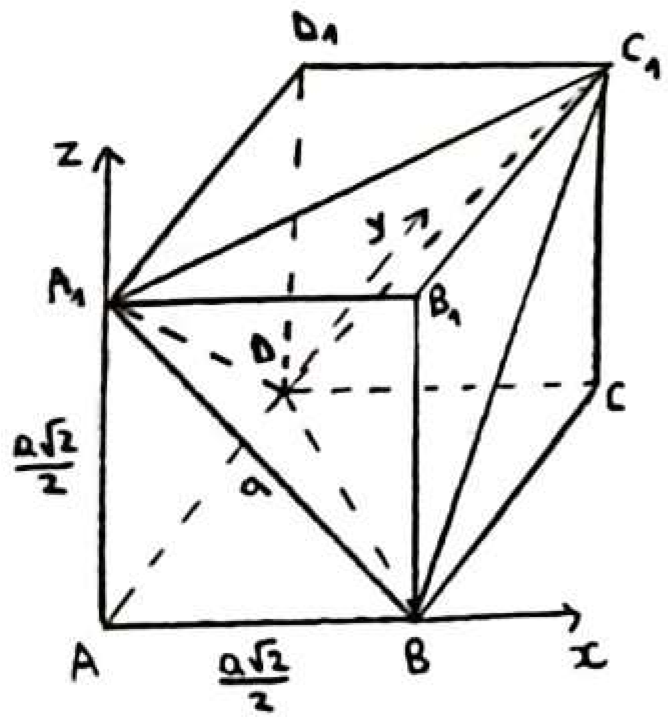
$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{(\vec{BC}\times\vec{BA_1})\cdot\vec{AC}}{\|\vec{BC}\times\vec{BA_1}\|\,\|\vec{AC}\|}=\frac{(a^2,0,a^2)\cdot(a,a,0)}{\sqrt{(a^2)^2+0^2+(a^2)^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+0^2}}=\frac{a^3+0+0}{\sqrt{2a^4}\cdot\sqrt{2a^2}}=\frac{a^3}{2a^3}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}=30^\circ$$

Угао између праве AC и равни $\alpha=BCD_1$ износи $\frac{\pi}{6}$.

3.8. У погодно одабраном ортонормираном реперу одредити координате темена а) правилног тетраедра ивице a; б) правилног октаедра ивице a.

Решење: а) Пљосни правилног тетраедра су једнакостранични троуглови, те није погодно бирати координатни систем код кога би координатни почетак било неко теме тетраедра, а једна од оса била у смеру ивице тетраедра јер остале две осе не би биле у смеру осталих ивица тетраедра. С друге стране, темена коцке имају погодне координате у координатном систему чији је координатни почетак неко теме коцке, а осе су у смеру ивица коцке које полазе из тог темена. Зато је циљ наћи четири темена коцке таква да она представљају и темена правилног тетраедра да бисмо у координатном систему коцке изразили координате темена тог тетраедра.

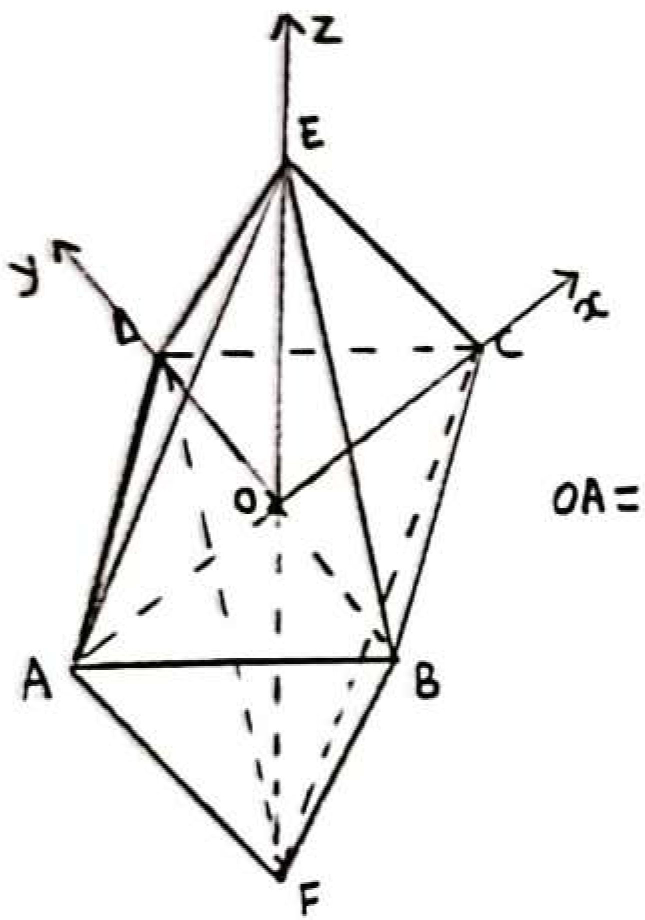


Приметимо да је A_1BC_1D правилни тетраедар чија су темена уједно и темена коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

$A_1B = BC_1 = A_1C_1 = BD = C_1D = A_1D$ као дијагонале подударних квадрата који чине пљосни коцке и да би њихова дужина била a, ивица коцке треба бити $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Посматрајмо ортонормиран репер $Axyz$, такав да тачке B, D и A_1 редом припадају позитивном делу x-осе, y-осе и z-осе.

$A_1\left(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},0,0\right)$, $C_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(0,\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right)$ су тражене координате темена правилног тетраедра ивице a у погодно одабраном ортонормираном реперу $Axyz$.

б) Правилни октаедар је тело ограничено омотачима двеју правилних четвоространих пирамида (основа правилне четворостране пирамиде је квадрат, а подножје висине из врха пирамиде се поклапа са центром тог квадрата), које имају заједничку основу и бочна ивица једнака је основној ивици.



Како су дијагонале AC и BD квадрата $ABCD$ међусобно нормалне и подножја висина обе пирамиде чији омотачи ограничавају правилни октаедар се поклапају са пресечном тачком O тих дијагонала AC и BD, погодно је одабрати координатни систем $Oxyz$ коме је координатни почетак центар O квадрата $ABCD$ и тачке C, D и E припадају редом позитивном делу x-осе, y-осе и z-осе.

$$AB = BC = CD = AD = EA = EB = EC = ED = FA = FB = FC = FD = d$$

$OA = OB = OC = OD = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ као половине дијагонала квадрата $ABCD$ странице d

$\Rightarrow A\left(-\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $D\left(0, \frac{d\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ су координате 4 темена октаедра

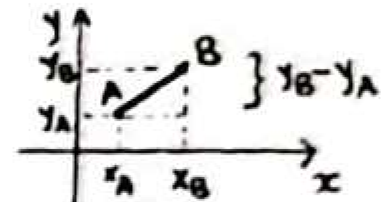
Применимо Питагорину теорему на правоугли троугао AOE ($EO \perp (ABCD)$ те је $EO \perp AO$).

$OE = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{d^2 - \frac{2d^2}{4}} = \sqrt{\frac{2d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow E\left(0, 0, \frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$ и $F\left(0, 0, -\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$ су координате преостала два темена правилног октаедра

Тачка, права и раван

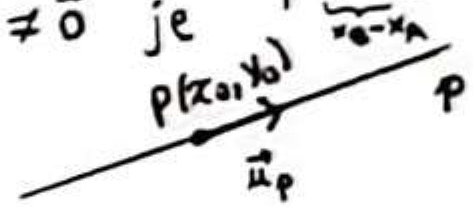
• Аналитичка геометрија равни

- имамо само x, y координате. Растојање тачака $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ је $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.



- Једначина праве у равни која садржи тачку $P(x_0, y_0)$ и има вектор правца праве $\vec{u}_p = (a, b) \neq \vec{0}$ је

$$p: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \ (=t) \qquad (*)$$



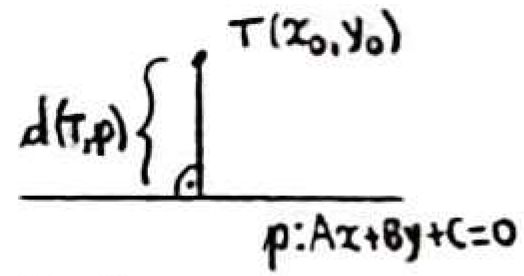
Параметарске једначине ове праве су $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$.

Сређивањем $(*)$ тј. унакрсним множењем добија се

$$b(x-x_0) = a(y-y_0)$$
$$bx - bx_0 = ay - ay_0$$
$$bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$$
$$bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$$

Општи облик је $Ax + By + C = 0$, где је (A,B) вектор нормале праве p (јер је $(A,B) = (b,-a)$, те је $(A,B)\cdot(a,b) = (b,-a)\cdot(a,b) = b\cdot a - a\cdot b = 0$).

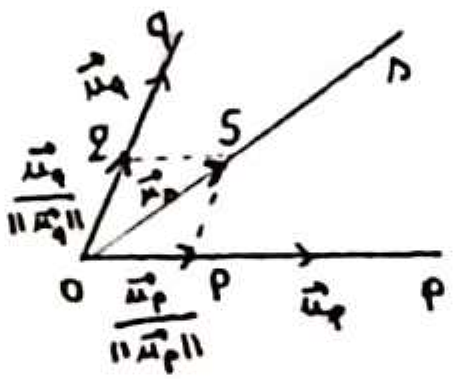
- Растојање тачке $T(x_0,y_0)$ од праве $p: Ax+By+C=0$ је $d(T,p) = \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.



- Једначина кружнице са центром $C(x_0,y_0)$ и полупречником r у равни је $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Услов да је права t тангента ове кружнице је да је $d(C,t) = r$.

- Вектор правца симетрале $\measuredangle pOq$ је $\vec{u}_s = \dfrac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} + \dfrac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|}$ (јер је четвороугао $OPSQ$ ромб,

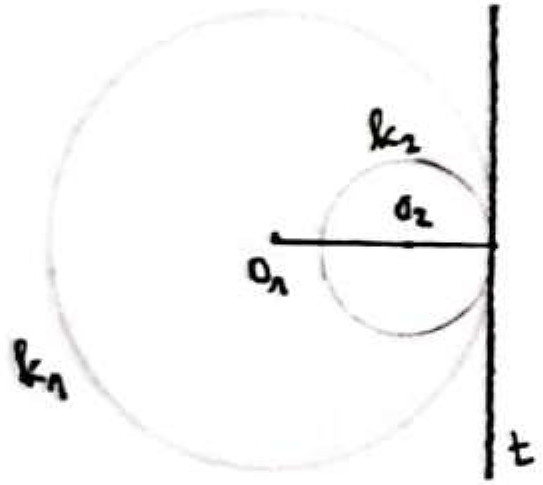


а дијагонала OS тог ромба представља симетралу $\measuredangle POQ = \measuredangle pOq$).

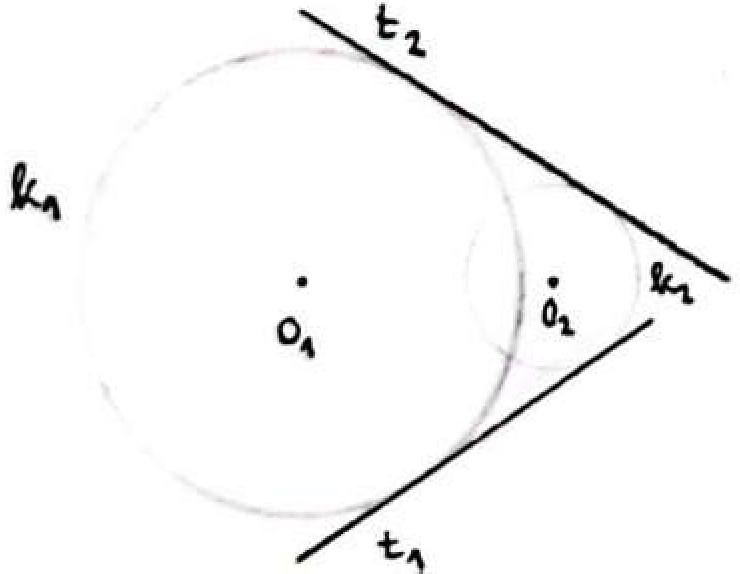
- Заједничке тангенте кругова $k_1: (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$ са центром $O_1(x_1,y_1)$ и полупречника r_1 и $k_2: (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$ са центром $O_2(x_2,y_2)$ и полупречника r_2.

Ако је $O_1O_2 < |r_1-r_2|$, кругови k_1 и k_2 немају заједничких тангенти (један круг је унутар другог).

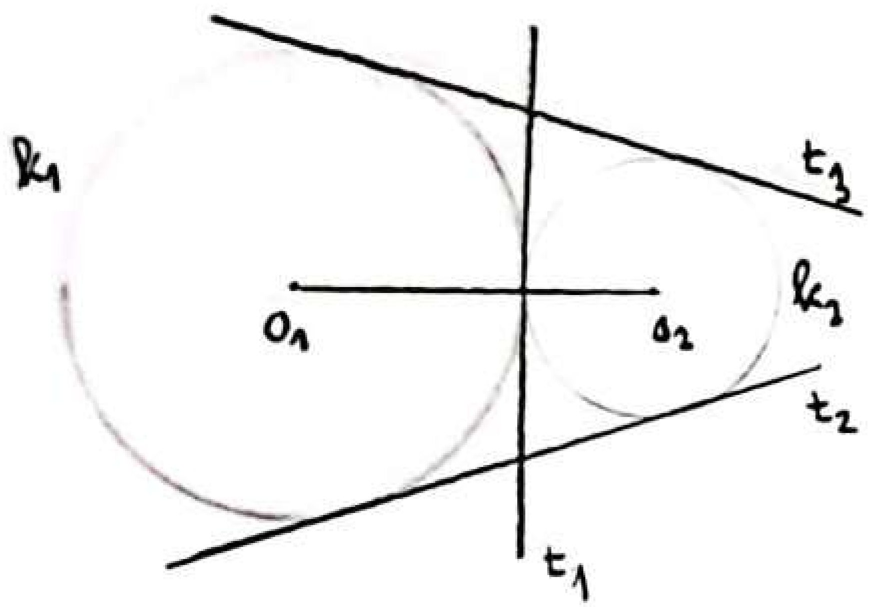
Ако је $O_1O_2 = |r_1-r_2|$, кругови k_1 и k_2 имају једну заједничку спољашњу тангенту (ти кругови се додирују изнутра).



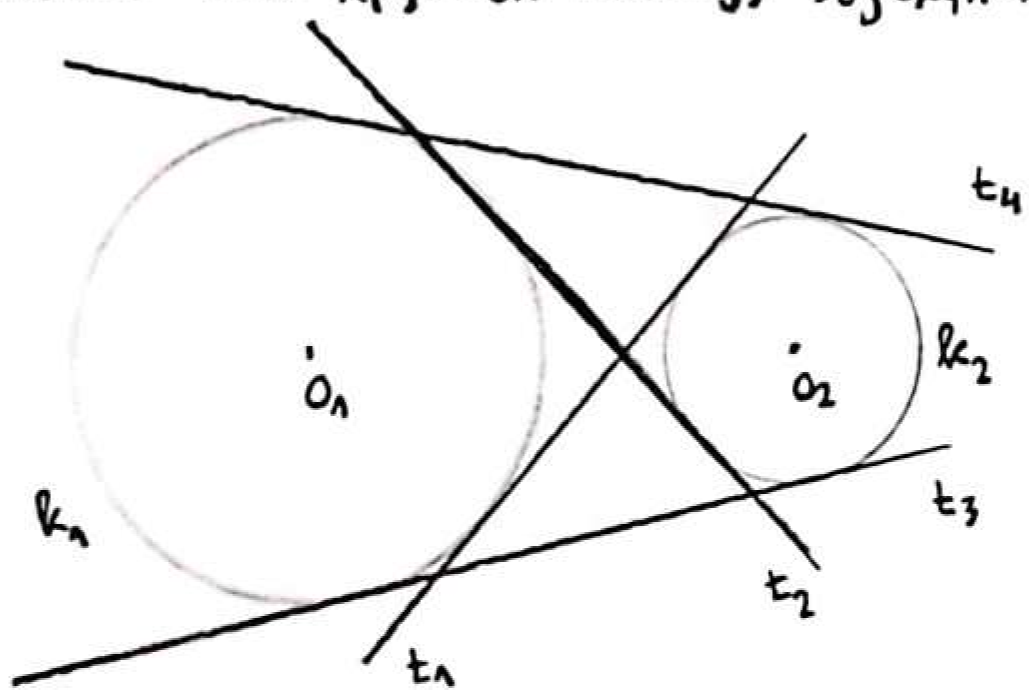
Ако је $|r_1-r_2| < O_1O_2 < r_1+r_2$, кругови k_1 и k_2 имају две заједничке спољашње тангенте (ти кругови се секу).



Ако је $O_1O_2 = r_1 + r_2$, кругови k_1 и k_2 имају једну заједничку унутрашњу и две заједничке спољашње тангенте (ти кругови се додирују споља).



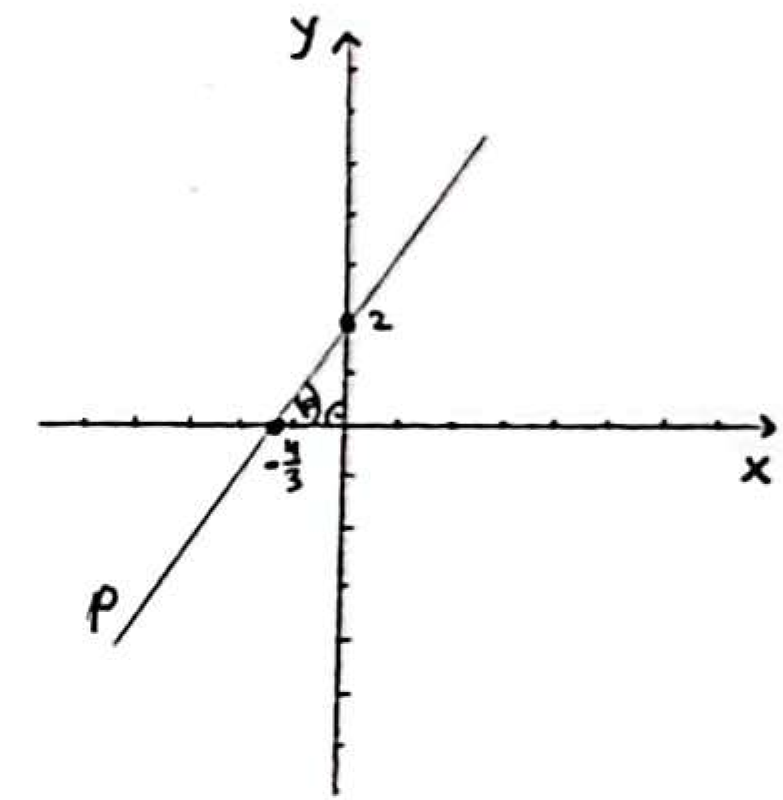
Ако је $O_1O_2 > r_1 + r_2$, кругови k_1 и k_2 имају две заједничке унутрашње и две заједничке спољашње тангенте (ти кругови немају заједничких тачака).



4. Тачка, права и раван

(4.1.) Одредити углове које права $p: 3x-2y+4=0$ гради са координатним осама.

Решење: $p:\ 3x-2y+4=0$



I НАЧИН: $2y = 3x+4 \quad /:2\neq 0$

$y = \frac{3}{2}x+2$

x	0	$-\frac{4}{3}$
y	2	0

$\frac{3}{2}x+2=0 \quad \frac{3}{2}x=-2 \quad 3x=-4 \quad x=-\frac{4}{3}$

$k=\frac{3}{2}$ је коефицијент правца праве p и он је једнак $tg\varphi$ где је φ угао који права p заклапа са позитивним делом x-осе.

$tg\varphi = k = \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{3}{2}$

Права p са x-осом гради угао од $arctg\frac{3}{2}$, а са y-осом угао $\frac{\pi}{2} - arctg\frac{3}{2} = arcctg\frac{3}{2} = arctg\frac{2}{3}$.

II НАЧИН: Права $p: 3x-2y+4=0$ има вектор нормале $\vec{n}_p=(3,-2)$, те је $\vec{u}_p=(2,3)$ један од вектора праваца праве p јер је $(3,-2)\cdot(2,3)=3\cdot 2+(-2)\cdot 3=6-6=0$.

потребан нам је оштар $\measuredangle(p, x\text{-осе})$

$\vec{e}_1=(1,0)$ је један од вектора праваца x-осе $\Rightarrow \cos\measuredangle(p, x\text{-осе}) = \frac{|\vec{u}_p\cdot\vec{e}_1|}{\|\vec{u}_p\|\cdot\|\vec{e}_1\|} = \frac{|(2,3)\cdot(1,0)|}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{|2\cdot 1+3\cdot 0|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{1+0}} =$

$= \frac{|2+0|}{\sqrt{13}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \measuredangle(p, x\text{-осе}) = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\vec{e}_2=(0,1)$ је један вектор правца y-осе $\Rightarrow \cos\measuredangle(p, y\text{-осе}) = \frac{|\vec{u}_p\cdot\vec{e}_2|}{\|\vec{u}_p\|\cdot\|\vec{e}_2\|} = \frac{|(2,3)\cdot(0,1)|}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|2\cdot 0+3\cdot 1|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{1}} = \frac{|3|}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

потребан нам је оштар $\measuredangle(p, y\text{-осе})$

$\Rightarrow \measuredangle(p, y\text{-осе}) = \arccos\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

4.2. Одредити једначину праве n која је нормална на праву $p: 2x+3y-4=0$ и која садржи пресек правих $x+y+1=0$ и $x-y=0$.

<u>Решење</u>:

$q: x+y+1=0$

x	0	-1
y	-1	0

$y=-x-1$

$r: x-y=0$

$y=x$

x	0	1
y	0	1

$\{N\}=q\cap r$

Нека је $N(x_N,y_N)$.

$$\left.\begin{array}{l} N\in q \Rightarrow y_N=-x_N-1 \\ N\in r \Rightarrow y_N=x_N \end{array}\right\}$$

$$x_N=-x_N-1$$
$$x_N+x_N=-1$$
$$2x_N=-1$$
$$x_N=-\frac{1}{2}$$
$$y_N=x_N=-\frac{1}{2}$$
$$N\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$p: 2x+3y-4=0$

$3y=-2x+4$

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

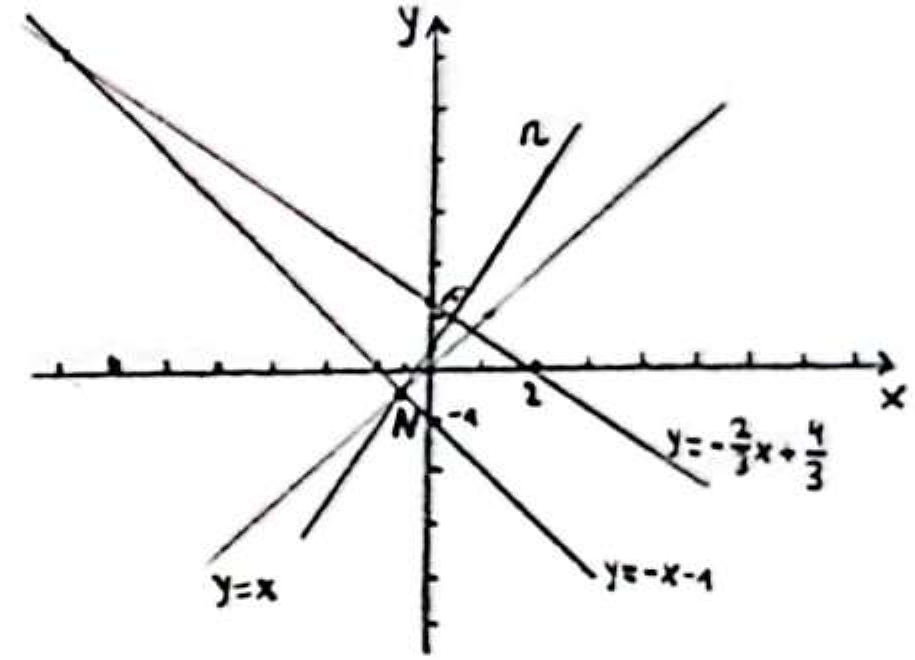
x	0	2
y	$\frac{4}{3}$	0

$k_p=-\frac{2}{3}$

$n\perp p \Rightarrow k_n\cdot k_p=-1$

$k_n\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$

$k_n=\frac{-1}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$



$n: y-y_N=k_n(x-x_N)$ ← једначина праве чији је коефицијент правца k_n и која садржи тачку $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$y+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$
$$y+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$
$$y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{3}{2}x+\frac{3-2}{4}$$
$$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

x	0	$-\frac{1}{6}$
y	$\frac{1}{4}$	0

Тражена једначина праве n је $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$.

<u>Напомена</u>: До једначине праве n се могло доћи и коришћењем чињенице $n\perp p \Rightarrow \vec{n}_n \perp \vec{n}_p=(2,3)$, а како је $\vec{n}_n\perp\vec{u}_n$, то је могуће узети вектор $\vec{n}_p$ за вектор правца праве n која садржи тачку $N\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, те је једначина праве n: $\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}$ тј. $n: \frac{x+\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+\frac{1}{2}}{3}$.

(4.3.) Праве $p: y=x-2$ и $q: y=3$ разлажу раван на четири угла. а) Одредити једначине обе симетрале тих углова. б) Без цртања, у сваком од четири угла одредити по једну тачку A_1, A_2, A_3, A_4. в) Одредити која од тачака A_i је у истом углу као тачка $M(1,4)$. Проверити цртањем.

Решење: а) $\{T\} = p \cap q$

Нека је $T(x_T, y_T)$.

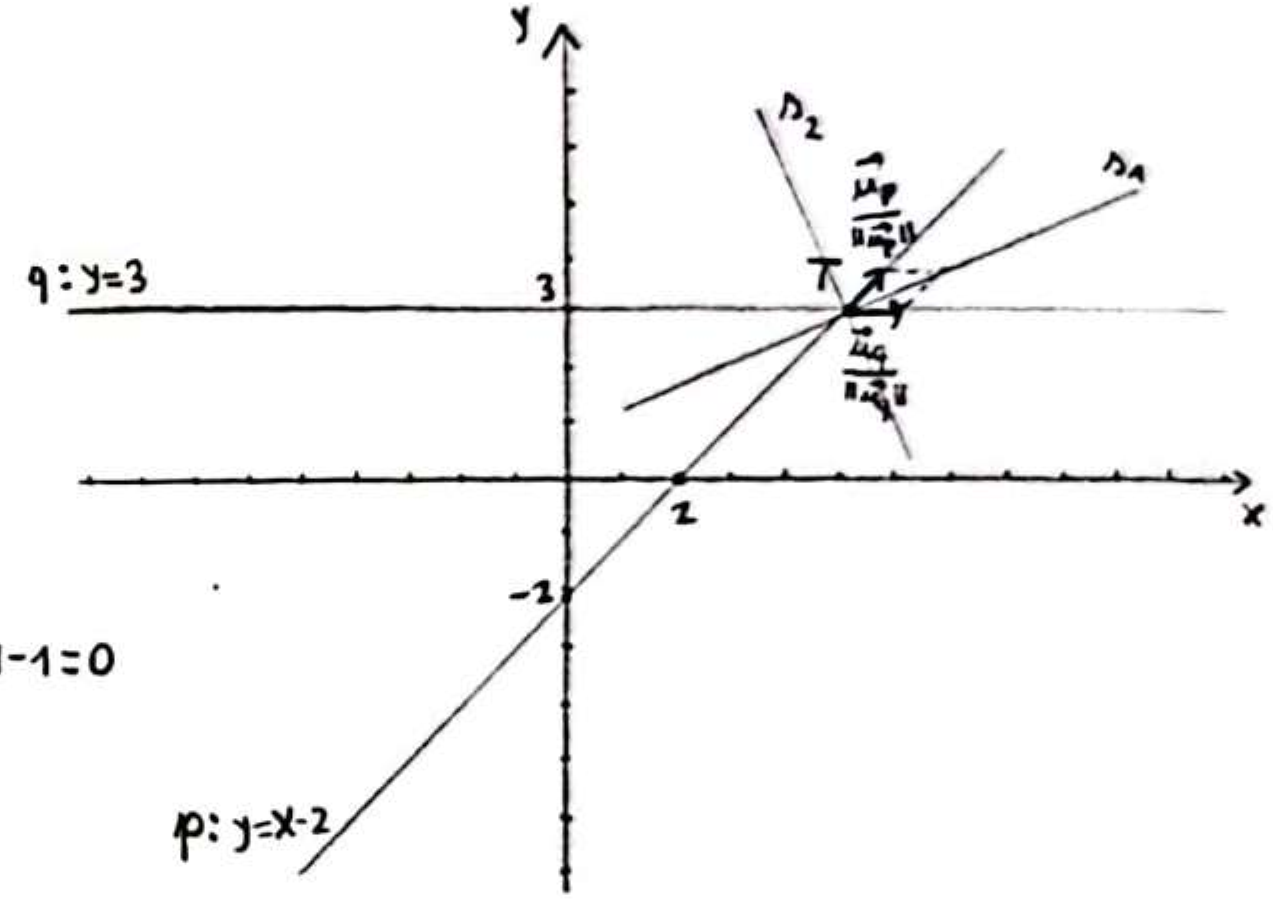
$T \in p: \; y_T = x_T - 2$

$T \in q: \; y_T = 3$

$3 = x_T - 2$

$x_T = 3+2 = 5$

$\Rightarrow T(5,3)$



$p: y = x-2 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_p = (1,-1) \Rightarrow \vec{u}_p = (1,1)$ је један вектор

$x-y-2=0$ правца праве p јер је $(1,-1)\cdot(1,1) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 1-1 = 0$

$q: y = 3$

$0\cdot x + 1\cdot y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_q = (0,1) \Rightarrow \vec{u}_q = (1,0)$ је један вектор правца праве q јер је $(0,1)\cdot(1,0) = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0+0 = 0$

Један вектор правца праве s_1 која представља симетралу угла qTp је $\vec{u}_{s_1} = \frac{\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|} + \frac{\vec{u}_q}{\|\vec{u}_q\|} =$

$= \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} + \frac{(1,0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} + \frac{(1,0)}{\sqrt{1}} = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) + (1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt2}+1, \frac{1}{\sqrt2}\right) = \left(\frac{\sqrt2}{2}+1, \frac{\sqrt2}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt2+2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right).$

Дакле, права s_1 садржи тачку $T(5,3)$ и има вектор правца $\vec{u}_{s_1} = \left(\frac{\sqrt2+2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$, те је

$s_1: \frac{x-5}{\frac{\sqrt2+2}{2}} = \frac{y-3}{\frac{\sqrt2}{2}}$ једначина једне симетрале тј. $s_1: \frac{x-5}{\sqrt2+2} = \frac{y-3}{\sqrt2}$, тј. $s_1: \frac{x-5}{1+\sqrt2} = \frac{y-3}{1}$.

Како су симетрале суплементних углова међусобно нормалне, то је $\vec{u}_{s_2} = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2+2}{2}\right)$ један вектор правца друге симетрале s_2 јер је $\left(-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt2+2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right) = -\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2+2}{2} + \frac{\sqrt2+2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} = 0$, а важи и да $T \in s_2$, те је $s_2: \frac{x-5}{-\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{y-3}{\frac{\sqrt2+2}{2}}$ тј. $s_2: \frac{x-5}{-\sqrt2} = \frac{y-3}{\sqrt2+2}$ тј. $s_2: \frac{x-5}{-1} = \frac{y-3}{1+\sqrt2}$.

б) Права $Ax+By+C=0$ дели раван на две полуравни које су дате са $Ax+By+C<0$ и са $Ax+By+C>0$. Која од те две полуравни је са које стране праве $Ax+By+C=0$ одређујемо користећи чињеницу да тачка $T(x_0,y_0)$ припада полуравни $Ax+By+C<0$ ако и само ако је $Ax_0+By_0+C<0$.

$A_1(7,4)$ $y_{A_1}=4>3$

$y_{A_1}=4<5=7-2=x_{A_1}-2$

$A_2(7,1)$ $y_{A_2}=1<3$

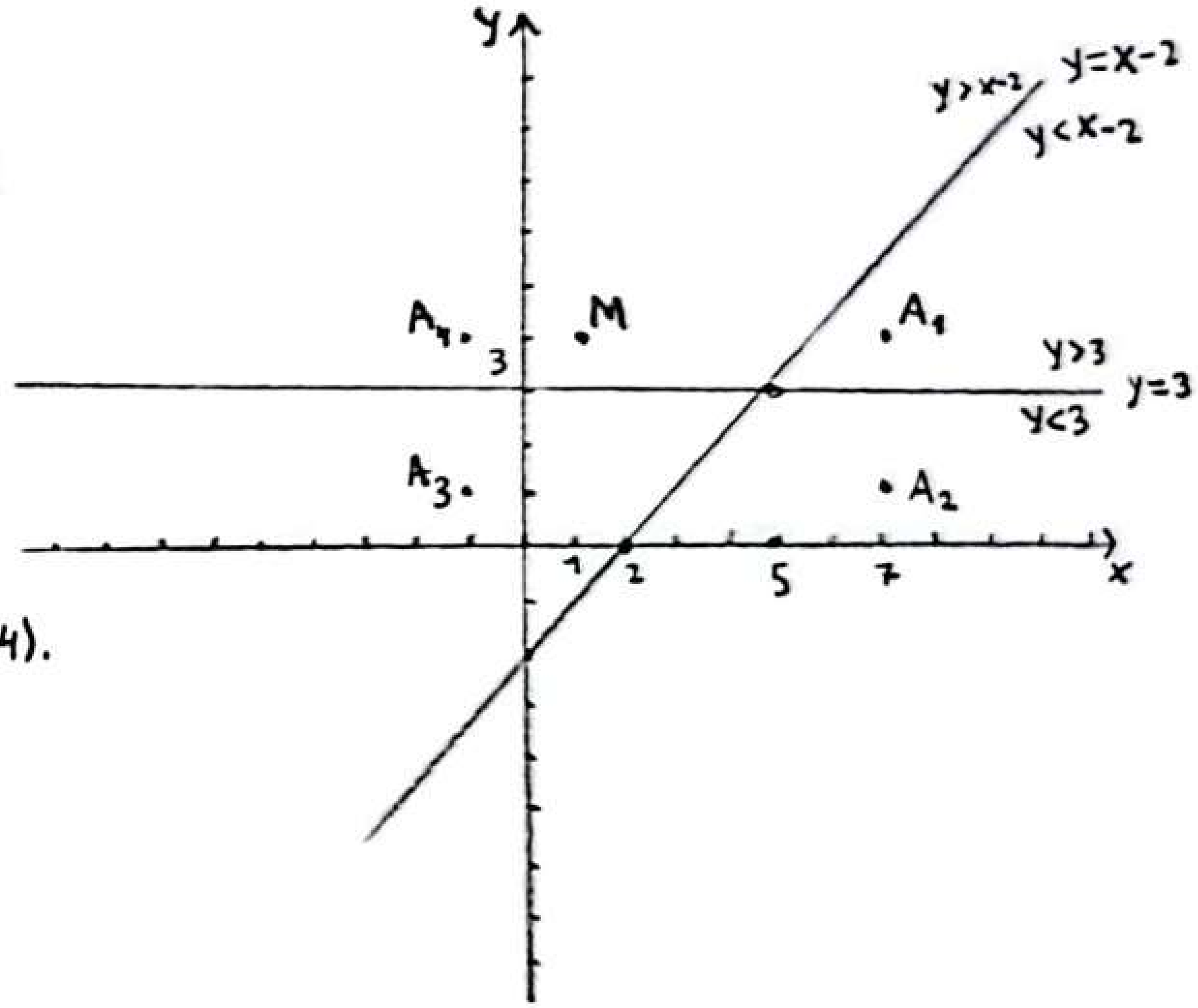
$y_{A_2}=1<5=7-2=x_{A_2}-2$

$A_3(-1,1)$ $y_{A_3}=1<3$

$y_{A_3}=1>-1-2=-3=x_{A_3}-2$

$A_4(-1,4)$ $y_{A_4}=4>3$

$y_{A_4}=4>-3=-1-2=x_{A_4}-2$



Тражене тачке могу бити $A_1(7,4)$, $A_2(7,1)$, $A_3(-1,1)$ и $A_4(-1,4)$.

в) $M(1,4)$

$y_M=4>3$

$y_M=4>-1=1-2=x_M-2$

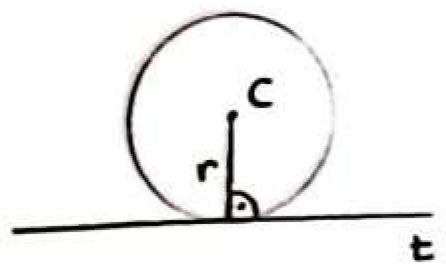
Како је и за тачку A_4 важило $y_{A_4}=4>3$ и $y_{A_4}=4>-3=-1-2=x_{A_4}-2$, то је тачка A_4 у истом углу као тачка $M(1,4)$.

(4.4) Одредити једначине тангенти из тачке $M(1,2)$ на круг $k: (x-1)^2+(y-7)^2=9$.

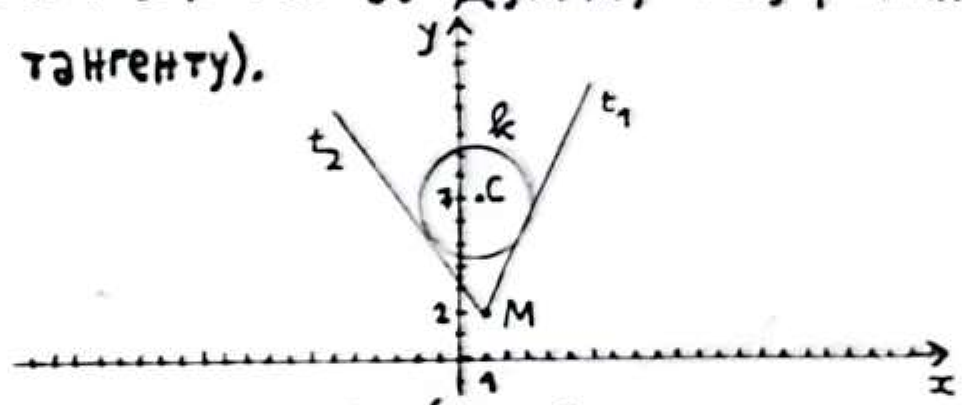
Решење: Једначина тангенте која садржи тачку $M(1,2)$ је $t: \frac{x-1}{a}=\frac{y-2}{b}$ при чему, без умањења општости, можемо претпоставити да је вектор правца $\vec{u}_t=(a,b)$ тангенте t јединични, односно да је $a^2+b^2=1$.

$$t: \quad b(x-1)=a(y-2)$$
$$bx-b=ay-2a$$
$$bx-ay-b+2a=0$$

Да би права t била тангента круга k, центар круга k мора бити удаљен за дужину полупречника тог круга од праве t (јер је додирни полупречник нормалан на тангенту).



$d(C,t)=r$



Центар круга $k: (x-1)^2+(y-7)^2=9=3^2$ је тачка $C(1,7)$, а полупречник му је $r=3$ (јер је општа једначина круга $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ где је $C(x_0,y_0)$ центар тог круга, а r је полупречник).

$$d(C,t)=r$$
$$\frac{|b\cdot 1-a\cdot 7-b+2a|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=3 \Rightarrow \frac{|-5a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \underset{a^2+b^2=1}{\Rightarrow} \frac{|5a|}{\sqrt{1}}=3 \Rightarrow |5a|=3 \Rightarrow 5|a|=3 \Rightarrow |a|=\frac{3}{5} \begin{cases} a=-\frac{3}{5} \\ a=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$|b|=\sqrt{b^2}=\sqrt{1-a^2}=\sqrt{1-|a|^2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5} \begin{cases} b=-\frac{4}{5} \\ b=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Приметимо да су вектори $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ истог правца, а супротног смера, те је за писање једначине прве тангенте довољно посматрати само вектор $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, те је $t_1: \frac{x-1}{\frac{3}{5}}=\frac{y-2}{\frac{4}{5}}$ тј. $t_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$.

Приметимо да су вектори $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ истог правца, а супротног смера, те је за писање једначине друге тангенте довољно посматрати само вектор $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$, те је $t_2: \frac{x-1}{\frac{3}{5}}=\frac{y-2}{-\frac{4}{5}}$ тј. $t_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}$.

4.5. Дати су кругови $k_1: (x-7)^2+(y-3)^2=r_1^2$ и $k_2: (x-17)^2+(y-3)^2=81$. а) У зависности од полупречника $r_1>0$ дискутовати број заједничких тангенти ових кругова. б) За $r_1=3$ одредити једначине заједничких тангенти ових кругова.

Решење: Круг $k_1: (x-7)^2+(y-3)^2=r_1^2$ има центар $O_1(7,3)$ и полупречник r_1, док круг $k_2: (x-17)^2+(y-3)^2=81=9^2$ има центар $O_2(17,3)$ и полупречник $r_2=9$.

а) Да бисмо одредили број заједничких тангенти кругова k_1 и k_2, израчунајмо прво O_1O_2.

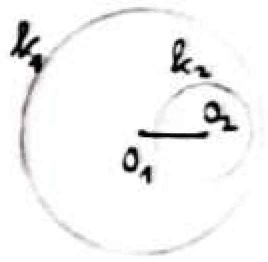
$$O_1O_2=\sqrt{(x_{O_2}-x_{O_1})^2+(y_{O_2}-y_{O_1})^2}=\sqrt{(17-7)^2+(3-3)^2}=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{10^2}=|10|=10$$

1) случај $10=O_1O_2<|r_1-r_2|=|r_1-9|$ тј. $r_1-9<-10$ или $r_1-9>10$

$r_1<-10+9$ $r_1>10+9$

$r_1<-1$ $r_1>19$

↯ јер је $r_1>0$

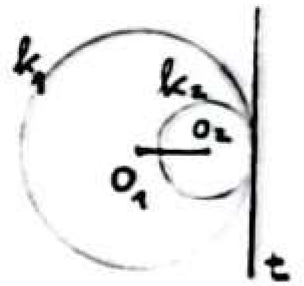


За $r_1>19$ је $O_1O_2<|r_1-9|$, те је круг k_2 унутар круга k_1 и број заједничких тангенти је 0.

2) случај $10=O_1O_2=|r_1-r_2|=|r_1-9|$ тј. $r_1-9=-10$ или $r_1-9=10$

$r_1=-10+9$ $r_1=10+9$

$r_1=-1$ ↯ јер је $r_1>0$ $r_1=19$

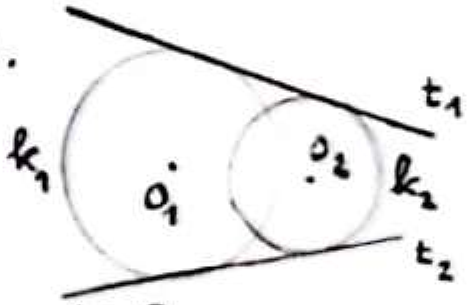


За $r_1=19$ је $O_1O_2=|r_1-9|$, те се кругови k_1 и k_2 додирују изнутра и број заједничких тангенти је 1.

3) случај $|r_1-9|=|r_1-r_2|<O_1O_2<r_1+r_2=r_1+9$ тј. $|r_1-9|<10<r_1+9$ тј. $1<r_1<19$.

$-10<r_1-9<10$ $1<r_1$

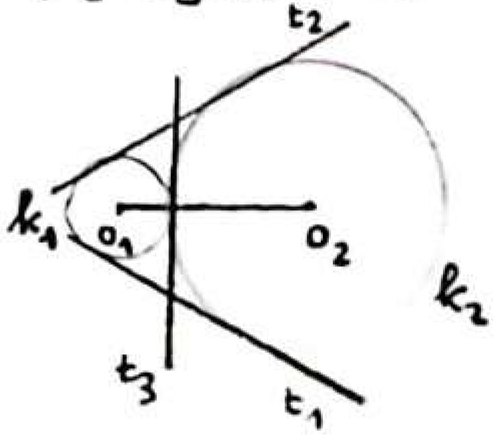
$-1<r_1<19$



За $1<r_1<19$ је $|r_1-9|<O_1O_2<r_1+9$, те се кругови секу и број заједничких тангенти је 2.

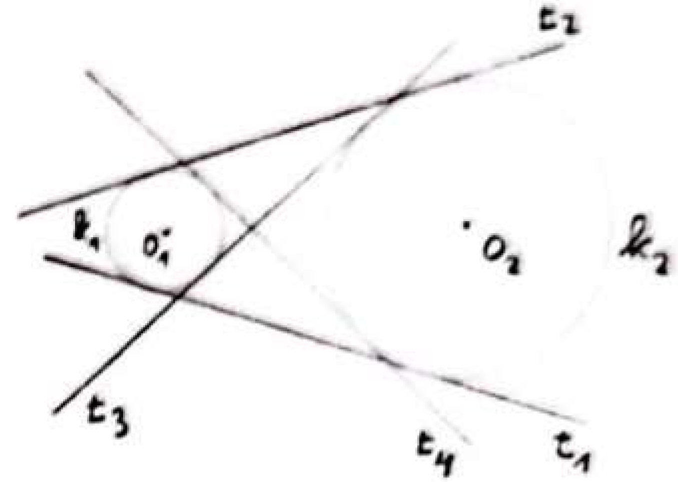
4) случај $10=O_1O_2=r_1+r_2=r_1+9$ тј. $r_1=10-9=1$

За $r_1=1$ кругови k_1 и k_2 се додирују споља и број заједничких тангенти је 3.

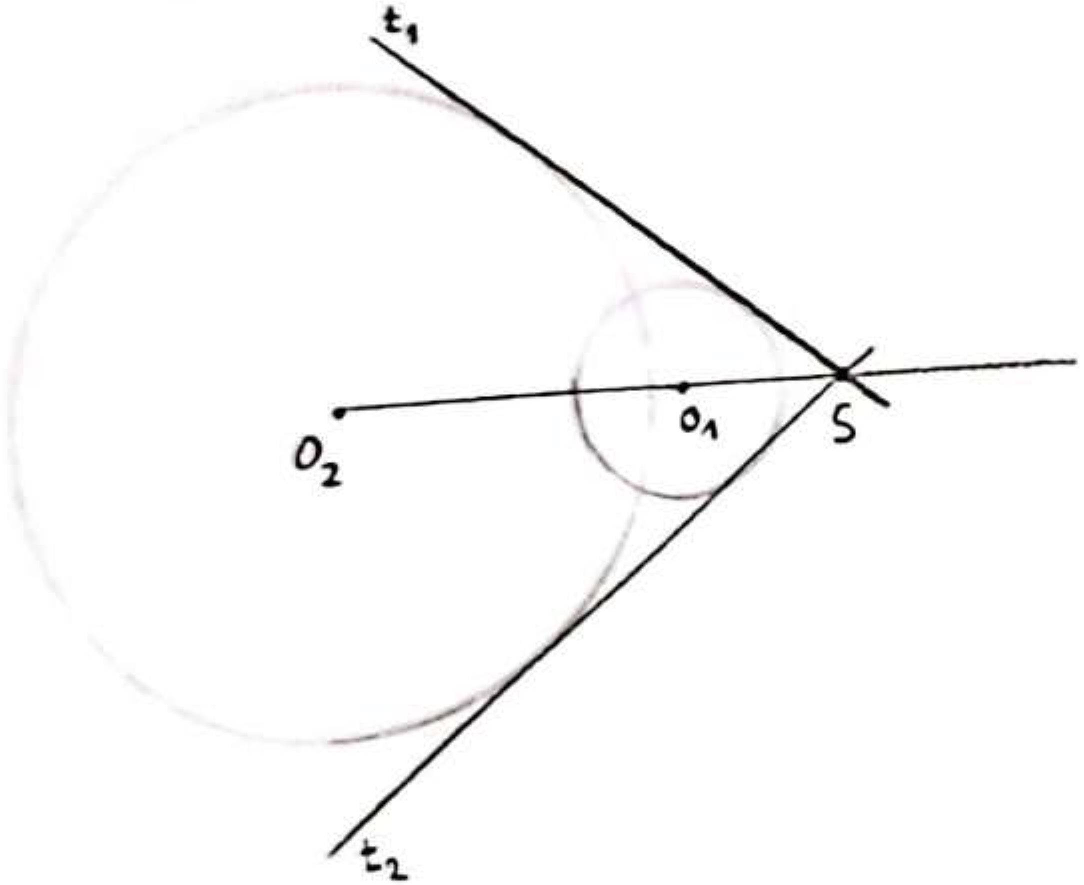


5) случај $10 = O_1O_2 > r_1 + r_2 = r_1 + 9$ тј. $1 > r_1$

За $0<r_1<1$ кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака и број заједничких тангенти је 4.



б) За $r_1 = 3$ важи $1<3<19$, те на основу дела а) следи да кругови k_1 и k_2 имају две заједничке тангенте и оне су спољашње. Нека је $t: Ax+By+C=0$ једначина заједничке тангенте.



Тада је $d(O_1,t)=r_1$ и $d(O_2,t)=r_2$, где је $O_1(7,3)$, $O_2(17,3)$, $r_1=3$ и $r_2=9$.

$$\frac{|A\cdot 7+B\cdot 3+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \qquad \frac{|A\cdot 17+B\cdot 3+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=9$$

Вектор (A,B) је вектор нормале праве t. Без умањења општости, можемо претпоставити да је вектор (A,B) јединични, тј. да је $\sqrt{A^2+B^2}=1$ (ако није, можемо поделити једначину $Ax+By+C=0$ са $\sqrt{A^2+B^2}$ које је различито од 0 јер иначе $Ax+By+C=0$ тј. $C=0$ није једначина праве, те добијамо $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$, тј. $A_1x+B_1y+C_1=0$, а за A_1 и B_1 важи $A_1^2+B_1^2 = \frac{A^2}{A^2+B^2}+\frac{B^2}{A^2+B^2} = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1$).

$\Rightarrow |7A+3B+C|=3$ и $|17A+3B+C|=9$

1° случај $\quad 7A+3B+C=3$ и $17A+3B+C=9$ $\quad\ominus$

$$17A-7A+\cancel{3B}-\cancel{3B}+\cancel{C}-\cancel{C}=9-3$$
$$10A=6 \Rightarrow A=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$
$$B^2=1-A^2=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

1.1° подслучај $\quad B=-\frac{4}{5}$

$$C=3-7A-3B=3-7\cdot\frac{3}{5}-3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=3-\frac{21}{5}+\frac{12}{5}=\frac{15}{5}-\frac{9}{5}=\frac{6}{5}$$
$$t_1: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{6}{5}=0 \quad \text{тј.} \quad t_1: 3x-4y+6=0$$

1.2° подслучај $\quad B=\frac{4}{5}$

$$C=3-7A-3B=3-7\cdot\frac{3}{5}-3\cdot\frac{4}{5}=3-\frac{21}{5}-\frac{12}{5}=\frac{15}{5}-\frac{33}{5}=-\frac{18}{5}$$
$$t_2: \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{18}{5}=0 \quad \text{тј.} \quad t_2: 3x+4y-18=0$$

2° случај $\quad 7A+3B+C=3 \qquad 17A+3B+C=-9$

$$-9-3=17A+3B+C-(7A+3B+C)$$
$$-12=17A-7A$$
$$-12=10A \Rightarrow A=\frac{-12}{10}=-\frac{6}{5} \Rightarrow B^2=1-A^2=1-\left(-\frac{6}{5}\right)^2=1-\frac{36}{25}=\frac{25-36}{25}=\frac{-11}{25}<0 \ \lightning \text{ jер je } B^2\geq 0$$

3° случај $\quad 7A+3B+C=-3 \qquad 17A+3B+C=9$

$$9-(-3)=17A+3B+C-(7A+3B+C)$$
$$12=17A-7A$$
$$12=10A \Rightarrow A=\frac{12}{10}=\frac{6}{5} \Rightarrow B^2=1-A^2=1-\left(\frac{6}{5}\right)^2=1-\frac{36}{25}=\frac{25-36}{25}=\frac{-11}{25}<0 \ \lightning \text{ jер je } B^2\geq 0$$

4° случај $\quad 7A+3B+C=-3 \qquad 17A+3B+C=-9$

$$-9-(-3)=17A+3B+C-(7A+3B+C)$$
$$-9+3=17A-7A$$
$$-6=10A \Rightarrow A=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5} \Rightarrow B^2=1-A^2=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$$

4.1° подслучај $\quad B=-\frac{4}{5}$

$$C=-3-7A-3B=-3-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{15}{5}+\frac{21}{5}+\frac{12}{5}=\frac{18}{5}$$

$t_3:\ -\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{18}{5}=0$ тј. $t_3:\ 3x+4y-18=0$

што je заправо тангента t_2

4.2° подслучај $\quad B=\frac{4}{5}$

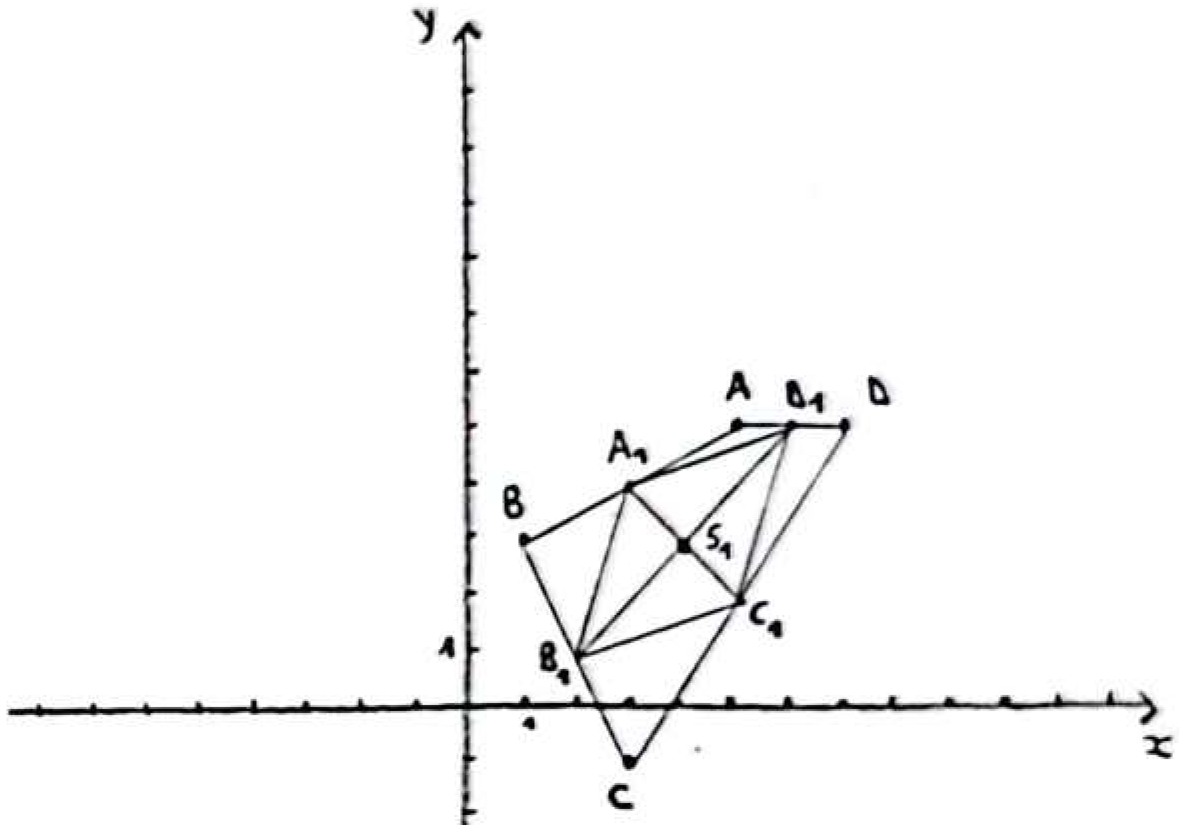
$$C=-3-7A-3B=-3-7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-3\cdot\frac{4}{5}=-\frac{15}{5}+\frac{21}{5}-\frac{12}{5}=-\frac{6}{5}$$

$t_4:\ -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{6}{5}=0$ тј. $t_4:\ 3x-4y+6=0$

што je заправо тангента t_1

Дакле, тражене заједничке тангенте су $t_1: 3x-4y+6=0$ и $t_2: 3x+4y-18=0$.

(4.6.) Координате три темена четвороугла $ABCD$ су $A(5,5)$, $B(1,3)$, $C(3,-1)$. Темена четвороугла $A_1B_1C_1D_1$ су редом средишта страница AB, BC, CD, DA, а пресек дијагонала A_1C_1 и B_1D_1 је тачка $S_1(4,3)$. Одредити координате темена D и однос површина ова два четвороугла.



Решење: $\left.\begin{matrix} A_1 \text{ - средиште } AB \\ D_1 \text{ - средиште } AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1D_1$ је средња линија троугла BAD

$\Rightarrow A_1D_1 \parallel BD, \quad A_1D_1 = \frac{1}{2}BD \qquad (1)$

$\left.\begin{matrix} B_1 \text{ - средиште } BC \\ C_1 \text{ - средиште } CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_1C_1$ је средња линија троугла BCD

$\Rightarrow B_1C_1 \parallel BD, \quad B_1C_1 = \frac{1}{2}BD \qquad (2)$

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} A_1D_1 \parallel B_1C_1, \; A_1D_1 = B_1C_1 \Rightarrow \square A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм

$\Rightarrow$ Дијагонале A_1C_1 и B_1D_1 се полове у тачки S_1.

A_1 је средиште AB $\Rightarrow x_{A_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$y_{A_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow A_1(3,4)$

S_1 је средиште A_1C_1 $\Rightarrow 4 = x_{S_1} = \frac{x_{A_1} + x_{C_1}}{2} = \frac{3 + x_{C_1}}{2} \Rightarrow 3 + x_{C_1} = 2 \cdot 4$

$3 + x_{C_1} = 8$

$x_{C_1} = 8 - 3 = 5$

$3 = y_{S_1} = \frac{y_{A_1} + y_{C_1}}{2} = \frac{4 + y_{C_1}}{2} \Rightarrow 4 + y_{C_1} = 2 \cdot 3$

$4 + y_{C_1} = 6$

$y_{C_1} = 6 - 4 = 2$

$\Rightarrow C_1(5,2)$ је средиште дужи CD

$5 = x_{C_1} = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow x_C + x_D = 2 \cdot 5$

$3 + x_D = 10$

$x_D = 10 - 3 = 7$

$2 = y_{C_1} = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow y_C + y_D = 2 \cdot 2$

$-1 + y_D = 4$

$y_D = 4 + 1 = 5$

$\Rightarrow D(7,5)$

$P_{ABCD} = P_{\Delta BAD} + P_{\Delta BCD}$

$\overrightarrow{BA} = [A]-[B] = (5,5)-(1,3) = (4,2)$ $\overrightarrow{BD} = [D]-[B] = (7,5)-(1,3) = (6,2)$ $\overrightarrow{BC} = [C]-[B] = (3,-1)-(1,3) = (2,-4)$

Сматраћемо да је посматрана раван заправо раван Oxy у $Oxyz$ простору да бисмо могли да израчунамо векторски производ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}$. Онда је $\overrightarrow{BA} = (4,2,0)$, $\overrightarrow{BD} = (6,2,0)$ и $\overrightarrow{BC} = (2,-4,0)$.

$$P_{\Delta BAD} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| = \frac{1}{2} \| (2\cdot 0 - 2\cdot 0)\vec{e}_1 - (4\cdot 0 - 6\cdot 0)\vec{e}_2 + (4\cdot 2 - 6\cdot 2)\vec{e}_3 \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| -4\vec{e}_3 \| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot |-4| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$P_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| = \frac{1}{2} \| (-4\cdot 0 - 0\cdot 2)\vec{e}_1 - (2\cdot 0 - 0\cdot 6)\vec{e}_2 + (2\cdot 2 - 6\cdot(-4))\vec{e}_3 \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| 28\vec{e}_3 \| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

$P_{ABCD} = P_{\Delta BAD} + P_{\Delta BCD} = 2 + 14 = 16$

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = \|\overrightarrow{B_1A_1} \times \overrightarrow{B_1C_1}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\| = \| (3\cdot 0 - 1\cdot 0)\vec{e}_1 - (1\cdot 0 - 3\cdot 0)\vec{e}_2 + (1\cdot 1 - 3\cdot 3)\vec{e}_3 \| = \| -8\vec{e}_3 \| = 8$$

B_1 је средиште BC $\Rightarrow$ $x_{B_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $y_{B_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\overrightarrow{B_1A_1} = [A_1]-[B_1] = (3,4,0)-(2,1,0) = (1,3,0)$ $\overrightarrow{B_1C_1} = [C_1]-[B_1] = (5,2,0)-(2,1,0) = (3,1,0)$

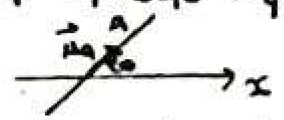
Координате темена D су $(7,5)$, а однос површина четвороуглова $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ је $\frac{P_{ABCD}}{P_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{16}{8} = 2$.

4.7. У поларним координатама одредити: а) једначину праве $p: \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$. б) Једначину праве q која са x-осом гради угао $\varphi_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, а на растојању је $r_0\geq 0$ од координатног почетка.

Решење: а) Заменимо везе између Декартових и поларних координата $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ у једначину праве $p: \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

$$\frac{r\cos\varphi}{m}+\frac{r\sin\varphi}{n}=1$$

б) Прво ћемо наћи једначину праве q у Декартовим координатама. Угао који права $q: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ гради са x-осом је $\varphi_0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Дакле, вектор правца $\vec{u}_q=(a,b)$ праве q мора бити $\vec{u}_q=(\cos\varphi_0,\sin\varphi_0)$.



$$\Rightarrow q: \frac{x-x_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-y_0}{\sin\varphi_0} \Rightarrow \sin\varphi_0\cdot(x-x_0)=\cos\varphi_0\cdot(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_0\cdot x-\sin\varphi_0\cdot x_0=\cos\varphi_0\cdot y-\cos\varphi_0\cdot y_0$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_0\cdot x-\cos\varphi_0\cdot y+\cos\varphi_0\cdot y_0-\sin\varphi_0\cdot x_0=0$$

Услов задатка је да је права q од координатног почетка $(0,0)$ на растојању $r_0\geq 0$.

$$r_0=d(0,q)=\frac{|\sin\varphi_0\cdot 0-\cos\varphi_0\cdot 0+\cos\varphi_0\cdot y_0-\sin\varphi_0\cdot x_0|}{\sqrt{\sin^2\varphi_0+(-\cos\varphi_0)^2}}=\frac{|\cos\varphi_0\cdot y_0-\sin\varphi_0\cdot x_0|}{1}$$

$\Rightarrow |\cos\varphi_0\cdot y_0-\sin\varphi_0\cdot x_0|=r_0 \Rightarrow r_0=\cos\varphi_0 y_0-\sin\varphi_0 x_0$ или $-r_0=\cos\varphi_0 y_0-\sin\varphi_0 x_0$

Пређимо сада на поларне координате и заменимо $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ у добијене једначине правих $q_1: \sin\varphi_0 x-\cos\varphi_0 y+r_0=0$ и $q_2: \sin\varphi_0 x-\cos\varphi_0 y-r_0=0$.

$\Rightarrow q_1: \sin\varphi_0 r\cos\varphi-\cos\varphi_0 r\sin\varphi+r_0=0$

$r\cdot(\sin\varphi_0\cos\varphi-\cos\varphi_0\sin\varphi)+r_0=0$

$r\cdot\sin(\varphi_0-\varphi)+r_0=0$

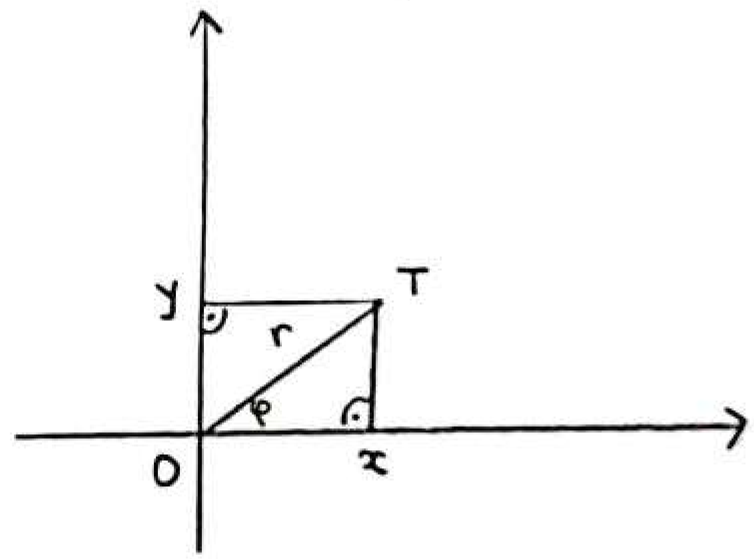
$q_2: \sin\varphi_0 r\cos\varphi-\cos\varphi_0 r\sin\varphi-r_0=0$

$r(\sin\varphi_0\cos\varphi-\cos\varphi_0\sin\varphi)-r_0=0$

$r\sin(\varphi_0-\varphi)-r_0=0$

Постоје две такве праве, $\Rightarrow$ $q_1: r\cdot\sin(\varphi_0-\varphi)+r_0=0$ и $q_2: r\sin(\varphi_0-\varphi)-r_0=0$.

Нека је O произвољна тачка у равни и нека је Ox позитивни део x-осе Декартовог правоуглог координатног система Oxy. Посматрамо произвољну тачку T у Oxy. Ако је $T\neq O$, онда је $r=OT$ и φ је оријентисани угао од полуправе Ox до полуправе OT (мери се у математички позитивном смеру, тј. смеру супротном од смера кретања казаљке на сату) и може бити у интервалу $[0,2\pi)$. Ако је $T=O$, онда је $r=0$, а φ није дефинисано. Веза између Декартових и поларних координата гласи: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.



4.8. Одредити растојање тачака A и B преко њихових поларних координата $A(r_A, \varphi_A)$, $B(r_B, \varphi_B)$.

<u>Решење:</u>

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{(r_B \cos\varphi_B - r_A \cos\varphi_A)^2 + (r_B \sin\varphi_B - r_A \sin\varphi_A)^2} = \sqrt{r_B^2 \cos^2\varphi_B - 2r_A r_B \cos\varphi_B \cos\varphi_A + r_A^2 \cos^2\varphi_A + r_B^2 \sin^2\varphi_B - 2r_A r_B \sin\varphi_A \sin\varphi_B + r_A^2 \sin^2\varphi_A}$$

$$x_A = r_A \cos\varphi_A$$
$$y_A = r_A \sin\varphi_A$$
$$x_B = r_B \cos\varphi_B$$
$$y_B = r_B \sin\varphi_B$$

$$= \sqrt{r_A^2 \cdot (\cos^2\varphi_A + \sin^2\varphi_A) + r_B^2 \cdot (\cos^2\varphi_B + \sin^2\varphi_B) - 2 r_A r_B \cdot (\cos\varphi_B \cos\varphi_A + \sin\varphi_B \sin\varphi_A)}$$

$$= \sqrt{r_A^2 \cdot 1 + r_B^2 \cdot 1 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)} = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)}$$

Тражено растојање тачака A и B je $\sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)}$.