2.5. Наћи вектор $\vec{x}$ ако је $\vec{x}\cdot\vec{a}=\alpha$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=\beta$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=\gamma$, при чему су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарни вектори, а $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ задати ненула скалари.

Решење:

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{a}&=\alpha \quad /\cdot\beta \\ \vec{x}\cdot\vec{b}&=\beta \quad /\cdot\alpha \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \beta\vec{x}\cdot\vec{a}&=\alpha\beta \\ \alpha\vec{x}\cdot\vec{b}&=\alpha\beta \end{aligned}\right\} \ominus$$

$$\beta\vec{x}\cdot\vec{a}-\alpha\vec{x}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{x}\cdot(\beta\vec{a}-\alpha\vec{b})=0 \Rightarrow \sphericalangle(\vec{x},\beta\vec{a}-\alpha\vec{b})=90^\circ \quad (1)$$

$\vec{x}\neq\vec{0}$ јер би за $\vec{x}=\vec{0}$ било $\vec{x}\cdot\vec{a}=\vec{0}\cdot\vec{a}=0$ по дефиницији
те би $\vec{x}\cdot\vec{a}=0\neq\alpha$ ↯
јер је
$\vec{x}\cdot\vec{a}=\alpha$ и
$\alpha\neq0$

$\beta\vec{a}-\alpha\vec{b}\neq\vec{0}$ јер би у супротном
$\vec{a}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\vec{b}$ јер је $\beta\neq0$, те би
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ били колинеарни, па би
компланарни били вектори
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ↯

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{a}&=\alpha \quad /\cdot\gamma \\ \vec{x}\cdot\vec{c}&=\gamma \quad /\cdot\alpha \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \gamma\vec{x}\cdot\vec{a}&=\alpha\gamma \\ \alpha\vec{x}\cdot\vec{c}&=\gamma\alpha \end{aligned}\right\} \ominus$$

$$\gamma\vec{x}\cdot\vec{a}-\alpha\vec{x}\cdot\vec{c}=0$$

$$\vec{x}\cdot(\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c})=0 \Rightarrow \sphericalangle(\vec{x},\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c})=90^\circ \quad (2)$$

већ смо доказали да $\vec{x}\neq\vec{0}$, а
$\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}\neq\vec{0}$ јер би у супротном
$\vec{a}=\frac{\alpha}{\gamma}\vec{c}$ јер је $\gamma\neq0$, те би
$\vec{a}$ и $\vec{c}$ били колинеарни, па би
компланарни били вектори
$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ↯

Докажимо сада да су вектори $\beta\vec{a}-\alpha\vec{b}$ и $\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}$ линеарно независни.

$$\lambda(\beta\vec{a}-\alpha\vec{b})+\mu(\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c})=\vec{0} \Rightarrow \lambda\beta\vec{a}-\lambda\alpha\vec{b}+\mu\gamma\vec{a}-\mu\alpha\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow (\lambda\beta+\mu\gamma)\vec{a}-\lambda\alpha\vec{b}-\mu\alpha\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda\beta+\mu\gamma=0 \quad \lambda\alpha=0 \quad \mu\alpha=0 \underset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \lambda\beta+\mu\gamma=0 \quad \lambda=0 \quad \mu=0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су линеарно независни јер су некомпланарни по услову задатка

Дакле, вектори $\beta\vec{a}-\alpha\vec{b}$ и $\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}$ су линеарно независни, те из (1) $\measuredangle(\vec{x},\beta\vec{a}-\alpha\vec{b})=90^\circ$ и из (2) $\measuredangle(\vec{x},\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c})=90^\circ$ следи да вектор $\vec{x}$ мора бити колинеаран са векторским производом вектора $\beta\vec{a}-\alpha\vec{b}$ и $\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}$. $\Rightarrow$ $\vec{x}=d(\beta\vec{a}-\alpha\vec{b})\times(\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c})$ за неко $d\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{x}=d\cdot(\beta\gamma\overset{=\vec{0}}{\vec{a}\times\vec{a}}-\beta\alpha\vec{a}\times\vec{c}-\alpha\gamma\vec{b}\times\vec{a}+\alpha^2\vec{b}\times\vec{c}) = d\cdot(\alpha\beta\vec{c}\times\vec{a}+\alpha\gamma\vec{a}\times\vec{b}+\alpha^2\vec{b}\times\vec{c})$$

дистрибутивност × према −

$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

$-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

$-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$

$/\cdot\vec{a}$ и важи дистрибутивност $\circ$ према $+$

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{a}=d(\alpha\beta(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{a}+\alpha\gamma(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+\alpha^2(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}) \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{a}=d(\alpha\beta[\vec{c},\vec{a},\vec{a}]+\alpha\gamma[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]+\alpha^2[\vec{b},\vec{c},\vec{a}])$$

по дефиницији мешовитог производа је $(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{a}=[\vec{c},\vec{a},\vec{a}]$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]$, $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{a}=d\alpha^2[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] \Longrightarrow \alpha=d\alpha^2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \underset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} 1=d\alpha[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \Rightarrow d=\frac{1}{\alpha[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}$$

$[\vec{c},\vec{a},\vec{a}]=0$, $[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]=0$

$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

$\vec{x}\cdot\vec{a}=\alpha$

$\alpha\neq 0$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\neq 0$ јер су вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарни

$$\Rightarrow \vec{x}=d\alpha(\beta\vec{c}\times\vec{a}+\gamma\vec{a}\times\vec{b}+\alpha\vec{b}\times\vec{c})=\frac{1}{\alpha[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}\cdot\alpha(\beta\vec{c}\times\vec{a}+\gamma\vec{a}\times\vec{b}+\alpha\vec{b}\times\vec{c})=\frac{1}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}\cdot(\alpha\vec{b}\times\vec{c}+\beta\vec{c}\times\vec{a}+\gamma\vec{a}\times\vec{b})$$

што се и тражило.

(2.6.) Одредити вектор $\vec{x}$ ако важи $\vec{u}\cdot\vec{x}=\alpha$, $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{v}$.

Решење:

$$\vec{v}\times\vec{u} \underset{\vec{v}=\vec{u}\times\vec{x}}{=} (\vec{u}\times\vec{x})\times\vec{u} \underset{\substack{\text{формула за}\\ \text{двоструки}\\ \text{векторски}\\ \text{производ}}}{=} (\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{u})\vec{u} \underset{\substack{\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2\\ \vec{x}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{x}=\alpha\\ \text{комутативност}\\ \text{скаларног}\\ \text{производа}}}{=} \|\vec{u}\|^2\vec{x}-\alpha\vec{u} \implies \|\vec{u}\|^2\vec{x}=\alpha\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u}$$

Приметимо да ако задатак има решење, тј. ако постоји вектор $\vec{x}$ такав да је $\vec{u}\cdot\vec{x}=\alpha$ и $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{v}$ онда мора бити $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=(\vec{u}\times\vec{x})\cdot\vec{u}=[\vec{u},\vec{x},\vec{u}]=0$. Дакле, ако $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$, задатак нема решења. Зато је у наставку $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

1) случај $\|\vec{u}\|^2\neq 0$, тј. $\vec{u}\neq\vec{0}$ и $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

$$\|\vec{u}\|^2\vec{x}=\alpha\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u} \qquad /:\|\vec{u}\|^2\neq 0$$

$$\vec{x}=\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}(\alpha\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u})$$

2) случај $\|\vec{u}\|^2=0$ тј. $\vec{u}=\vec{0}$ (тада је и $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$).

$$\begin{array}{lll} \|\vec{u}\|^2\vec{x}=\alpha\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{x}=\alpha & \vec{u}\times\vec{x}=\vec{v} \\ 0\cdot\vec{x}=\alpha\cdot\vec{0}+\vec{v}\times\vec{0} & \vec{0}\cdot\vec{x}=\alpha & \vec{0}\times\vec{x}=\vec{v} \\ \vec{0}=\vec{0}+\vec{0} & 0=\alpha & \vec{0}=\vec{v} \\ \vec{0}=\vec{0} & & \end{array}$$

Ако је $\alpha\neq 0$ или $\vec{v}\neq\vec{0}$, онда задатак нема решења.

Ако је $\alpha=0$ и $\vec{v}=\vec{0}$, онда је сваки вектор $\vec{x}$ решење.

Дакле, ако је $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$ не постоји тражени вектор $\vec{x}$, ако је $\vec{u}\neq\vec{0}$ и $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ постоји тачно један вектор $\vec{x}$ и он је $\vec{x}=\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}(\alpha\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u})$, ако је $\vec{u}=\vec{0}$ и ($\alpha\neq 0$ или $\vec{v}\neq\vec{0}$) не постоји тражени вектор $\vec{x}$, а ако је $\vec{u}=\vec{0}$, $\alpha=0$ и $\vec{v}=\vec{0}$, онда сваки вектор $\vec{x}$ представља решење.

2.7. Ако су $A(0,1,1)$, $B(2,3,5)$, $C(3,1,4)$ темена троугла, израчунати његову површину.

Решење:

$$\vec{AB} = [B]-[A] = (2,3,5)-(0,1,1) = (2-0,3-1,5-1) = (2,2,4)$$

$$\vec{AC} = [C]-[A] = (3,1,4)-(0,1,1) = (3-0,1-1,4-1) = (3,0,3)$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot \|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \| 6\vec{i} - (6-12)\vec{j} + (0-6)\vec{k} \| =$$

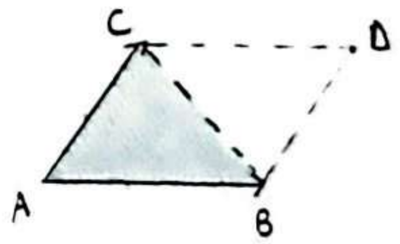
$$= \frac{1}{2} \| 6\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k} \| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2+6^2+(-6)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36+36+36} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36\cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$



$$P_{\square ABCD} = \|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$$

дужина вектора $\vec{AB}\times\vec{AC}$ једнака је површини паралелограма ког разапињу вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$

$$P = P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{\square ABCD} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$$

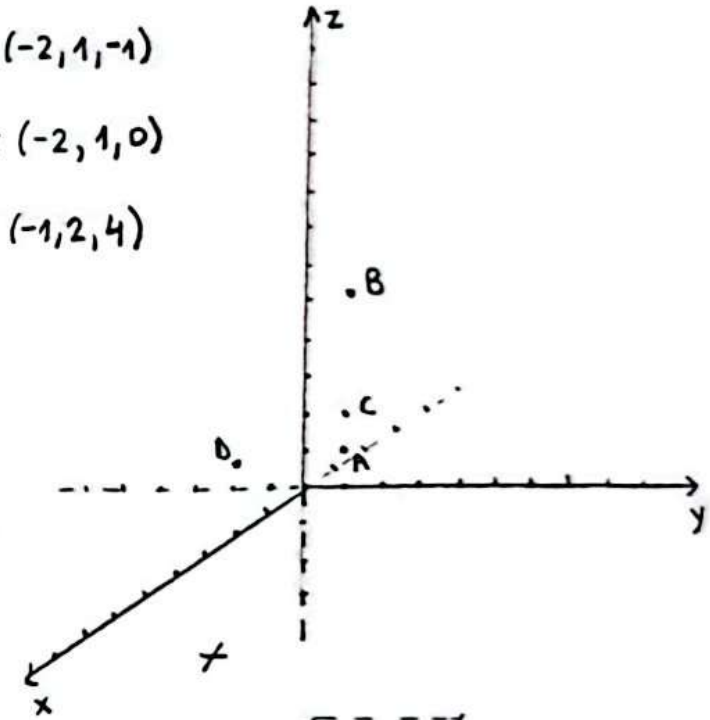
2.8. Ако су $A(0,1,1)$, $B(1,2,6)$, $C(0,1,2)$ и $D(2,0,2)$ темена тетраедра, израчунати његову запремину.

Решење:

$$\vec{DA} = [A]-[D] = (0,1,1)-(2,0,2) = (0-2,\ 1-0,\ 1-2) = (-2,1,-1)$$

$$\vec{DC} = [C]-[D] = (0,1,2)-(2,0,2) = (0-2,\ 1-0,\ 2-2) = (-2,1,0)$$

$$\vec{DB} = [B]-[D] = (1,2,6)-(2,0,2) = (1-2,\ 2-0,\ 6-2) = (-1,2,4)$$

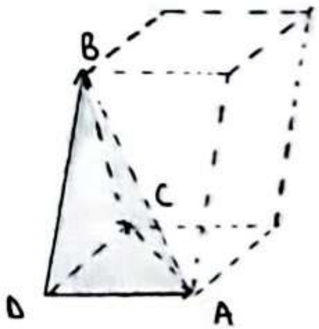


$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\vec{DA}\times\vec{DC})\cdot\vec{DB}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|(-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|(-2)\cdot(-1)\cdot(4-(-2)) + 1\cdot1\cdot(-8-1) + 0\right|$$

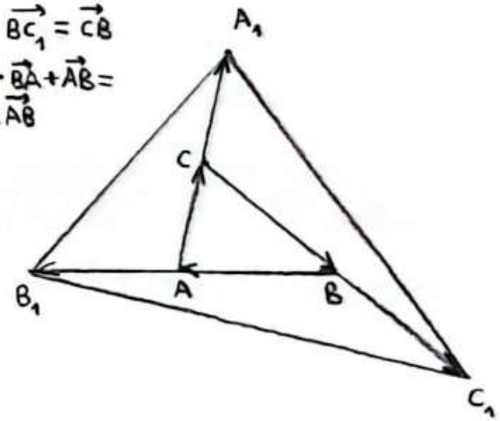
$$= \frac{1}{6}\cdot|2\cdot6-9| = \frac{1}{6}\cdot|12-9| = \frac{1}{6}\cdot|3| = \frac{1}{6}\cdot3 = \frac{1}{2}$$



$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\vec{DA}\times\vec{DC})\cdot\vec{DB}\right|$

јер је апсолутна вредност мешовитог производа једнака запремини паралелепипеда кога разапињу $\vec{DA}$, $\vec{DC}$ и $\vec{DB}$.

2.9. Дат је троугао ABC површине P. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?



<u>Решење:</u>

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{B_1A_1} \times \overrightarrow{B_1C_1} \| = \frac{1}{2} \| (\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AA_1}) \times (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC_1}) \| =$$

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \| (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \times (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) \| = \frac{1}{2} \| (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \times (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \| =$$

дистрибутивност × према +

$$= \frac{1}{2} \| (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \times (3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \| = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \times 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} \times 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC} \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| 3 \cdot \vec{0} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \vec{0} \| = \frac{1}{2} \| 7\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \| = \frac{7}{2} \| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \| =$$

$$-\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0} \qquad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \| = 7 \cdot P$$

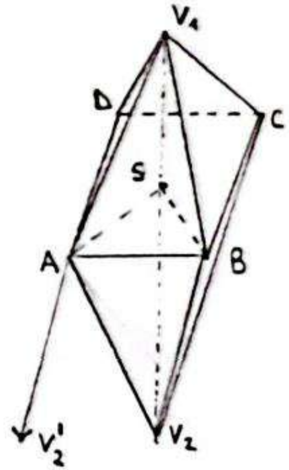
$$P = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} \|$$

Површина троугла $A_1B_1C_1$ је $7 \cdot P$.

(2.10.) Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a. Нека су V_1 и V_2 врхови датих пирамида и угао између правих AV_1 и BV_2 једнак $\frac{\pi}{4}$. Ако је висина једне пирамиде једнака a одредити висину друге пирамиде.

Решење: Разликујемо два случаја, у зависности од тога да ли су врхови пирамида с разних страна или су с исте стране равни основе.

S – центар квадрата $ABCD$. Нека је, без умањења општости, висина пирамиде с врхом V_1 једнака a.



Обе посматране пирамиде су праве, те је тачка S подножје висина из врхова V_1 и V_2 на основу $ABCD$. Дакле, тачке S, V_1 и V_2 су колинеарне, а важи и $\|\overrightarrow{SV_1}\| = a$.

$\overrightarrow{AV_1} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SV_1}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BV_2} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SV_2}$

$$\overrightarrow{AV_1}\cdot\overrightarrow{BV_2} = (\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SV_1})\cdot(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SV_2}) \underset{\uparrow}{=} \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{SV_2} + \overrightarrow{SV_1}\cdot\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SV_1}\cdot\overrightarrow{SV_2} \underset{\uparrow}{=} 0+0+0+\overrightarrow{SV_1}\cdot\overrightarrow{SV_2} = \overrightarrow{SV_1}\cdot\overrightarrow{SV_2}$$

дистрибутивност $\cdot$ према $+$

Дијагонале квадрата $ABCD$ су нормалне.

$\Rightarrow AS \perp BS \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS}) = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BS} = 0$

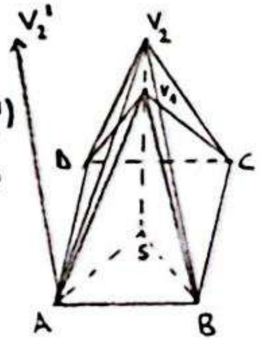
$SV_2 \perp (ABCD) \Rightarrow SV_2 \perp AS$ јер је $AS \subset (ABCD)$

$\Rightarrow AS \perp SV_2 \Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{SV_2}) = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{SV_2} = 0$

$SV_1 \perp (ABCD) \Rightarrow SV_1 \perp BS$ јер је $BS \subset (ABCD)$

$\Rightarrow \measuredangle(\overrightarrow{SV_1},\overrightarrow{BS}) = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{SV_1}\cdot\overrightarrow{BS} = 0$

1° случај V_1 и V_2 су с разних страна $ABCD$, односно $\measuredangle(\overrightarrow{SV_1},\overrightarrow{SV_2}) = 180^\circ = \pi$



Уочимо тачку V_2' такву да је $\overrightarrow{AV_2'} = \overrightarrow{BV_2}$. Тада је $AV_2' \parallel BV_2$, те је $\measuredangle(AV_1, BV_2) = \measuredangle(AV_1, AV_2')$ при чему се под углом између правих сматра оштар угао (или прав ако су праве нормалне).

$$\overrightarrow{AV_1}\cdot\overrightarrow{BV_2} = \overrightarrow{SV_1}\cdot\overrightarrow{SV_2} \Rightarrow \|\overrightarrow{AV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{BV_2}\|\cos\measuredangle(\overrightarrow{AV_1},\overrightarrow{BV_2}) = \|\overrightarrow{SV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{SV_2}\|\cos\measuredangle(\overrightarrow{SV_1},\overrightarrow{SV_2})$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{BV_2}\|\cos\measuredangle(\overrightarrow{AV_1},\overrightarrow{AV_2'}) = \|\overrightarrow{SV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{SV_2}\|\cos\pi$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{BV_2}\|\cos\frac{3\pi}{4} = \|\overrightarrow{SV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{SV_2}\|\cdot(-1) \Rightarrow \|\overrightarrow{AV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{BV_2}\|\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\|\overrightarrow{SV_1}\|\|\overrightarrow{SV_2}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{AV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{BV_2}\|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \|\overrightarrow{SV_1}\|\cdot\|\overrightarrow{SV_2}\|$$

$\hookleftarrow$ праве AV_1 и BV_2 граде угао од $\frac{\pi}{4}$ и $\cos\measuredangle(\overrightarrow{AV_1},\overrightarrow{AV_2'}) = \cos\measuredangle(\overrightarrow{AV_1},\overrightarrow{BV_2}) \le 0$, те је $\measuredangle(\overrightarrow{AV_1},\overrightarrow{BV_2}) = \frac{3\pi}{4}$

2° случај V_1 и V_2 су са исте стране $ABCD$, односно $\sphericalangle(\vec{SV_1}, \vec{SV_2}) = 0$. Нека је V_2' таква да је $\vec{AV_2'} = \vec{BV_2}$. $\Rightarrow AV_2' \parallel BV_2 \Rightarrow \sphericalangle(\vec{AV_1}, \vec{BV_2}) = \sphericalangle(\vec{AV_1}, \vec{AV_2'})$

$$\vec{AV_1} \circ \vec{BV_2} = \vec{SV_1} \circ \vec{SV_2} \Rightarrow \|\vec{AV_1}\| \cdot \|\vec{BV_2}\| \cos \sphericalangle(\vec{AV_1}, \vec{BV_2}) = \|\vec{SV_1}\| \, \|\vec{SV_2}\| \cos \sphericalangle(\vec{SV_1}, \vec{SV_2}) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \|\vec{AV_1}\| \, \|\vec{BV_2}\| \cos \frac{\pi}{4} = \|\vec{SV_1}\| \, \|\vec{SV_2}\| \cos 0$$

Праве AV_1 и BV_2 граде угао $\frac{\pi}{4}$ и $\cos \sphericalangle(\vec{AV_1}, \vec{BV_2}) = \cos \sphericalangle(\vec{AV_1}, \vec{AV_2'}) \geq 0$

$$\Rightarrow \|\vec{AV_1}\| \cdot \|\vec{BV_2}\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \|\vec{SV_1}\| \cdot \|\vec{SV_2}\| \cdot 1 \Rightarrow \|\vec{AV_1}\| \cdot \|\vec{BV_2}\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \|\vec{SV_1}\| \cdot \|\vec{SV_2}\|.$$

У оба случаја важи $\|\vec{AV_1}\| \cdot \|\vec{BV_2}\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \|\vec{SV_1}\| \cdot \|\vec{SV_2}\|$.

$$V_1S \perp (ABCD),\ AS \subset (ABCD) \Rightarrow V_1S \perp AS \xRightarrow[\text{теорема}]{\text{Питагорина}} \|\vec{AV_1}\| = \sqrt{\|\vec{AS}\|^2 + \|\vec{SV_1}\|^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{4a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$\|\vec{AS}\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ као половина дужине дијагонале квадрата $ABCD$ странице a

$\|\vec{SV_1}\| = a$

Нека је $h = \|\vec{SV_2}\|$ тражена висина пирамиде са врхом V_2.

$$V_2S \perp (ABCD),\ BS \subset (ABCD) \Rightarrow V_2S \perp BS \xRightarrow[\text{теорема}]{\text{Питагорина}} \|\vec{BV_2}\| = \sqrt{\|\vec{BS}\|^2 + \|\vec{SV_2}\|^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$$

$\|\vec{BS}\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ као половина дужине дијагонале квадрата $ABCD$ странице a

$\|\vec{SV_2}\| = h$

Заменом $\|\vec{AV_1}\|$, $\|\vec{BV_2}\|$, $\|\vec{SV_1}\|$, $\|\vec{SV_2}\|$, редом, са $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$, a, h у $\|\vec{AV_1}\| \cdot \|\vec{BV_2}\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \|\vec{SV_1}\| \cdot \|\vec{SV_2}\|$ добијамо

$$\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = ah. \quad /:a \neq 0 \qquad \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2} = h \Rightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}}_{\geq 0} = \underbrace{h}_{\geq 0} \quad /^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{2} + h^2\right) = h^2 \Rightarrow \frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{4}h^2 = h^2 \Rightarrow \frac{3}{8}a^2 = h^2 - \frac{3}{4}h^2 \Rightarrow \frac{3}{8}a^2 = \frac{1}{4}h^2 \quad /\cdot 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}a^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{2}a^2} = a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Тражена висина друге пирамиде износи $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

(2.11.) Нека је ABC произвољан троугао у равни. Доказати да је збир три вектора који су спољашње нормале на ивице троугла, а чији је интензитет једнак дужини одговарајуће ивице, једнак нули.

Решење: Означимо са α раван троугла ABC, а са $\vec{n}$ јединични вектор нормале равни α. Како је $\|\vec{n}\|=1\neq 0$, то је $\vec{n}\neq\vec{0}$, а важи и $\vec{AB}\neq\vec{0}$, $\vec{BC}\neq\vec{0}$, $\vec{CA}\neq\vec{0}$ јер су A, B и C темена троугла.

$\vec{u}$ - спољашњи вектор нормале на ивици AB чија је норма $\|\vec{AB}\|$

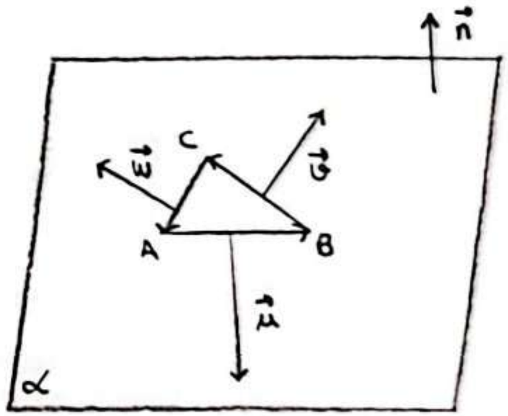
$\measuredangle(\vec{u},\vec{AB})=90^\circ$, $\measuredangle(\vec{u},\vec{n})=90^\circ$, $\vec{u}\neq\vec{0}$ јер је $\|\vec{u}\|=\|\vec{AB}\|\neq 0$

$\vec{n}\perp\alpha$

$\vec{u}\subset\alpha$

те је

$\measuredangle(\vec{u},\vec{n})=90^\circ$



$\Rightarrow$ $\vec{u}=\vec{AB}\times\vec{n}$ јер вектор $\vec{u}$ има правац нормале на раван коју разапињу линеарно независни вектори $\vec{AB}$ и $\vec{n}$ ($\vec{AB}\subset\alpha$, $\vec{n}\perp\alpha$), $\vec{u}$ има смер вектора $\vec{AB}\times\vec{n}$ одређен правилом десне руке, $\vec{u}$ има норму $\|\vec{AB}\|$, а важи и

$\|\vec{AB}\times\vec{n}\|=\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{n}\|\sin\measuredangle(\vec{AB},\vec{n})=\|\vec{AB}\|\cdot 1\cdot\sin 90^\circ=\|\vec{AB}\|\cdot 1\cdot 1=\|\vec{AB}\|$

$\measuredangle(\vec{AB},\vec{n})=90^\circ$ јер је $\vec{n}\perp\alpha$, $\vec{AB}\subset\alpha$

$\vec{v}$ - спољашњи вектор нормале на ивици BC чија је норма $\|\vec{BC}\|$

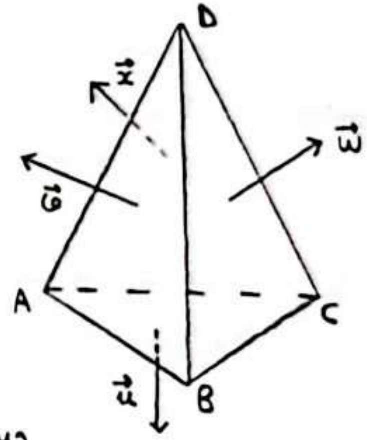
$\vec{w}$ - спољашњи вектор нормале на ивици CA чија је норма $\|\vec{CA}\|$

Слично као што смо доказали да важи $\vec{u}=\vec{AB}\times\vec{n}$ се доказује $\vec{v}=\vec{BC}\times\vec{n}$ и $\vec{w}=\vec{CA}\times\vec{n}$.

$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{AB}\times\vec{n}+\vec{BC}\times\vec{n}+\vec{CA}\times\vec{n}=(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})\times\vec{n}=(\vec{AC}+\vec{CA})\times\vec{n}=\vec{AA}\times\vec{n}=\vec{0}\times\vec{n}=\vec{0}$, што се и тражило.

2.12. Нека је ABCD тетраедар. Доказати да је збир четири вектора који су спољашње нормале на плосни тетраедра, а интензитет им је једнак површини одговарајуће плосни, једнак нули.

Решење: $\vec{u}$ - вектор спољашње нормале на плосни ABC чија је норма једнака површини плосни ABC, тј. $\frac{1}{2}\|\vec{AC}\times\vec{AB}\|$.



Приметимо да је $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB}$, јер вектор $\frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB}$ има правац нормале на раван коју разапињу вектори $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$, а то је раван плосни ABC, смер вектора $\frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB}$ је исти као смер вектора $\vec{AC}\times\vec{AB}$ јер је $\frac{1}{2}>0$ и одређен је правилом десне руке и поклапа се са смером вектора $\vec{u}$, а важи и да је $\|\frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB}\| = \frac{1}{2}\|\vec{AC}\times\vec{AB}\| = \|\vec{u}\|$.

Слично се доказује да ако су $\vec{v}, \vec{w}$ и $\vec{x}$ вектори спољашње нормале на плоснима ABD, BCD и ACD, редом, чије су норме једнаке површинама одговарајућих плосни ABD, BCD, ACD, редом, важи $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{AB}\times\vec{AD}$, $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB}$ и $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC}$.

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB}\times\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AC}-\vec{AD})\times\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{DA})\times\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} \underset{\vec{AC}+\vec{DA}=\vec{DA}+\vec{AC}=\vec{DC}}{=} \frac{1}{2}\vec{DC}\times\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{CD}\times(-\vec{AB}+\vec{CB}) + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{CD}\times(\vec{BA}+\vec{CB}) + \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{AC} \underset{\substack{\vec{BA}+\vec{CB}=\vec{CB}+\vec{BA}=\vec{CA}\\ \vec{AD}\times\vec{AC}=-\vec{AD}\times\vec{CA}}}{=} \frac{1}{2}\vec{CD}\times\vec{CA} - \frac{1}{2}\vec{AD}\times\vec{CA} =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{CD}-\vec{AD})\times\vec{CA} \underset{\vec{CD}-\vec{AD}=\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{CA}}{=} \frac{1}{2}\vec{CA}\times\vec{CA} = \frac{1}{2}\cdot\vec{0} = \vec{0},$$ што је и требало доказати.

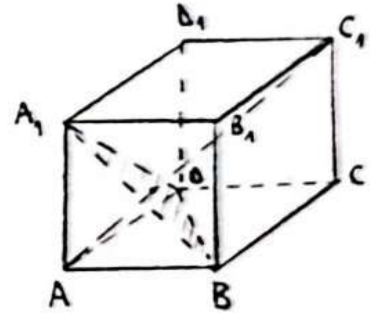
2.13. Ако је у правоуглом паралелепипеду $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дијагонала AC_1 нормална на раван која садржи тачке A_1, B, D доказати да је тај паралелепипед коцка.

<u>Решење:</u> Правоугли паралелепипед је паралелепипед коме су све суседне ивице међусобно нормалне, односно то је квадар.

$$\vec{AC_1} \underset{\text{правило надовезивања}}{=} \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CC_1} = \vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$$

$\vec{BC}=\vec{AD}$ јер је $\square ABCD$ паралелограм

$$\vec{CC_1} \underset{\square BCC_1B_1 \text{ је паралелограм}}{=} \vec{BB_1} \overset{\square ABB_1A_1 \text{ је паралелограм}}{=} \vec{AA_1}$$



$AC_1 \perp (A_1BD) \Rightarrow AC_1 \perp BD$ и $AC_1 \perp BA_1 \Rightarrow \vec{AC_1}\cdot\vec{BD}=0$ и $\vec{AC_1}\cdot\vec{BA_1}=0$

$$\vec{BD} \underset{\text{правило надовезивања}}{=} \vec{BA}+\vec{AD} = -\vec{AB}+\vec{AD} \qquad \vec{BA_1} = \vec{BA}+\vec{AA_1} = -\vec{AB}+\vec{AA_1}$$

$$0=\vec{AC_1}\cdot\vec{BD} = (\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1})\cdot(-\vec{AB}+\vec{AD}) \underset{\text{дистрибутивност} \cdot \text{према} +}{=} -\vec{AB}\cdot\vec{AB}+\cancel{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}-\cancel{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}+\vec{AD}\cdot\vec{AD}-\overset{=0}{\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}}+\overset{=0}{\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}} \underset{\uparrow}{=} -\|\vec{AB}\|^2+\|\vec{AD}\|^2 \Rightarrow \|\vec{AB}\|^2=\|\vec{AD}\|^2 \Rightarrow \|\vec{AB}\| \overset{(1)}{=} \|\vec{AD}\|$$

$\vec{AB}\cdot\vec{AB}=\|\vec{AB}\|^2$

$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\vec{AD}\cdot\vec{AB}$ јер је $\cdot$ комутативан

$\vec{AD}\cdot\vec{AD}=\|\vec{AD}\|^2$

$AA_1 \perp AB \Rightarrow \measuredangle(\vec{AA_1},\vec{AB})=90^\circ \Rightarrow \vec{AA_1}\cdot\vec{AB}=0$

$AA_1 \perp AD \Rightarrow \measuredangle(\vec{AA_1},\vec{AD})=90^\circ \Rightarrow \vec{AA_1}\cdot\vec{AD}=0$

$$0=\vec{AC_1}\cdot\vec{BA_1} = (\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1})\cdot(-\vec{AB}+\vec{AA_1}) \underset{\text{дистрибутивност} \cdot \text{према} +}{=} -\vec{AB}\cdot\vec{AB}+\cancel{\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}}-\overset{=0}{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}+\overset{=0}{\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}}-\cancel{\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AA_1} \underset{\uparrow}{=} -\|\vec{AB}\|^2+\|\vec{AA_1}\|^2 \Rightarrow \|\vec{AB}\|^2=\|\vec{AA_1}\|^2 \Rightarrow \|\vec{AB}\| \overset{(2)}{=} \|\vec{AA_1}\|$$

$\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}=\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}$ јер је $\cdot$ комутативан

$AD \perp AB \Rightarrow \measuredangle(\vec{AD},\vec{AB})=90^\circ \Rightarrow \vec{AD}\cdot\vec{AB}=0$

$AD \perp AA_1 \Rightarrow \measuredangle(\vec{AD},\vec{AA_1})=90^\circ \Rightarrow \vec{AD}\cdot\vec{AA_1}=0$

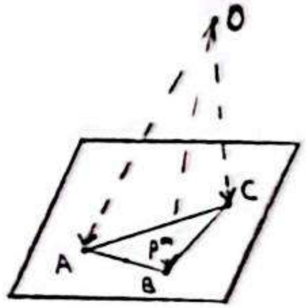
$\vec{AA_1}\cdot\vec{AA_1}=\|\vec{AA_1}\|^2$

Дакле, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ је квадар за чије ивице AB, AD и AA_1 важи да су једнаких дужина јер је $\|\vec{AD}\| \overset{(1)}{=} \|\vec{AB}\| \overset{(2)}{=} \|\vec{AA_1}\|$, те је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка.

(2.14) Ако су A, B, C фиксиране неколинеарне тачке и P произвољна тачка, доказати да је $\vec{PA}\times\vec{AB}=\vec{PB}\times\vec{BC}=\vec{PC}\times\vec{CA}$ ако и само ако је P тежиште троугла ABC.

Решење: Уочимо произвољну тачку O која не припада равни троугла ABC.

Тада су вектори $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ линеарно независни, те чине базу векторског простора V димензије 3. Важи да се сваки вектор може изразити на јединствен начин преко вектора базе, те постоје јединствени скалари $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такви да је $\vec{OP}=\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}+\gamma\vec{OC}$.



$\vec{PA}=\vec{OA}-\vec{OP}=\vec{OA}-(\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}+\gamma\vec{OC})=\vec{OA}-\alpha\vec{OA}-\beta\vec{OB}-\gamma\vec{OC}=(1-\alpha)\vec{OA}-\beta\vec{OB}-\gamma\vec{OC}$

$\vec{PB}=\vec{OB}-\vec{OP}=\vec{OB}-(\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}+\gamma\vec{OC})=\vec{OB}-\alpha\vec{OA}-\beta\vec{OB}-\gamma\vec{OC}=-\alpha\vec{OA}+(1-\beta)\vec{OB}-\gamma\vec{OC}$

$\vec{PC}=\vec{OC}-\vec{OP}=\vec{OC}-(\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}+\gamma\vec{OC})=\vec{OC}-\alpha\vec{OA}-\beta\vec{OB}-\gamma\vec{OC}=-\alpha\vec{OA}-\beta\vec{OB}+(1-\gamma)\vec{OC}$

$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=-\vec{OA}+\vec{OB}$ $\quad\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=-\vec{OB}+\vec{OC}$ $\quad\vec{CA}=\vec{OA}-\vec{OC}$

$\Rightarrow \vec{PA}\times\vec{AB}=((1-\alpha)\vec{OA}-\beta\vec{OB}-\gamma\vec{OC})\times(-\vec{OA}+\vec{OB})=-(1-\alpha)\underbrace{\vec{OA}\times\vec{OA}}_{\vec{0}}+(1-\alpha)\vec{OA}\times\vec{OB}+\beta\vec{OB}\times\vec{OA}-\beta\underbrace{\vec{OB}\times\vec{OB}}_{\vec{0}}+\gamma\vec{OC}\times\vec{OA}-\gamma\vec{OC}\times\vec{OB}=$

$-\vec{OC}\times\vec{OB}=\vec{OB}\times\vec{OC}$
$\vec{OB}\times\vec{OA}=-\vec{OA}\times\vec{OB}$

$=(1-\alpha)\vec{OA}\times\vec{OB}-\beta\vec{OA}\times\vec{OB}+\gamma\vec{OC}\times\vec{OA}+\gamma\vec{OB}\times\vec{OC}=(1-\alpha-\beta)\vec{OA}\times\vec{OB}+\gamma\vec{OB}\times\vec{OC}+\gamma\vec{OC}\times\vec{OA}$

$\vec{PB}\times\vec{BC}=(-\alpha\vec{OA}+(1-\beta)\vec{OB}-\gamma\vec{OC})\times(-\vec{OB}+\vec{OC})=\alpha\vec{OA}\times\vec{OB}-\alpha\vec{OA}\times\vec{OC}-(1-\beta)\underbrace{\vec{OB}\times\vec{OB}}_{\vec{0}}+(1-\beta)\vec{OB}\times\vec{OC}+\gamma\vec{OC}\times\vec{OB}-\gamma\underbrace{\vec{OC}\times\vec{OC}}_{\vec{0}}=$

$-\vec{OA}\times\vec{OC}=\vec{OC}\times\vec{OA}$
$\vec{OC}\times\vec{OB}=-\vec{OB}\times\vec{OC}$

$=\alpha\vec{OA}\times\vec{OB}+\alpha\vec{OC}\times\vec{OA}+(1-\beta)\vec{OB}\times\vec{OC}-\gamma\vec{OB}\times\vec{OC}=\alpha\vec{OA}\times\vec{OB}+(1-\beta-\gamma)\vec{OB}\times\vec{OC}+\alpha\vec{OC}\times\vec{OA}$

$\vec{PC}\times\vec{CA}=(-\alpha\vec{OA}-\beta\vec{OB}+(1-\gamma)\vec{OC})\times(\vec{OA}-\vec{OC})=-\alpha\underbrace{\vec{OA}\times\vec{OA}}_{\vec{0}}+\alpha\vec{OA}\times\vec{OC}-\beta\vec{OB}\times\vec{OA}+\beta\vec{OB}\times\vec{OC}+(1-\gamma)\vec{OC}\times\vec{OA}-(1-\gamma)\underbrace{\vec{OC}\times\vec{OC}}_{\vec{0}}=$

$-\vec{OB}\times\vec{OA}=\vec{OA}\times\vec{OB}$
$\vec{OA}\times\vec{OC}=-\vec{OC}\times\vec{OA}$

$=\beta\vec{OA}\times\vec{OB}+\beta\vec{OB}\times\vec{OC}+(1-\gamma-\alpha)\vec{OC}\times\vec{OA}$

Докажимо да из линеарне независности вектора $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ следи линеарна независност вектора $\vec{OA}\times\vec{OB}$, $\vec{OB}\times\vec{OC}$, $\vec{OC}\times\vec{OA}$.

$(\underbrace{\vec{OA}}_{\vec{u}}\times\underbrace{\vec{OB}}_{\vec{v}})\times(\underbrace{\vec{OB}\times\vec{OC}}_{\vec{w}})=(\vec{OA}\cdot(\vec{OB}\times\vec{OC}))\vec{OB}-(\vec{OB}\cdot(\vec{OB}\times\vec{OC}))\vec{OA}=[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]\vec{OB}-(\underbrace{(\vec{OB}\times\vec{OC})\cdot\vec{OB}}_{})\vec{OA}=[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]\vec{OB}$

формула за двоструки векторски производ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$ примењена за $\vec{u}=\vec{OA}$, $\vec{v}=\vec{OB}$ и $\vec{w}=\vec{OB}\times\vec{OC}$

$\vec{OA}\cdot(\vec{OB}\times\vec{OC})=(\vec{OB}\times\vec{OC})\cdot\vec{OA}=[\vec{OB},\vec{OC},\vec{OA}]=[\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}]$ по дефиницији и особинама мешовитог производа $\vec{OB}\cdot(\vec{OB}\times\vec{OC})=(\vec{OB}\times\vec{OC})\cdot\vec{OB}$

$[\vec{OB},\vec{OC},\vec{OB}]=0$ јер су вектори $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ компланарни, те је $((\vec{OB}\times\vec{OC})\cdot\vec{OB})\vec{OA}=[\vec{OB},\vec{OC},\vec{OB}]\vec{OA}=0\cdot\vec{OA}=\vec{0}$

$\Rightarrow \; [\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}] = ((\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\times(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}))\cdot(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}) = ([\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}) = [\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}](\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})) =$

$= [\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}](\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB} = [\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]\cdot[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}] \neq 0$ јер вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ нису компланарни

$\Rightarrow$ Вектори $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}$ су линеарно независни (*)

$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC} + \gamma\,\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA} = \alpha\,\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} + (1-\beta-\gamma)\,\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC} + \alpha\,\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA} =$

$= \beta\,\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} + \beta\,\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC} + (1-\gamma-\alpha)\,\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 1-\alpha-\beta = \alpha = \beta, \; \gamma = 1-\beta-\gamma = \beta, \; \gamma = \alpha = 1-\gamma-\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$ и $1-\alpha-\alpha=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow P$ је тежиште троугла ABC

$\overrightarrow{OP} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC}$

Тиме је доказано $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow P$ је тежиште троугла ABC