Трансформације координата

$$A^T\begin{pmatrix}\vec e_1\\ \vec e_2\\ \vec e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\vec e_1\\ \vec e_2\\ \vec e_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\ a_{12}&a_{22}&a_{32}\\ a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec e_1\\ \vec e_2\\ \vec e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\vec e_1+a_{21}\vec e_2+a_{31}\vec e_3\\ a_{12}\vec e_1+a_{22}\vec e_2+a_{32}\vec e_3\\ a_{13}\vec e_1+a_{23}\vec e_2+a_{33}\vec e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec f_1\\ \vec f_2\\ \vec f_3\end{pmatrix}$$

Нека су $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$ и $\vec f_1,\vec f_2,\vec f_3$ две базе при чему је

$$\vec f_1=a_{11}\vec e_1+a_{21}\vec e_2+a_{31}\vec e_3$$
$$\vec f_2=a_{12}\vec e_1+a_{22}\vec e_2+a_{32}\vec e_3$$
$$\vec f_3=a_{13}\vec e_1+a_{23}\vec e_2+a_{33}\vec e_3.$$

Тада је $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ матрица преласка с базе $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$ на базу $\vec f_1,\vec f_2,\vec f_3$, тј. важи $\begin{pmatrix}\vec f_1\\ \vec f_2\\ \vec f_3\end{pmatrix}=A^T\begin{pmatrix}\vec e_1\\ \vec e_2\\ \vec e_3\end{pmatrix}$.

координате вектора $\vec f_1$ у бази $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$

координате вектора $\vec f_2$ у бази $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$

координате вектора $\vec f_3$ у бази $\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3$

Посматрајмо сада два координатна система $O_{\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3}$ и $O'_{\vec f_1,\vec f_2,\vec f_3}$. Координате тачке M у координатном систему $O_{\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3}$ су бројеви $x,y,z\in\mathbb R$ такви да је $\overrightarrow{OM}=x\vec e_1+y\vec e_2+z\vec e_3$. Пишемо $M(x,y,z)$. Слично, координате тачке M у координатном систему $O'_{\vec f_1,\vec f_2,\vec f_3}$ су бројеви $x',y',z'\in\mathbb R$ такви да је $\overrightarrow{O'M}=x'\vec f_1+y'\vec f_2+z'\vec f_3$. Трансформација координата је формула која (за исту тачку M) повезује координате x,y,z и x',y',z'. Важи:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OO'}+x'\vec f_1+y'\vec f_2+z'\vec f_3=\overrightarrow{OO'}+x'(a_{11}\vec e_1+a_{21}\vec e_2+a_{31}\vec e_3)+y'(a_{12}\vec e_1+a_{22}\vec e_2+a_{32}\vec e_3)+z'(a_{13}\vec e_1+a_{23}\vec e_2+a_{33}\vec e_3)$$

$$=\overrightarrow{OO'}+(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z')\vec e_1+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z')\vec e_2+(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z')\vec e_3$$

Нека је $\overrightarrow{OO'}=b_1\vec e_1+b_2\vec e_2+b_3\vec e_3$, тј. нека су b_1,b_2,b_3 координате тачке O' у координатном систему $O_{\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3}$. Тада је

$$\overrightarrow{OM}=b_1\vec e_1+b_2\vec e_2+b_3\vec e_3+(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z')\vec e_1+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z')\vec e_2+(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z')\vec e_3=$$

$$=(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+b_1)\vec e_1+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+b_2)\vec e_2+(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+b_3)\vec e_3,$$ те како је $\overrightarrow{OM}=x\vec e_1+y\vec e_2+z\vec e_3$,

то је $x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+b_1$, $y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+b_2$, $z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+b_3$. Матрични запис ове формуле је

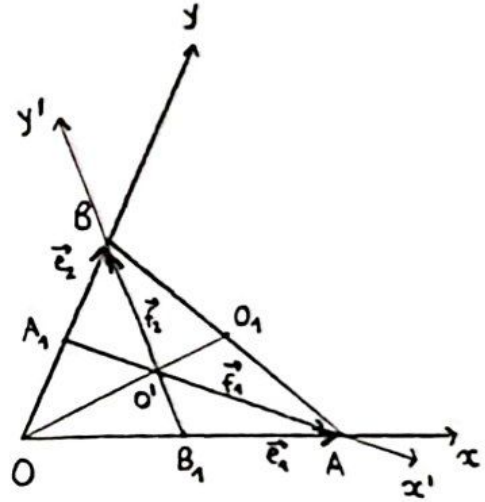
$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'\\ a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'\\ a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\ \text{односно}\ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

Сличне формуле важе и ако посматрамо неке координатне системе $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ и $O'_{\vec{f}_1,\vec{f}_2}$ у равни.

Дакле, ако је $\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$ и $\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$ и ако су координате тачке M у координатним системима $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2}$ и $O'_{\vec{f}_1,\vec{f}_2}$ редом бројеви x, y, односно x', y', онда је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, где је $\overrightarrow{OO'} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$.

Такође, координатни систем $O_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$ може се обележити и са $Oxyz$, $O'_{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3}$ са $O'x'y'z'$, а координатни системи у равни са Oxy и $O'x'y'$, а уместо термина координатни систем можемо користити и термин афини репер.

(3.1.) Тежиште троугла OAB је тачка O'. У равни троугла изабрана су два афина репера: репер Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\vec{e}_1=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{e}_2=\overrightarrow{OB}$ и репер $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\vec{f}_1=\overrightarrow{O'A}$ и $\vec{f}_2=\overrightarrow{O'B}$. Одредити везу координата (x,y) и (x',y') као и координате средишта страница троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$.



Решење: Како је тачка O' тежиште троугла OAB, то важи $\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{3}(\underset{\overrightarrow{OO}=\vec{0}}{\underbrace{\overrightarrow{OO}}}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. (*)

Да бисмо нашли матрицу преласка с базе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ на базу $\vec{f}_1,\vec{f}_2$, изразимо нове базне векторе преко старих.

$$\vec{f}_1=\overrightarrow{O'A}\underset{\text{правило надовезивања}}{=}\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OA}\overset{(*)}{=}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{e}_1-\frac{1}{3}\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2=\overrightarrow{O'B}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OB}\overset{(*)}{=}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=$$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\vec{e}_1+\frac{2}{3}\vec{e}_2$$

$\Rightarrow$ Матрица преласка с базе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ на базу $\vec{f}_1,\vec{f}_2$ је $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

координате вектора $\vec{f}_1$ у бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$

координате вектора $\vec{f}_2$ у бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$

Нађимо сада координате новог координатног почетка O' у старој бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, тј. координате вектора $\overrightarrow{OO'}$.

$$\overrightarrow{OO'}\overset{(*)}{=}\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{3}\vec{e}_2$$

Тражена веза координата (x,y) и (x',y') је $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

координате новог координатног почетка O' у старој бази $\vec{e}_1,\vec{e}_2$.

Означимо са O_1, A_1 и B_1 средишта страница AB, OB и OA троугла OAB, редом.

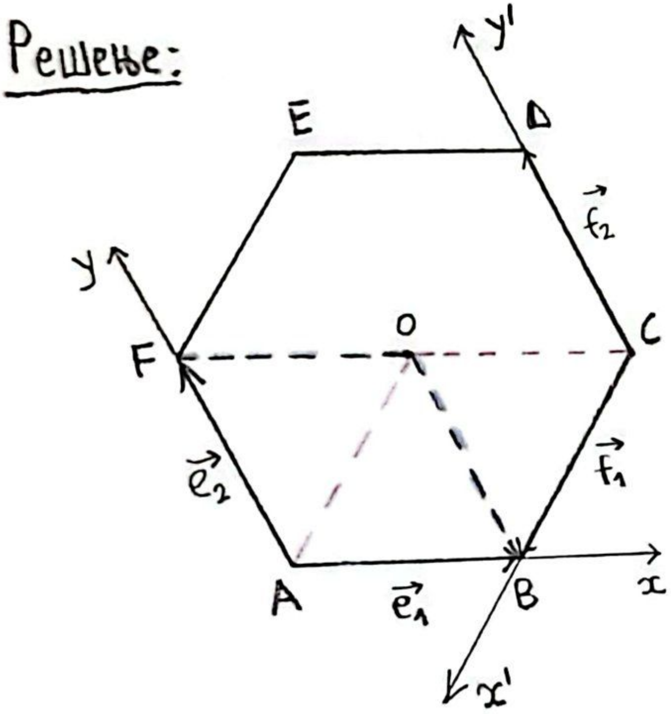
На основу напомене после (1.4) задатка за средиште O_1 странице AB важи $\overrightarrow{O'O_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{O'A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{O'B}=\frac{1}{2}\vec{f}_1+\frac{1}{2}\vec{f}_2$ јер је $\frac{\overrightarrow{AO_1}}{\overrightarrow{O_1B}}=1$, те су координате средишта O_1 странице AB троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$ једнаке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Како је тачка O' тежиште троугла OAB, то важи $\frac{\overrightarrow{AO'}}{\overrightarrow{O'A_1}} = 2$, те је $\overrightarrow{O'A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{O'A} = -\frac{1}{2}\vec{f_1} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{f_1} + 0\cdot\vec{f_2}$, те су координате средишта A_1 странице OB у односу на репер $O'x'y'$ једнаке $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Како је тачка O' тежиште троугла OAB, то важи $\frac{\overrightarrow{BO'}}{\overrightarrow{O'B_1}} = 2$, те је $\overrightarrow{O'B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{O'B} = -\frac{1}{2}\vec{f_2} = 0\cdot\vec{f_1} - \frac{1}{2}\vec{f_2}$, те су координате средишта B_1 странице OA у односу на репер $O'x'y'$ једнаке $(0, -\frac{1}{2})$.

3.2. Нека је ABCDEF правилан шестоугао. Репер Axy има координатне векторе $\vec{e_1} = \vec{AB}$, $\vec{e_2} = \vec{AF}$, а репер $Cx'y'$ координатне векторе $\vec{f_1} = \vec{CB}$, $\vec{f_2} = \vec{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x,y) и (x',y'), њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.

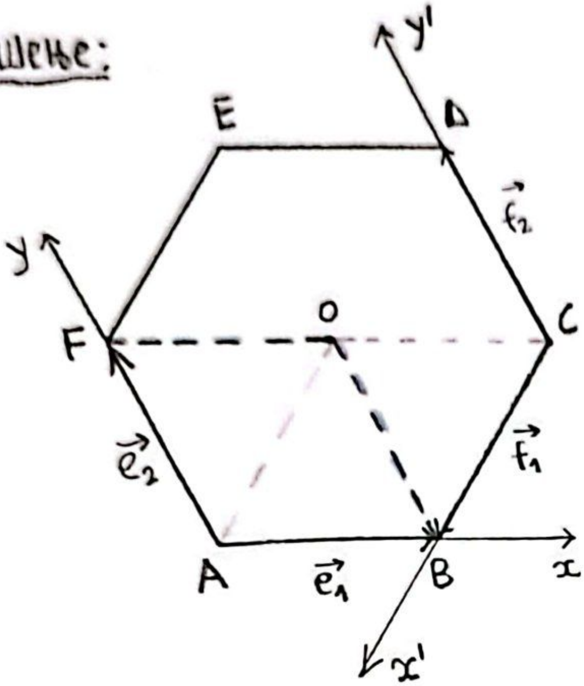
Решење:



Координатни вектори у старом реперу Axy су $\vec{e_1} = \vec{AB}$ и $\vec{e_2} = \vec{AF}$ (Ax и Ay су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e_1} = \vec{AB}$ и $\vec{e_2} = \vec{AF}$ као на слици лево).

Координатни вектори у новом реперу $Cx'y'$ су $\vec{f_1} = \vec{CB}$ и $\vec{f_2} = \vec{CD}$ (Cx' и Cy' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f_1} = \vec{CB}$ и $\vec{f_2} = \vec{CD}$ као на слици лево).

Решење:



Координатни вектори у старом реперу Axy су $\vec{e_1}=\vec{AB}$ и $\vec{e_2}=\vec{AF}$ (Ax и Ay су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e_1}=\vec{AB}$ и $\vec{e_2}=\vec{AF}$ као на слици лево).

Координатни вектори у новом реперу $Cx'y'$ су $\vec{f_1}=\vec{CB}$ и $\vec{f_2}=\vec{CD}$ (Cx' и Cy' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f_1}=\vec{CB}$ и $\vec{f_2}=\vec{CD}$ као на слици лево).

Потребно је да изразимо нове координатне векторе $\vec{f_1}=\vec{CB}$ и $\vec{f_2}=\vec{CD}$ преко старих координатних вектора $\vec{e_1}=\vec{AB}$ и $\vec{e_2}=\vec{AF}$ да бисмо нашли везу између старих координата (x,y) и нових координата (x',y'). То радимо користећи својства сабирања вектора и супротног вектора.

$$\vec{f_1}=\vec{CB}=\vec{CA}+\vec{AB}=\vec{CF}+\vec{FA}+\vec{AB}=-\vec{FC}-\vec{AF}+\vec{AB}=-2\vec{AB}-\vec{AF}+\vec{AB}$$

$$=-\vec{AB}-\vec{AF}=-\vec{e_1}-\vec{e_2}$$

Тачка A је почетак вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а F је крајња тачка вектора $\vec{e_2}$

$\vec{FC}=2\vec{AB}$ јер су $\vec{FC}$ и $\vec{AB}$ истог правца и смера и FC је 2 пута дужа од дужи AB

Дакле, $\vec{f_1} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$.

$\vec{f_2} = \vec{CD} = \vec{AF} = \vec{e_2}$

Вектори $\vec{CD}$ и $\vec{AF}$ су истог правца, смера и интензитета.

Поновимо формулу са предавања и вежби о трансформацији координата.

Ако је Axy стари репер са координатним векторима $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а $Cx'y'$ нови репер са координатним векторима $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$, онда је веза између старих координата (x,y) и нових координата (x',y') дата помоћу формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Координате првог новог координатног вектора $\vec{f_1}$ израженог помоћу вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ редом.

У овом задатку је $\vec{f_1} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$ те је $a_{11} = -1$ и $a_{21} = -1$

Координате другог новог координатног вектора $\vec{f_2}$ израженог помоћу старих координатних вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ редом.

У овом задатку је $\vec{f_2} = \vec{e_2} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$ те је $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 1$.

Координате вектора $\vec{AC}$ (почетак старог репера Axy је тачка A, а почетак новог репера $Cx'y'$ је тачка C) израженог помоћу старих координатних вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$.

У овом задатку је $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} =$

$= \vec{AB} - \vec{CB} \overset{*}{=} \vec{AB} - (-\vec{AB} - \vec{AF})$

$= \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AF} =$

$= 2\vec{AB} + \vec{AF} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$ ☆

Те је $b_1 = 2$ и $b_2 = 1$.

Уочимо центар O датог правилног шестоугла $ABCDEF$. Троуглови OAB и OAF су једнакостранични те је $\measuredangle ABO = \measuredangle AFO = 60°$ и $\measuredangle BAF = \measuredangle BOF = 120°$.

Како су наспрамни углови четвороугла ABOF једнаки, то је он паралелограм. Слично је и четвороугао ABCO паралелограм јер је $\measuredangle OAB = \measuredangle OCB = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle AOC = 120^\circ$ (централни углови $\measuredangle FOA$, $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOC$ правилног шестоугла једнаки су по 60°).

Зато је $\vec{CB} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} = \vec{FA} + \vec{BA} = -\vec{AF} - \vec{AB} = -\vec{AB} - \vec{AF}$. #

Дакле, по наведеној формули за трансформацију координата, веза између старих и нових координата је:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ резултат множења ових матрица је матрица типа 2×1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot x' + 0\cdot y' \\ -1\cdot x' + 1\cdot y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' \\ -x' + y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' + 2 \\ -x' + y' + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -x' + 2 \\ y = -x' + y' + 1 \end{matrix}$$

Ово су тражене везе између старих и нових координата.

На основу њих налазимо тражене инверзне формуле, тако што x' и y' изражавамо преко x и y.

$$x = -x' + 2 \Rightarrow x' = -x + 2$$
$$y = -x' + y' + 1 \Rightarrow y' = y + x' - 1 = y - x + 2 - 1 = -x + y + 1$$

Инверзне формуле можемо написати и у облику матричне једнакости.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ -1 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Напишимо сада координате темена шестоугла у старом реперу Axy. Претпоставимо да треба да изразимо координате темена T. То су заправо координате вектора $\overrightarrow{AT}$ израженог преко координатних вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ репера Axy.

Теме шестоугла	Одговарајући вектор	Тражене координате темена у реперу Axy
A	$\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2}$	$(0,0)$
B	$\overrightarrow{AB} = 1\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2}$	$(1,0)$
C	$\overrightarrow{AC} \underset{\uparrow}{=} 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$ изведено у ☆	$(2,1)$
D	$\overrightarrow{AD} = 2\cdot\overrightarrow{BC} = 2\cdot\overrightarrow{AO} =$ $= 2\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) =$ $= 2\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AF} =$ $= 2\vec{e_1} + 2\cdot\vec{e_2}$	$(2,2)$

E

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} =$$
$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CB} =$$
$$= \overrightarrow{AF} - (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}) \qquad (1,2)$$

доказано у #

$$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

F

$$\overrightarrow{AF} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 \qquad (0,1)$$

Дакле, координате темена шестоугла у старом реперу Axy су $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$, $D(2,2)$, $E(1,2)$ и $F(0,1)$.

Напишимо сада координате темена шестоугла у новом реперу $Cx'y'$. Како смо већ одредили координате темена шестоугла у старом реперу Axy и знамо везу између нових и старих координата, можемо на тај начин израчунати координате темена шестоугла у новом реперу $Cx'y'$.

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x+2 \\ y' &= -x+y+1 \end{aligned}\right\}$$ изведели смо ове формуле

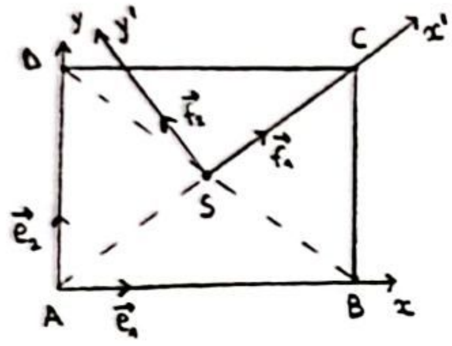
Теме шестоугла	Координате темена у реперу Axy	Координате темена у реперу $Cx'y'$
A	$(0,0)$ $x=0$ $y=0$	$x'=-0+2=2$ $y'=-0+0+1=1$ $(2,1)$
B	$(1,0)$ $x=1$ $y=0$	$x'=-1+2=1$ $y'=-1+0+1=0$ $(1,0)$

C	$(2,1)$ $x=2$ $y=1$	$x'=-2+2=0$ $y'=-2+1+1=0$ $(0,0)$
D	$(2,2)$ $x=2$ $y=2$	$x'=-2+2=0$ $y'=-2+2+1=1$ $(0,1)$
E	$(1,2)$ $x=1$ $y=2$	$x'=-1+2=1$ $y'=-1+2+1=2$ $(1,2)$
F	$(0,1)$ $x=0$ $y=1$	$x'=-0+2=2$ $y'=-0+1+1=2$ $(2,2)$

Дакле, координате темена шестоугла у новом реперу $Cx'y'$ су $A(2,1)$, $B(1,0)$, $C(0,0)$, $D(0,1)$, $E(1,2)$ и $F(2,2)$.

3.3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије ивице имају дужине $AB=4$, $BC=3$, а тачка S је центар тог правоугаоника. Дата су два ортонормирана репера, исте оријентације: репер Axy има x осу у правцу вектора $\vec{AB}$ и y осу у правцу вектора $\vec{AD}$, а репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\vec{SC}$. Одредити везу координата (x,y) и (x',y'), као и координате темена правоугаоника у оба координатна репера.

Решење:



Означимо са $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ базне векторе у ортонормираном реперу Axy. Тада је $\|\vec{e_1}\|=\|\vec{e_2}\|=1$ и $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$. Репер Axy има x осу у правцу вектора $\vec{AB}$, те је вектор $\vec{e_1}$ истог смера као $\vec{AB}$, а дужине 1, те је $\vec{e_1}=\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}=\frac{\vec{AB}}{4}$, а вектор y-осе је у правцу вектора $\vec{AD}$, те је вектор $\vec{e_2}$ истог смера као $\vec{AD}$, а дужине 1, те је $\vec{e_2}=\frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}=\frac{\vec{AD}}{3}$. $\Rightarrow \vec{AB}=4\vec{e_1}$, $\vec{AD}=3\vec{e_2}$

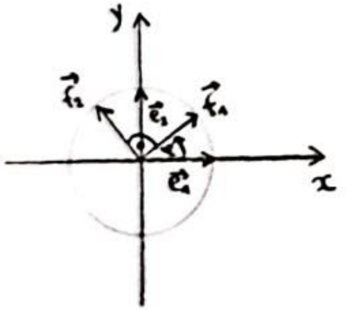
$\|\vec{AD}\|=\|\vec{BC}\|=3$ јер је $ABCD$ правоугаоник

Означимо са $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$ базне векторе у ортонормираном реперу $Sx'y'$. Тада је $\|\vec{f_1}\|=\|\vec{f_2}\|=1$ и $\vec{f_1}\perp\vec{f_2}$. Репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\vec{SC}$, те је вектор $\vec{f_1}=\frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|}$ јер је $\|\vec{f_1}\|=1$.

$$\vec{SC}=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC})=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD})=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}=\frac{1}{2}\cdot4\vec{e_1}+\frac{1}{2}\cdot3\vec{e_2}=2\vec{e_1}+\frac{3}{2}\vec{e_2} \quad \#$$

$$\|\vec{SC}\|^2=\vec{SC}\cdot\vec{SC}=(2\vec{e_1}+\tfrac{3}{2}\vec{e_2})\cdot(2\vec{e_1}+\tfrac{3}{2}\vec{e_2})=4\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}+3\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+3\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+\frac{9}{4}\vec{e_2}\cdot\vec{e_2}=4\cdot\|\vec{e_1}\|^2+3\cdot0+3\cdot0+\frac{9}{4}\cdot\|\vec{e_2}\|^2=4+\frac{9}{4}=\frac{16}{4}+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \|\vec{SC}\|=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2} \Rightarrow \vec{f_1}=\frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|}=\frac{2\vec{e_1}+\frac{3}{2}\vec{e_2}}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{\frac{5}{2}}\vec{e_1}+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}\vec{e_2}=\frac{4}{5}\vec{e_1}+\frac{3}{5}\vec{e_2}$$



Вектор $\vec{f_2}$ је једнозначно одређен условима да је $Sx'y'$ ортонормирани репер исте оријентације као Axy. Замислимо да су почетне тачке вектора $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$ иста тачка. Приметимо да крајње тачке вектора $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$ припадају јединичној кружници јер важи $\|\vec{e_1}\|=\|\vec{e_2}\|=\|\vec{f_1}\|=\|\vec{f_2}\|=1$. Означимо са φ оријентисани угао од вектора $\vec{e_1}$ до вектора $\vec{f_1}$ у смеру кретања од $\vec{e_1}$ до $\vec{e_2}$. Тада је $\varphi+\frac{\pi}{2}$ оријентисани угао од вектора $\vec{e_1}$ до вектора $\vec{f_2}$.

$\vec{f_1}=\cos\varphi\,\vec{e_1}+\sin\varphi\,\vec{e_2}$, а већ смо извели $\vec{f_1}=\frac{4}{5}\vec{e_1}+\frac{3}{5}\vec{e_2} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{4}{5}$, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$

$\vec{e_1},\vec{e_2}$ су базни вектори, те су линеарно независни

$$\vec{f_2} = \cos\left(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\right)\vec{e_1} + \sin\left(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\right)\vec{e_2} \underset{\uparrow}{=} -\sin\varphi\,\vec{e_1} + \cos\varphi\,\vec{e_2} = -\tfrac{3}{5}\vec{e_1} + \tfrac{4}{5}\vec{e_2}$$

$$\cos\left(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi\cos\tfrac{\pi}{2} - \sin\varphi\sin\tfrac{\pi}{2} = \cos\varphi\cdot 0 - \sin\varphi\cdot 1 = -\sin\varphi$$

$$\sin\left(\varphi+\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\varphi\sin\tfrac{\pi}{2} = \sin\varphi\cdot 0 + \cos\varphi\cdot 1 = \cos\varphi$$

$\Rightarrow$ Матрица преласка са базе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ на базу $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ је $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Координате новог координатног почетка S у старој бази $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ су координате вектора $\vec{AS}$ у тој бази.

$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{SC} \underset{\#}{=} 2\vec{e_1} + \frac{3}{2}\vec{e_2}$

Тражена веза између координата (x,y) и (x',y') је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Из курса Линеарна алгебра је познато да је матрица преласка с ортонормиране базе на ортонормирану базу ортогонална, а за ортогоналне матрице A важи да је $A^{-1} = A^{T}$.

Дакле, $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ множимо ово слева са $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cdot 2 + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{5} + \frac{9}{10} \\ -\frac{6}{5} + \frac{12}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16+9}{10} \\ -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{25}{10} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

су инверзне формуле трансформације.

Теме правоугаоника	Одговарајући вектор са почетком A	Координате темена у реперу Axy	Координате темена у реперу $Sx'y'$
A	$\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2$	$A(0,0)$ $x=0 \quad y=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A(-\frac{5}{2}, 0)$
B	$\overrightarrow{AB} = 4\vec{e}_1 = 4\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2$	$B(4,0)$ $x=4 \quad y=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{32-25}{10} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow B(\frac{7}{10}, -\frac{12}{5})$
C	$\overrightarrow{AC} \underset{\uparrow}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ правило паралелограма	$C(4,3)$ $x=4 \quad y=3$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} + \frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{25}{5} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C(\frac{5}{2}, 0)$
D	$\overrightarrow{AD} = 3\vec{e}_2 = 0\cdot\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$	$D(0,3)$ $x=0 \quad y=3$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} \frac{18-25}{10} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow D(-\frac{7}{10}, \frac{12}{5})$

3.4. Дате су координате тачака $A(2,1)$, $B(3,0)$ и $C(1,4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6)$, $B(1,9)$ и $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.

Решење: Формула која повезује старе и нове координате у афиним реперима Oxy и $O'x'y'$ редом су:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Циљ је да одредимо $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ и b_2.

Тачка	Координате тачке у афином реперу Oxy	Координате тачке у афином реперу $O'x'y'$
A	$x=2 \quad y=1$	$x'=1 \quad y'=6$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_{11} + 6a_{12} + b_1 = 2 & (1) \\ a_{21} + 6a_{22} + b_2 = 1 & (2) \end{array}$$

B $\quad x=3 \quad y=0 \qquad x'=1 \quad y'=9$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_{11} + 9a_{12} + b_1 = 3 & (3) \\ a_{21} + 9a_{22} + b_2 = 0 & (4) \end{array}$$

C $\quad x=1 \quad y=4 \qquad x'=3 \quad y'=1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} 3a_{11} + a_{12} + b_1 = 1 & (5) \\ 3a_{21} + a_{22} + b_2 = 4 & (6) \end{array}$$

Остало је још да решимо систем од 6 једначина са 6 непознатих. Довољно је решити два система од 3 једначине са 3 непознате.

$$a_{11} + 6a_{12} + b_1 = 2 \quad (1) \quad | \cdot (-1)$$
$$a_{11} + 9a_{12} + b_1 = 3 \quad (3) \leftarrow +$$
$$3a_{11} + a_{12} + b_1 = 1 \quad (5) \leftarrow$$

$$a_{11} + 6a_{12} + b_1 = 2$$
$$3a_{12} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = \frac{1}{3}}$$
$$2a_{11} - 5a_{12} = -1$$
$$2 \cdot a_{11} - \frac{5}{3} = -1$$
$$2a_{11} = -1 + \frac{5}{3}$$
$$2a_{11} = \frac{2}{3}$$
$$\boxed{a_{11} = \frac{1}{3}}$$

$$a_{21} + 6a_{22} + b_2 = 1 \quad (2) \quad | \cdot (-1)$$
$$a_{21} + 9a_{22} + b_2 = 0 \quad (4) \leftarrow +$$
$$3a_{21} + a_{22} + b_2 = 4 \quad (6) \leftarrow +$$

$$a_{21} + 6a_{22} + b_2 = 1$$
$$3a_{22} = -1 \Rightarrow \boxed{a_{22} = -\frac{1}{3}}$$
$$2a_{21} - 5a_{22} = 3$$
$$2a_{21} + \frac{5}{3} = 3$$
$$2a_{21} = 3 - \frac{5}{3}$$
$$2a_{21} = \frac{9-5}{3}$$
$$2a_{21} = \frac{4}{3}$$
$$\boxed{a_{21} = \frac{2}{3}}$$

$$b_1 = 2 - a_{11} - 6a_{12}$$

$$b_1 = 2 - \frac{1}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$b_1 = 2 - \frac{1}{3} - 2$$

$$\boxed{b_1 = -\frac{1}{3}}$$

$$b_2 = 1 - a_{21} - 6a_{22}$$

$$b_2 = 1 - \frac{2}{3} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{3} + 2$$

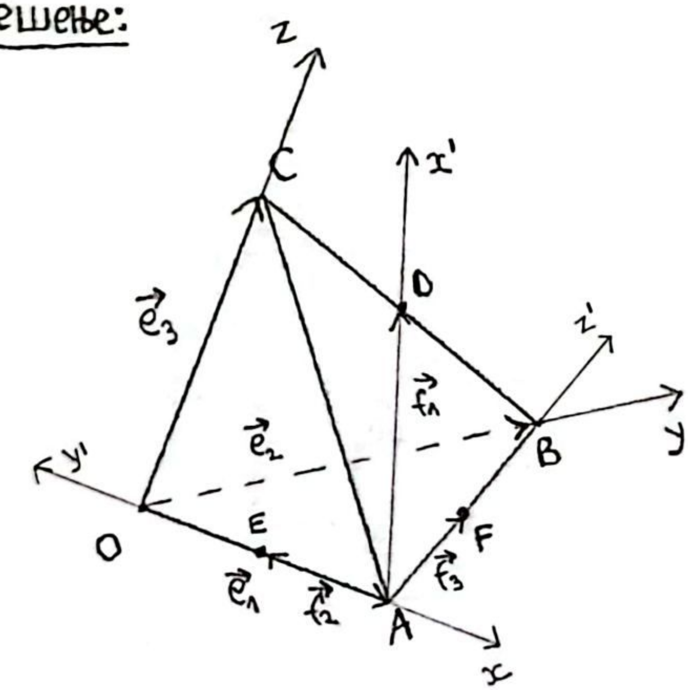
$$\boxed{b_2 = \frac{7}{3}}$$

Тако смо добили тражену везу између координата (x, y) произвољне тачке M у реперу Oxy и координата (x', y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$ и она је дата формулом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

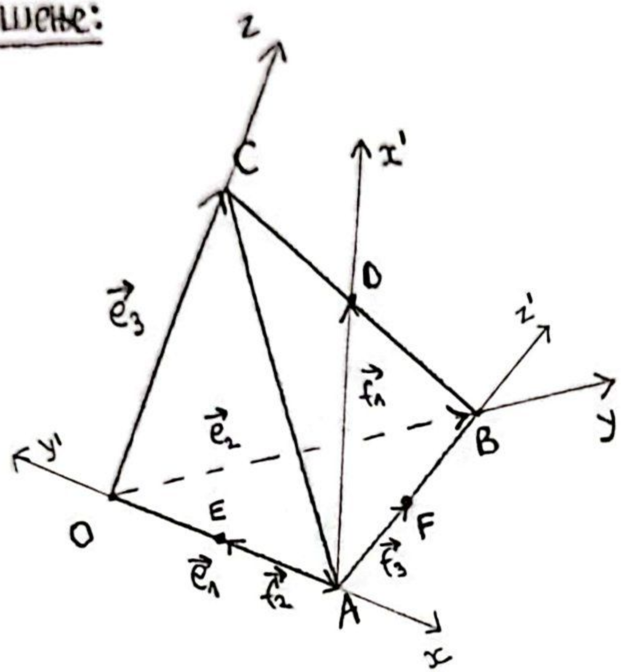
3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O, а координатни вектори су $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB. Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.

Решење:



Координатни вектори у старом реперу $Oxyz$ су $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$. (Ox, Oy и Oz су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$). Координатни вектори у новом реперу $Ax'y'z'$ су $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$ (Ax', Ay' и Az' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$)

Решење:



Координатни вектори у старом реперу $Oxyz$ су $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$. (Ox, Oy и Oz су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$). Координатни вектори у новом реперу $Ax'y'z'$ су $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$ (Ax', Ay' и Az' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$)

Потребно је да изразимо нове координатне векторе $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$ преко старих координатних вектора $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$.

$$\vec{f_1}=\vec{AD}=\vec{AO}+\vec{OD}=\vec{OD}-\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}-\vec{OA}=-\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}=-\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3}$$

D је средиште дужи BC
па је по задатку 1.4
$\vec{OD}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}$

$$\vec{f_2}=\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{AO}=-\frac{1}{2}\vec{OA}=-\frac{1}{2}\vec{e_1}$$

$$\vec{f_3}=\vec{AF}=\vec{AO}+\vec{OF}=-\vec{OA}+\vec{OF}=-\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}=-\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}=-\frac{1}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}$$

F је средиште дужи AB

Дакле, $\vec{f_1} = (-1)\cdot\vec{e_1} + \frac{1}{2}\cdot\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\vec{f_2} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

$\vec{f_3} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

Формула о трансформацији координата нам даје да ако је $Oxyz$ стари репер са координатним векторима $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, а $Ax'y'z'$ нови репер са координатним векторима $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ и $\vec{f_3}$, онда је веза између старих координата (x, y) и нових координата:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Координате вектора $\vec{OA}$ (O је почетак репера $Oxyz$, а A је почетак репера $Ax'y'z'$) преко $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$.

$\vec{OA} = 1\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3} \Rightarrow b_1 = 1 \; b_2 = 0 \; b_3 = 0$

Координате првог новог координатног вектора $\vec{f_1}$ изреженог помоћу вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$.

$\vec{f_1} = (-1)\cdot\vec{e_1} + \frac{1}{2}\cdot\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\Rightarrow a_{11} = -1 \; a_{21} = \frac{1}{2} \; a_{31} = \frac{1}{2}$

Координате $\vec{f_2}$ изреженог преко $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$

$\vec{f_2} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

$\Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{2} \; a_{22} = 0 \; a_{32} = 0$

Координате $\vec{f_3}$ изреженог преко $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$

$\vec{f_3} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

$\Rightarrow a_{13} = -\frac{1}{2} \; a_{23} = \frac{1}{2} \; a_{33} = 0$

Дакле, веза између координата (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ и координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$ је:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot x' - \frac{1}{2}\cdot y' - \frac{1}{2}\cdot z' \\ \frac{1}{2}\cdot x' + 0\cdot y' + \frac{1}{2}\cdot z' \\ \frac{1}{2}\cdot x' + 0\cdot y' + 0\cdot z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1 \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z' \\ z &= \frac{1}{2}\cdot x' \end{aligned}$$

Нађимо сада инверзне формуле, тј. изразимо x', y' и z' преко x, y и z.

$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$

$y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z'$

$z = \frac{1}{2}x' \Rightarrow \boxed{x' = 2z}$

$y = \frac{1}{2}\cdot 2z + \frac{1}{2}z'$

$y = z + \frac{1}{2}z'$

$\frac{1}{2}z' = y - z$

$\boxed{z' = 2y - 2z}$

$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$

$\frac{1}{2}y' = -x - x' - \frac{1}{2}z' + 1 = -x - 2z - \frac{1}{2}\cdot(2y - 2z) + 1 = -x - 2z - y + z + 1$

$= -x - y - z + 1$

$\boxed{y' = -2x - 2y - 2z + 2}$

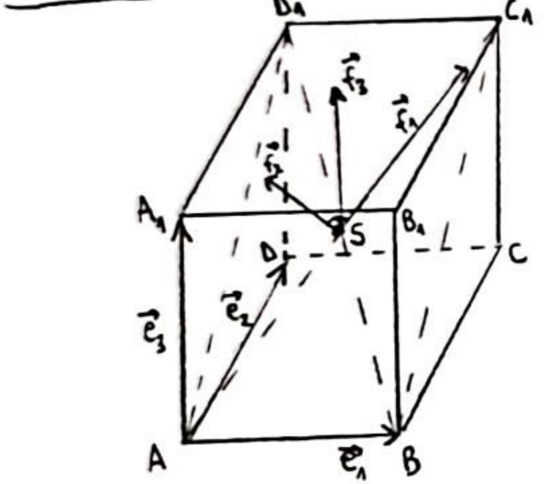
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot x + 0\cdot y + 2\cdot z \\ -2\cdot x - 2y - 2z \\ 0x + 2y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нађимо још координате темена тетраедра OABC у односу на репер $Ax'y'z'$.

Теме тетраедра	Координате темена у реперу $Oxyz$	Координате темена у реперу $Ax'y'z'$
O	$\vec{OO} = 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$ $(0,0,0)$ $x=0 \quad y=0 \quad z=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
A	$\vec{OA} = 1\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$ $(1,0,0)$ $x=1 \quad y=0 \quad z=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
B	$\vec{OB} = 0\cdot\vec{e_1} + 1\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$ $(0,1,0)$ $x=0 \quad y=1 \quad z=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
C	$\vec{OC} = 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 1\cdot\vec{e_3}$ $(0,0,1)$ $x=0 \quad y=0 \quad z=1$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3.6.) Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице 1, са центром S. Ортонормирани репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, $\vec{e}_3 = \vec{AA_1}$. У ортонормираном реперу $Sx'y'z'$ исте оријентације, дијагонална раван ABC_1D_1 има једначину $z'=0$, тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату. Одредити формуле трансформација координата и координате темена коцке у оба репера.

Решење:



Означимо са $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ базне векторе ортонормираног репера $Sx'y'z'$. Тада је $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = \|\vec{f}_3\| = 1$ и $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$, $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_3$, $\vec{f}_2 \perp \vec{f}_3$. Тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, те вектори $\vec{SC_1}$ и $\vec{f}_1$ имају исти смер. Како је $\vec{f}_1$ јединични вектор, то је $\vec{f}_1 = \frac{\vec{SC_1}}{\|\vec{SC_1}\|}$. Тачка S је центар коцке, те је S средиште просторне дијагонале AC_1.

$$\Rightarrow \vec{SC_1} = \frac{1}{2}\vec{AC_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CC_1}) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}) = \frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AA_1} = \frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3 \quad *$$

$\vec{BC} = \vec{AD}$ јер је четвороугао $ABCD$ квадрат (те је и паралелограм)

$$\underbrace{\vec{CC_1} = \vec{BB_1}}_{\square BCC_1B_1 \text{ је квадрат}} \quad \underbrace{\vec{BB_1} = \vec{AA_1}}_{\square ABB_1A_1 \text{ је квадрат}}$$

$$\|\vec{SC_1}\|^2 = \vec{SC_1}\cdot\vec{SC_1} = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3\right) = \frac{1}{4}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+\frac{1}{4}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\frac{1}{4}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+\frac{1}{4}\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+\frac{1}{4}\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+\frac{1}{4}\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3+\frac{1}{4}\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1+\frac{1}{4}\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2+\frac{1}{4}\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \|\vec{SC_1}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{\vec{SC_1}}{\|\vec{SC_1}\|} = \frac{\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_2+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_3$$

Пошто раван ABC_1D_1 има једначину $z'=0$, следи да за сваку тачку X равни ABC_1D_1 важи $\vec{SX} = x'\cdot\vec{f}_1+y'\cdot\vec{f}_2+0\cdot\vec{f}_3$ (јер услов да раван ABC_1D_1 има једначину $z'=0$ значи да свака тачка те равни има z' координату једнаку 0), тј. $\vec{SX} = x'\vec{f}_1+y'\vec{f}_2$. Дакле, свака тачка равни ABC_1D_1 припада координатној равни $Sx'y'$, односно равни ABC_1D_1 и $Sx'y'$ су исте.

$AB = 1$

$BC_1 = \sqrt{2}$ као дијагонала квадрата BCC_1B_1 ивице 1

$AB \perp BC$ јер је $\square ABCD$ квадрат
$AB \perp BB_1$ јер је $\square ABB_1A_1$ квадрат
$BC \cap BB_1 = \{B\}$

$\left.\right\} \xRightarrow[\text{теорема}]{\text{Кошијева}} AB \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow AB \perp BC_1 \xRightarrow[\text{теорема}]{\text{Питагорина}} AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

Применом косинусне теореме на ΔC_1SD_1 добијамо $1^2 = C_1D_1^2 = SC_1^2 + SD_1^2 - 2 \cdot SC_1 \cdot SD_1 \cdot \cos\measuredangle C_1SD_1 =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\measuredangle C_1SD_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\cos\measuredangle C_1SD_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos\measuredangle C_1SD_1$

$SC_1 = \frac{AC_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$SD_1 = \frac{BD_1}{2} = \frac{AC_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\cos\measuredangle C_1SD_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\measuredangle C_1SD_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \measuredangle C_1SD_1$ је оштар

Важи $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$ јер је репер $Sx'y'z'$ ортонормиран, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату по услову задатка. Нека је Y тачка таква да је $\vec{SY} = \vec{f_2}$. Тада је $SY \perp SC_1$ (јер су $\vec{f_1}$ и $\vec{SC_1}$ истог смера и $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$) и тачке Y и D_1 су с исте стране праве SC_1 да би тачка D_1 имала позитивну y' координату. Како је $\measuredangle C_1SD_1 < 90° = \measuredangle C_1SY$, то се тачка D_1 налази унутар угла $\measuredangle C_1SY$, те тачка D_1 заиста има позитивну x' и y' координату.

Вектор $\vec{f_3}$ је нормалан на $\vec{f_1}$ и на $\vec{f_2}$ јер је репер $Sx'y'z'$ ортонормиран, па је $\vec{f_3}$ нормалан на равни ABC_1D_1.

$\Rightarrow$ Вектори $\vec{f_3}$ и $\vec{SC_1} \times \vec{SD_1}$ имају исти правац, а и смер јер су ортонормирани репери $Axyz$ и $Sx'y'z'$ исте оријентације а базни вектори $\vec{e_1} = \vec{AB}, \vec{e_2} = \vec{AD}, \vec{e_3} = \vec{AA_1}$ ортонормираног репера $Axyz$ чине позитивно оријентисану ортонормирану базу.

$\vec{e_3} = \vec{AA_1} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$

$AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp AD$ јер су $\square ABB_1A_1$ и $\square ADD_1A_1$ квадрати $\Rightarrow$ Вектори $\vec{AA_1}$ и $\vec{AB} \times \vec{AD}$ су истог правца, а и смера на основу правила десне руке

$\|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \sin\measuredangle(\vec{AB}, \vec{AD}) = 1 \cdot 1 \sin 90° = 1 = \|\vec{AA_1}\|$

$\Rightarrow \vec{SC_1} = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\vec{SD_1} = \frac{1}{2}\vec{BD_1} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DD_1}) = \frac{1}{2}(-\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\vec{DD_1} = \vec{AA_1}$ јер је $\square ADD_1A_1$ квадрат

$\vec{SC_1} \times \vec{SD_1} = \left(\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}\right) = -\frac{1}{4}\overset{=\vec{0}}{\vec{e_1} \times \vec{e_1}} + \frac{1}{4}\overset{\vec{e_3}}{\vec{e_1} \times \vec{e_2}} + \frac{1}{4}\overset{-\vec{e_2}}{\vec{e_1} \times \vec{e_3}} - \frac{1}{4}\overset{-\vec{e_3}}{\vec{e_2} \times \vec{e_1}} + \frac{1}{4}\overset{\vec{0}}{\vec{e_2} \times \vec{e_2}} + \frac{1}{4}\overset{\vec{e_1}}{\vec{e_2} \times \vec{e_3}}$

$-\frac{1}{4}\underset{\vec{e_2}}{\vec{e_3} \times \vec{e_1}} + \frac{1}{4}\underset{-\vec{e_1}}{\vec{e_3} \times \vec{e_2}} + \frac{1}{4}\underset{\vec{0}}{\vec{e_3} \times \vec{e_3}} = \frac{1}{4}\vec{e_3} - \frac{1}{4}\vec{e_2} + \frac{1}{4}\vec{e_3} + \cancel{\frac{1}{4}\vec{e_1}} - \frac{1}{4}\vec{e_2} - \cancel{\frac{1}{4}\vec{e_1}} = -\frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\|\vec{SC_1}\times\vec{SD_1}\|^2 = (\vec{SC_1}\times\vec{SD_1})\cdot(\vec{SC_1}\times\vec{SD_1}) = (-\frac{1}{2}\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3})\cdot(-\frac{1}{2}\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3}) = \frac{1}{4}\vec{e_2}\cdot\vec{e_2} - \frac{1}{4}\vec{e_2}\cdot\vec{e_3} - \frac{1}{4}\vec{e_3}\cdot\vec{e_2} + \frac{1}{4}\vec{e_3}\cdot\vec{e_3} = \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \|\vec{SC_1}\times\vec{SD_1}\| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \vec{f_3} = \frac{\vec{SC_1}\times\vec{SD_1}}{\|\vec{SC_1}\times\vec{SD_1}\|} = \frac{-\frac{1}{2}\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_3}$

Да бисмо одредили вектор $\vec{f_2}$, искористимо то да је $Sx'y'z'$ ортонормиран репер позитивне оријентације, те је $\vec{f_2} = \vec{f_3}\times\vec{f_1}$ ($\vec{f_2}\perp\vec{f_3}$, $\vec{f_2}\perp\vec{f_1}$, $\|\vec{f_3}\times\vec{f_1}\| = \|\vec{f_3}\|\cdot\|\vec{f_1}\|\sin\measuredangle(\vec{f_3},\vec{f_1}) = 1\cdot 1\cdot\sin 90^\circ = 1 = \|\vec{f_2}\|$ и због позитивне оријентације $\vec{f_3}\times\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$ имају исти смер).

$$\vec{f_2} = \vec{f_3}\times\vec{f_1} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3})\times(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e_1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e_2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e_3}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\overset{=-\vec{e_3}}{\vec{e_2}\times\vec{e_1}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overset{=\vec{0}}{\vec{e_2}\times\vec{e_2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overset{=\vec{e_1}}{\vec{e_2}\times\vec{e_3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overset{=\vec{e_2}}{\vec{e_3}\times\vec{e_1}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overset{=-\vec{e_1}}{\vec{e_3}\times\vec{e_2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overset{=\vec{0}}{\vec{e_3}\times\vec{e_3}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-\vec{e_3}) \underline{-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e_1}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e_2} \underline{-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e_1}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e_1} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e_3} = -\frac{2\sqrt{6}}{6}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e_2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e_3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e_2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e_3}$$

Дакле, $\vec{f_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e_3}$, $\vec{f_2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e_2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e_3}$, $\vec{f_3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_3}$, те је матрица преласка са базе $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ на базу $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ једнака $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Нађимо координате новог координатног почетка S (тј. вектора $\vec{AS}$) помоћу старих базних вектора $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$.

$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC_1} = \vec{SC_1} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\Rightarrow$ Формуле трансформација координата су $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Матрица преласка с ортонормиране базе $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ на ортонормирану базу $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ је ортогонална, те је

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Инверзне формуле трансформација координата су: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{12}+\frac{\sqrt{6}}{12} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теме коцке	Одговарајући вектор са почетком A	Координате темена у реперу Axyz	Координате темена у реперу Sx'y'z'
A	$\overrightarrow{AA}=\vec{0}=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3$	A(0,0,0) $x=0\ \ y=0\ \ z=0$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ $x'=-\frac{\sqrt3}{2}\ \ y'=0\ \ z'=0 \Rightarrow A\left(-\frac{\sqrt3}{2},0,0\right)$
B	$\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3$	B(1,0,0) $x=1\ \ y=0\ \ z=0$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{6}\\-\frac{\sqrt6}{3}\\0\end{pmatrix}$ $x'=-\frac{\sqrt3}{6}\ \ y'=-\frac{\sqrt6}{3}\ \ z'=0 \Rightarrow B\left(-\frac{\sqrt3}{6},-\frac{\sqrt6}{3},0\right)$
C	$\overrightarrow{AC}\underset{\uparrow}{=}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=1\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+0\vec{e}_3$ правило паралелограма	C(1,1,0) $x=1\ \ y=1\ \ z=0$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ $x'=\frac{\sqrt3}{6}\ \ y'=-\frac{\sqrt6}{6}\ \ z'=-\frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt3}{6},-\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$
D	$\overrightarrow{AD}=\vec{e}_2=0\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3$	D(0,1,0) $x=0\ \ y=1\ \ z=0$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{6}\\\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ $x'=-\frac{\sqrt3}{6}\ \ y'=\frac{\sqrt6}{6}\ \ z'=-\frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{\sqrt3}{6},\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$
A_1	$\overrightarrow{AA_1}=\vec{e}_3=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3$	$A_1(0,0,1)$ $x=0\ \ y=0\ \ z=1$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{6}\\\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ $x'=-\frac{\sqrt3}{6}\ \ y'=\frac{\sqrt6}{6}\ \ z'=\frac{\sqrt2}{2} \Rightarrow A_1\left(-\frac{\sqrt3}{6},\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt2}{2}\right)$
B_1	$\overrightarrow{AB_1}\underset{\uparrow}{=}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{e}_1+\vec{e}_3=1\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3$ правило паралелограма	$B_1(1,0,1)$ $x=1\ \ y=0\ \ z=1$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow B_1\left(\frac{\sqrt3}{6},-\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt2}{2}\right)$
C_1	$\overrightarrow{AC_1}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=1\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3$	$C_1(1,1,1)$ $x=1\ \ y=1\ \ z=1$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt3\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow C_1\left(\frac{\sqrt3}{2},0,0\right)$
D_1	$\overrightarrow{AD_1}\underset{\uparrow}{=}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{e}_2+\vec{e}_3=0\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3$ правило паралелограма	$D_1(0,1,1)$ $x=0\ \ y=1\ \ z=1$	$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\-\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt6}{3}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\\0\end{pmatrix}\Rightarrow D_1\left(\frac{\sqrt3}{6},\frac{\sqrt6}{3},0\right)$