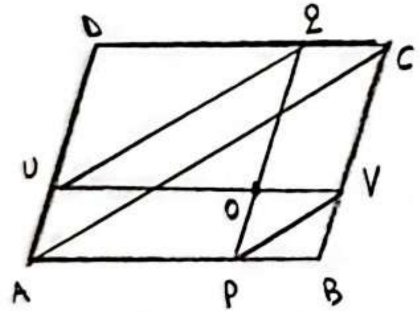
(1.17.) Дат је паралелограм $ABCD$ и у његовој унутрашњости тачка O. Две праве које садрже тачку O и паралелне су страницама паралелограма, секу странице паралелограма у тачкама $P \in AB$, $Q \in CD$, $U \in AD$ и $V \in BC$. Доказати да се праве PV, QU и AC секу у једној тачки или су паралелне.

Решење: Праве QU и AC припадају равни паралелограма $ABCD$, те оне не могу бити мимоилазне. Разликујемо два случаја за међусобни положај правих QU и AC, да су оне паралелне или да се секу у једној тачки.

1) случај Праве QU и AC су паралелне. Довољно би било доказати да је $PV \parallel AC$.

$QU \parallel AC \Rightarrow$ Вектори $\vec{UQ}$ и $\vec{AC}$ су колинеарни, што значи да постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\vec{UQ} = \lambda \cdot \vec{AC}$.



Права која садржи тачку O и паралелна је страници AB паралелограма $ABCD$ сече AD у тачки U и сече BC у тачки V по услову задатка. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} UV \parallel AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \Rightarrow UD \parallel VC \end{array}\right\} \Rightarrow$ Четвороугао $UVCD$ је паралелограм.

$\Downarrow$

$\vec{UD} = \vec{VC}$

Права која садржи тачку O и паралелна је страници BC паралелограма $ABCD$ сече AB у тачки P и сече CD у тачку Q по услову задатка. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} PQ \parallel BC \parallel AD \\ AB \parallel CD \Rightarrow AP \parallel DQ \end{array}\right\} \Rightarrow$ Четвороугао $APQD$ је паралелограм

$\Downarrow$

$\vec{DQ} = \vec{AP}$

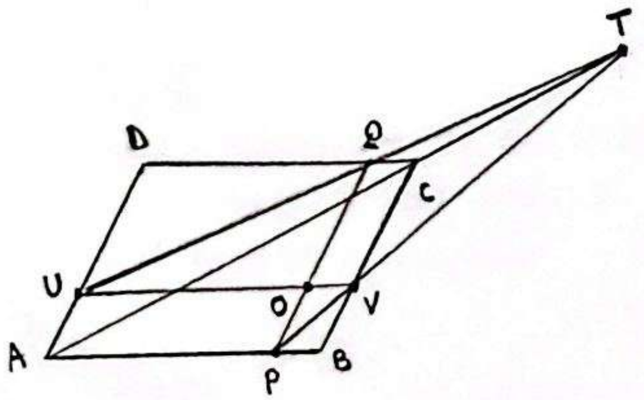
$$\overrightarrow{PV} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{правило}\\ \text{надовезања}}}{=} \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CV} = -\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{VC} \underset{\substack{\uparrow\\ \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{DQ}\\ \overrightarrow{VC}=\overrightarrow{UD}}}{=} -\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{UD} = -(\overrightarrow{UD}+\overrightarrow{DQ})+\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{UQ}+\overrightarrow{AC} \underset{\substack{\uparrow\\ \overrightarrow{UQ}=\lambda\cdot\overrightarrow{AC}}}{=} -\lambda\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\overrightarrow{AC}$$

Како је $\overrightarrow{PV}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$, то су вектори $\overrightarrow{PV}$ и $\overrightarrow{AC}$ колинеарни, те су праве PV и AC паралелне.

Дакле, ако су UQ и AC паралелне, онда су PV и AC паралелне, односно PV, QU и AC су паралелне.

2) случај Праве UQ и AC се секу у тачки T. Довољно је доказати да тачка T припада правој PV. Посматрамо троугао ACD. Тачке U, Q и T су на правама одређеним страницама AD, DC и AC, редом, троугла ACD. Како је тачка O у унутрашњости паралелограма $ABCD$ по услову задатка, то за праве PQ и UV које су паралелне са AD и AB, редом, важи да морају сећи CD и AD у тачкама Q и U које припадају отвореним дужима CD и AD, редом. Дакле, тачке U и Q се разликују од темена A, C и D троугла ACD. Важи и да је тачка T различита од темена троугла ACD. Заиста, ако би $T=D$ онда би $DC=DQ=TQ=TU=DU=DA$ као праве, али онда би тачке A, C и D биле колинеарне што је у контрадикцији са тим да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.



Ако би $T=A$, онда би $\underbrace{AD = AU = TU = TQ}_{\text{праве}}$, те би тачке A, D и Q биле колинеарне, али то је

у контрадикцији са условом задатка да је $PQ \parallel AD$ и са тим да тачка Q припада отвореној дужи DC.

Ако би $T=C$, онда би $CD = CQ = TQ = QU$ као праве, те би тачке C, D и U биле колинеарне, али то је у контрадикцији са условом задатка да је $UV \parallel CD$ и са тим да тачка U припада отвореној дужи AD.

Дакле, тачке U, Q и T се разликују од темена троугла ACD.

Како се праве UQ и AC секу у тачки T, то су тачке U, Q, T колинеарне, те на основу Менелајеве теореме $\dfrac{\overrightarrow{AU}}{\overrightarrow{UD}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{DQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CT}}{\overrightarrow{TA}} = -1$ ☆

По услову задатка, права кроз тачку O паралелна са AB сече AD у тачки U, а BC у тачки V. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} UV \parallel AB \\ AD \parallel BC \Rightarrow AU \parallel BV \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Четвороугао } ABVU \text{ је паралелограм.}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{BV} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} UV \parallel AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \Rightarrow UD \parallel VC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Четвороугао } UVCD \text{ је паралелограм.}$$

$$\overrightarrow{UD} = \overrightarrow{VC} \qquad (2)$$

По услову задатка, права кроз тачку O паралелна са BC сече AB у тачки P, а CD у тачки Q. $\Rightarrow$ $PQ \parallel BC \parallel AD$

$$\left.\begin{array}{l} PQ \parallel AD \\ AB \parallel DC \Rightarrow AP \parallel DQ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{четвороугао } APQD \text{ је паралелограм.} \Rightarrow \vec{DQ} = \vec{AP} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} PQ \parallel BC \\ AB \parallel DC \Rightarrow PB \parallel QC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{четвороугао } PBCQ \text{ је паралелограм.} \Rightarrow \vec{QC} = \vec{PB} \quad (4)$$

$$\underset{(1),(2),(3),(4)}{\overset{☆}{\Rightarrow}} \quad -1 \overset{☆}{=} \frac{\vec{AU}}{\vec{UB}} \cdot \frac{\vec{DQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} = \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} \cdot \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{CT}}{\vec{TA}} \qquad \#$$

(1) $\vec{AU} = \vec{BV}$

(2) $\vec{UB} = \vec{VC}$

(3) $\vec{DQ} = \vec{AP}$

(4) $\vec{QC} = \vec{PB}$

Посматрамо троугао ABC. Приметимо да тачке P, V и T припадају правама одре-ђеним страницама AB, BC, CA, редом, троугла ABC. Како је тачка O у унутрашњости паралелограма $ABCD$ по услову задатка, то за праве PQ и UV које су паралелне са AD и AB, редом, важи да морају сећи AB и BC у тачкама P и V које припадају отвореним дужима AB и BC. Дакле, тачке P и V се разликују од темена A, B и C троугла ABC.

Важи и да је тачка T различита од темена A, B и C троугла ABC. Заиста, ако би $T=B$ онда би тачка $B=T$ припадала правој AC (јер T припада правој AC зато што се праве UQ и AC секу у тачки T), али то је у контрадикцији са условом задатка да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

Ако би $T=A$, онда би $AD=AU=TU=TQ$ као праве, те би тачке A, D и Q биле колинеарне, али то је у контрадикцији са условом задатка да је $PQ \parallel AD$ и са тим да тачка Q припада отвореној дужи CD (доказано на почетку 2) случаја).

Ако би $T=C$, онда би $CD=CQ=TQ=QU$ као праве, те би тачке C, D и U биле колинеарне, али то је у контрадикцији са условом задатка да је $UV \parallel CD$ и са тим да тачка U припада отвореној дужи AD (доказано на почетку 2) случаја).

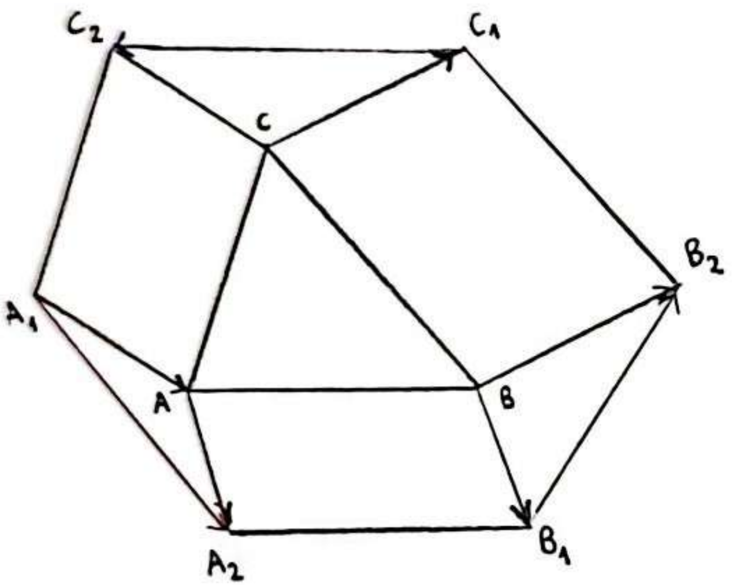
Дакле, тачке P, V и T се разликују од темена троугла ABC.

У # смо доказали да је $\frac{\overrightarrow{BV}}{\overrightarrow{VC}} \cdot \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{CT}}{\overrightarrow{TA}} = -1$, тј. $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BV}}{\overrightarrow{VC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CT}}{\overrightarrow{TA}} = -1$, те на основу Менелајеве теореме следи да су тачке P, V и T колинеарне, те тачка T припада правој PV.

Дакле, ако се праве UQ и AC секу у тачки T, онда се праве PV, UQ и AC секу у тачки T.

1.18. Над страницама троугла ABC конструисани су паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Доказати да је $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$.

Решење:



правило надовезивања

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} &= \overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AA_2}\\ \overrightarrow{B_1B_2} &= \overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BB_2}\\ \overrightarrow{C_1C_2} &= \overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2}\end{aligned}\right\}\ \oplus$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BB_2}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2}$$

$$=\overrightarrow{C_2C}+\cancel{\overrightarrow{BB_1}}-\cancel{\overrightarrow{BB_1}}+\cancel{\overrightarrow{CC_1}}-\cancel{\overrightarrow{CC_1}}+\overrightarrow{CC_2}=\vec{0}$$, што се и тражило

$\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{C_2C}$ јер дужи A_1C и AC_2 имају заједничко средиште као дијагонале паралелограма CAA_1C_2

$\overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{BB_1}$ јер дужи AB_1 и A_2B имају заједничко средиште као дијагонале паралелограма ABB_1A_2

$\overrightarrow{B_1B}=-\overrightarrow{BB_1}$ јер је $\overrightarrow{B_1B}$ супротан вектор вектора $\overrightarrow{BB_1}$

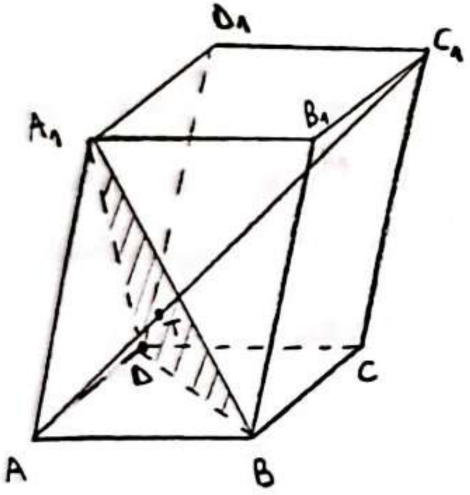
$\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{CC_1}$ јер дужи BC_1 и B_2C имају заједничко средиште као дијагонале паралелограма BCC_1B_2

$\overrightarrow{C_1C}=-\overrightarrow{CC_1}$

$\overrightarrow{CC_2}=-\overrightarrow{C_2C}$

1.19. Дат је паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказати да је продор T дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1.

Решење:



На основу задатка 1.7. да би тачка T била тежиште скупа тачака $\{B, D, A_1\}$, довољно је доказати да је $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$.

Тачка T представља тачку продора дијагонале AC_1 у раван BDA_1, те је тачка T на правој AC_1, те су тачке A, T и C_1 колинеарне што значи да су вектори $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ колинеарни. То значи да је $\overrightarrow{AT} = \lambda\cdot\overrightarrow{AC_1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1} = \underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$$

правило надовезивања

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ јер дужи BD и CA имају заједничко средиште зато што је четвороугао $ABCD$ паралелограм

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$

□BCC_1B_1 је паралелограм

□ABB_1A_1 је паралелограм

$$\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \lambda\cdot\overrightarrow{AC_1} = \lambda\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}) = \lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\cdot\overrightarrow{AD}+\lambda\cdot\overrightarrow{AA_1}$$

Како је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралелепипед, то су тачке A, B, D и A_1 некомпланарне (у супротном би пљосни $ABCD$ и ADD_1A_1 припадале истој равни, што није могуће).

Тачка T задовољава $\vec{AT} = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AD} + \lambda \cdot \vec{AA_1}$.

Како тачка T припада равни троугла BDA_1, то на основу задатка 1.6 следи да је $\lambda + \lambda + \lambda = 1$, тј. $3\lambda = 1$, односно $\lambda = \frac{1}{3}$.

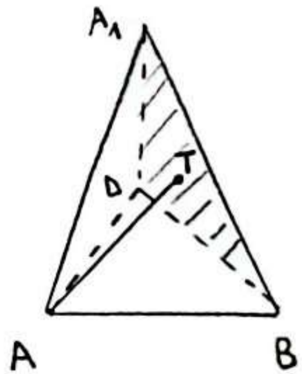
$$\Rightarrow \vec{AT} = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AD} + \lambda \cdot \vec{AA_1} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AA_1} =$$
$$= \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$$

$\Rightarrow$ Тачка T је тежиште троугла BDA_1, што је и требало доказати.

Подсетник (задатак 1.6)

Тачке A, B, D и A_1 су некомпланарне.

Да би тачка T одређена са $\vec{AT} = \alpha \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AD} + \gamma \cdot \vec{AA_1}$ припадала равни троугла BDA_1, потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.



Скаларни, векторски и мешовити производ

Угао између два ненула вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ је не већи од углова између полуправих $[OA)$ и $[OB)$, односно $\measuredangle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \measuredangle AOB \in [0,180^\circ]$.

Скаларни производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је број $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}$.

Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су (међусобно) ортогонални у ознаци $\vec{u}\perp\vec{v}$ акко $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \vee \vec{v}=\vec{0} \vee \measuredangle(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$.

Особине скаларног производа:

За векторе $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ и скалар $\alpha\in\mathbb{R}$ важи

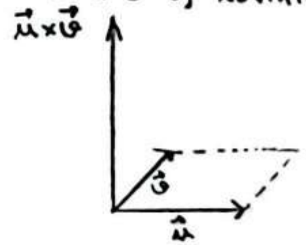
1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ комутативност скаларног производа
2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ дистрибутивност $\cdot$ према $+$
3) $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4) $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$
5) Ако су $(v_1,\dots,v_n)$ и $(u_1,\dots,u_n)$ координате вектора $\vec{v}$ и $\vec{u}$, редом, у ортонормираној бази $(e_1,\dots,e_n)$, онда је $\vec{v}\cdot\vec{u}=v_1u_1+v_2u_2+\dots+v_nu_n$.

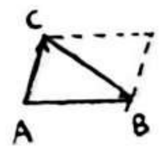
Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ($\vec{u},\vec{v}\in V$ при чему је V простор димензије 3) је вектор $\vec{u}\times\vec{v}$ чија је норма $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$. Ако је $\|\vec{u}\times\vec{v}\|\neq 0$, вектор $\vec{u}\times\vec{v}$ је ортогоналан на векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$, а смер му је одређен правилом десне руке.

Особине векторског производа:

За векторе $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ и скалар $\alpha\in\mathbb{R}$ важи

1) $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
2) $(\alpha\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\times\vec{v})$
3) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$ дистрибутивност $\times$ према $+$
4) Површина паралелограма разапетог векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ једнака је $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$. Површина троугла ABC једнака је $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$. Важи $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су колинеарни $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$. Посебно, $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$.





Мешовити производ вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ је број $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

Особине мешовитог производа

За векторе $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x} \in V$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

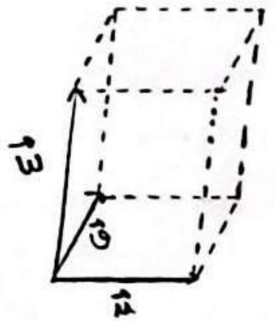
1) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$

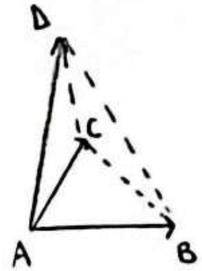
2) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

3) $[\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

4) $[\vec{u}+\vec{v},\vec{w},\vec{x}] = [\vec{u},\vec{w},\vec{x}] + [\vec{v},\vec{w},\vec{x}]$

5) Запремина паралелепипеда којег разапињу вектори $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ једнака је апсолутној вредности мешовитог производа вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$, тј. $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$. Запремина тетраедра ABCD једнака је $\frac{1}{6}|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]|$. Важи: $\vec{u},\vec{v}$ и $\vec{w}$ су компланарни $\Leftrightarrow$ $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$. Специјално, $[\vec{u},\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{u}] = [\vec{v},\vec{u},\vec{u}] = 0$.





Двоструки векторски производ

За векторе $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ важи $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$.

2 Скаларни, векторски и мешовити производ

(2.1.) Доказати да је за троугао ABC испуњен услов $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (косинусна теорема).

Решење: Претпостављамо да су ознаке a, b и c уобичајене, односно да представљају дужине страница BC, AC и AB, редом, док је $\gamma=\measuredangle ACB$.

$$c^2 = \|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}\circ\vec{AB} = (\vec{AC}+\vec{CB})\circ(\vec{AC}+\vec{CB}) = \vec{AC}\circ(\vec{AC}+\vec{CB})+\vec{CB}\circ(\vec{AC}+\vec{CB}) = \vec{AC}\circ\vec{AC}+\vec{AC}\circ\vec{CB}+\vec{CB}\circ\vec{AC}+\vec{CB}\circ\vec{CB} =$$

правило надовезивања

$$\vec{AB}\circ\vec{AB} = \|\vec{AB}\|\|\vec{AB}\|\cos\measuredangle(\vec{AB},\vec{AB}) = \|\vec{AB}\|^2\cos 0 = \|\vec{AB}\|^2\cdot 1 = \|\vec{AB}\|^2$$

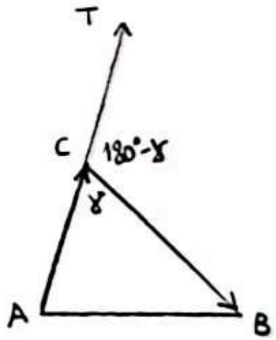
дистрибутивност скаларног множења • према сабирању

$$= \|\vec{AC}\|^2+\vec{AC}\circ\vec{CB}+\vec{AC}\circ\vec{CB}+\|\vec{CB}\|^2 = b^2+2\vec{AC}\circ\vec{CB}+a^2 = b^2+2\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{CB}\|\cos\measuredangle(\vec{AC},\vec{CB})+a^2 =$$

$$\vec{AC}\circ\vec{AC} = \|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos\measuredangle(\vec{AC},\vec{AC}) = \|\vec{AC}\|^2\cdot\cos 0 = \|\vec{AC}\|^2\cdot 1 = \|\vec{AC}\|^2$$

$\vec{CB}\circ\vec{AC} = \vec{AC}\circ\vec{CB}$ на основу комутативности скаларног множења

$$\vec{CB}\cdot\vec{CB} = \|\vec{CB}\|\cdot\|\vec{CB}\|\cos\measuredangle(\vec{CB},\vec{CB}) = \|\vec{CB}\|^2\cos 0 = \|\vec{CB}\|^2\cdot 1 = \|\vec{CB}\|^2$$



Уочимо тачку T такву да важи распоред тачака A–C–T и да је $CT=AC$. Како су дужи CT и AC једнаке и усмерене дужи $\vec{CT}$ и $\vec{AC}$ су истог правца и смера, то је $\vec{CT}=\vec{AC}$, тј.

$$\cos\measuredangle(\vec{AC},\vec{CB}) = \cos\measuredangle(\vec{CT},\vec{CB}) = \cos\measuredangle TCB = \cos(180°-\measuredangle ACB) = -\cos\measuredangle ACB = -\cos\gamma$$

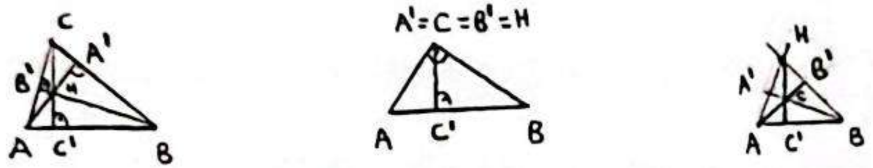
важи формула $\cos(180°-x)=-\cos x$

$$= b^2+2ba\cdot(-\cos\gamma)+a^2 = b^2-2ab\cos\gamma+a^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Овим је доказано $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (косинусна теорема).

(2.2.) Доказати да се висине троугла секу у једној тачки (ортоцентар).

<u>Решење:</u> Означимо са A', B' и C' подножја висина из темена A, B и C, редом, троугла ABC.



Код правоуглог троугла је $A'=B'=C$ ако је C теме правог угла, те је пресечна тачка висина AA' и BB' тачка C која свакако припада висини CC', те се висине AA', BB' и CC' секу у једној тачки. У наставку сматрамо да $AA'\cap BB'\neq\{C\}$, тј. да је $H\neq C$ (тј. $\vec{HC}\neq\vec{0}$) где је $\{H\}=AA'\cap BB'$.

Посматрајмо праве AA' и BB' које припадају равни троугла ABC. Приметимо да праве AA' и BB' не могу бити паралелне (поклапати се или бити дисјунктне и у истој равни ABC) јер би у супротном из $AA'\perp BC$ и $BB'\perp AC$ следило $BC\parallel AC$, али како праве BC и AC имају заједничку тачку C то је могуће само ако се праве AC и BC поклапају, односно ако су тачке A, B и C колинеарне, што је у контрадикцији са претпоставком да је ABC троугао. Дакле, праве AA' и BB' се морају сећи и нека је $AA'\cap BB'=\{H\}$.

$$\vec{AH}\cdot\vec{BC}=\|\vec{AH}\|\cdot\|\vec{BC}\|\cos\measuredangle(\vec{AH},\vec{BC})\underset{\uparrow}{=}\|\vec{AH}\|\cdot\|\vec{BC}\|\cos\measuredangle(\vec{AA'},\vec{BC})\underset{\uparrow}{=}\|\vec{AH}\|\cdot\|\vec{BC}\|\cos 90^\circ=\|\vec{AH}\|\cdot\|\vec{BC}\|\cdot 0=0$$

Вектори $\vec{AH}$ и $\vec{AA'}$ су истог правца и смера

$AA'\perp BC$

$$\Rightarrow 0=\vec{AH}\cdot(\vec{BH}+\vec{HC})=\vec{AH}\cdot\vec{BH}+\vec{AH}\cdot\vec{HC}\qquad(1)$$

$\vec{BC}=\vec{BH}+\vec{HC}$ по правилу надовезивања

дистрибутивност $\cdot$ према $+$

$$\vec{BH}\cdot\vec{AC}=\|\vec{BH}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos\measuredangle(\vec{BH},\vec{AC})\underset{\uparrow}{=}\|\vec{BH}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos\measuredangle(\vec{BB'},\vec{AC})\underset{\uparrow}{=}\|\vec{BH}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos 90^\circ=\|\vec{BH}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot 0=0$$

Вектори $\vec{BH}$ и $\vec{BB'}$ су истог правца и смера

$BB'\perp AC$

$$\Rightarrow 0=\vec{BH}\cdot(\vec{AH}+\vec{HC})=\vec{BH}\cdot\vec{AH}+\vec{BH}\cdot\vec{HC}=\vec{AH}\cdot\vec{BH}+\vec{BH}\cdot\vec{HC}\qquad(2)$$

$\vec{AC}=\vec{AH}+\vec{HC}$ по правилу надовезивања

дистрибутивност $\cdot$ према $+$

$\vec{BH}\cdot\vec{AH}=\vec{AH}\cdot\vec{BH}$ jер је $\cdot$ комутативно

Одузимајући једнакости (1) и (2) добијамо $0=0-0=\cancel{\vec{AH}\cdot\vec{BH}}+\vec{AH}\cdot\vec{HC}-\cancel{\vec{AH}\cdot\vec{BH}}-\vec{BH}\cdot\vec{HC}=(\vec{AH}-\vec{BH})\cdot\vec{HC}=\vec{AB}\cdot\vec{HC}$, а како је $\vec{AB}\neq\vec{0}$ и $\vec{HC}\neq\vec{0}$ и $0=\vec{AB}\cdot\vec{HC}=\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{HC}\|\cos\measuredangle(\vec{AB},\vec{HC})$, то мора бити $\cos\measuredangle(\vec{AB},\vec{HC})=0$, тј. $AB\perp HC$, а како је и $CC'\perp AB$ и из тачке C постоји јединствена нормала на AB, то су тачке C, H и C' колинеарне, те се висине AA', BB' и CC' секу у једној тачки.

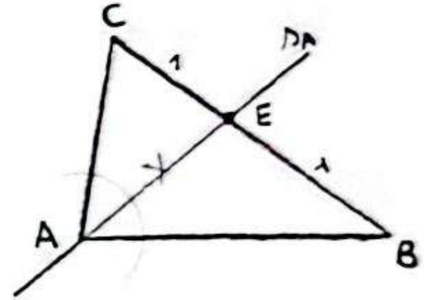
2.3. а) Доказати да симетрала унутрашњег угла у троуглу дели наспрамну страницу у односу суседних страница.

б) Доказати да се симетрале унутрашњих углова у троуглу секу у једној тачки (центар уписаног круга).

Упутство: користити Чевaову теорему.

Решење: а) Означимо са s_A симетралу унутрашњег угла код темена A троугла ABC.

$\{E\} = s_A \cap BC$



Како права AE представља симетралу угла BAC троугла ABC, то је тачка E таква да важи распоред тачака $B-E-C$ (зато се тачка E разликује од темена A, B и C троугла ABC, јер $E\neq B$, $E\neq C$ и $E\neq A$ јер $A\notin BC$ и $E\in BC$) и $\measuredangle(\vec{AB},\vec{AE}) = \measuredangle(\vec{AE},\vec{AC})$.

Ако означимо $\lambda = \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}}$, онда на основу задатка 1.4 важи

$\vec{AE} = \frac{1}{\lambda+1}\vec{AB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AC}$.

$$\measuredangle(\vec{AB},\vec{AE}) = \measuredangle(\vec{AE},\vec{AC}) \overset{\cos}{\Longrightarrow} \cos\measuredangle(\vec{AB},\vec{AE}) = \cos\measuredangle(\vec{AE},\vec{AC}) \xRightarrow{\vec{AB}\neq\vec{0},\ \vec{AE}\neq\vec{0},\ \vec{AC}\neq\vec{0}} \frac{\vec{AB}\circ\vec{AE}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AE}\|} = \frac{\vec{AE}\circ\vec{AC}}{\|\vec{AE}\|\cdot\|\vec{AC}\|} \Rightarrow \|\vec{AC}\|\cdot(\vec{AB}\circ\vec{AE}) = \|\vec{AB}\|\cdot(\vec{AE}\circ\vec{AC})$$

$$\Rightarrow \|\vec{AC}\|\cdot\left(\vec{AB}\circ\left(\frac{1}{\lambda+1}\vec{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AC}\right)\right) = \|\vec{AB}\|\cdot\left(\left(\frac{1}{\lambda+1}\vec{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AC}\right)\circ\vec{AC}\right) \underset{\substack{\text{дистрибутивност } \circ\\ \text{према } +}}{\Rightarrow} \|\vec{AC}\|\cdot\left(\frac{1}{\lambda+1}\vec{AB}\circ\vec{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AB}\circ\vec{AC}\right) = \|\vec{AB}\|\cdot\left(\frac{1}{\lambda+1}\vec{AB}\circ\vec{AC}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AC}\circ\vec{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \|\vec{AC}\|\cdot\left(\frac{1}{\lambda+1}\cdot\|\vec{AB}\|^2+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AB}\circ\vec{AC}\right) = \|\vec{AB}\|\cdot\left(\frac{1}{\lambda+1}\vec{AB}\circ\vec{AC}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\|\vec{AC}\|^2\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda+1}\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|^2+\frac{\lambda}{\lambda+1}\|\vec{AC}\|\vec{AB}\circ\vec{AC} = \frac{1}{\lambda+1}\|\vec{AB}\|\vec{AB}\circ\vec{AC}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|^2$$

$$\overset{\cdot(\lambda+1)}{\Rightarrow} \|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|^2+\lambda\|\vec{AC}\|\vec{AB}\circ\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\vec{AB}\circ\vec{AC}+\lambda\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|^2 \Rightarrow \|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|^2-\|\vec{AB}\|\vec{AB}\circ\vec{AC} = \lambda\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|^2-\lambda\|\vec{AC}\|\vec{AB}\circ\vec{AC} \Rightarrow$$

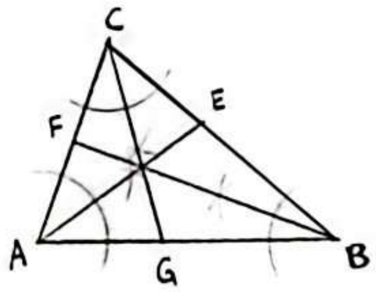
$$\Rightarrow \|\vec{AB}\|\cdot\left(\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|-\vec{AB}\circ\vec{AC}\right) = \lambda\|\vec{AC}\|\left(\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|-\vec{AB}\circ\vec{AC}\right) \Rightarrow \left(\|\vec{AB}\|-\lambda\|\vec{AC}\|\right)\cdot\left(\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|-\vec{AB}\circ\vec{AC}\right) = 0 \Rightarrow \|\vec{AB}\|-\lambda\|\vec{AC}\|=0 \underset{\vec{AC}\neq\vec{0} \text{ јер је } A\neq C}{\Rightarrow} \lambda = \frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{AC}\|}$$

$\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|-\vec{AB}\circ\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|-\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|\cos\measuredangle(\vec{AB},\vec{AC})$
$=\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|\cdot(1-\cos\measuredangle BAC)\neq 0$ јер је $\vec{AB}\neq\vec{0}$, $\vec{AC}\neq\vec{0}$
и $\cos\measuredangle BAC\neq 1$ јер је $0^\circ<\measuredangle BAC<180^\circ$ као унутрашњи угао троугла ABC.

вектори $\vec{BE}$ и $\vec{EC}$ су истог смера

Дакле, $\frac{BE}{EC} = \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} = \lambda = \frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{AC}\|} = \frac{AB}{AC}$ тј. симетрала унутрашњег угла у троуглу дели наспрамну страницу у односу суседних страница.

б) Нека симетрале s_A, s_B, s_C унутрашњих углова код темена A, B, C, редом, троугла ABC секу странице BC, AC, AB у тачкама E, F, G. На основу дела а) важи да су тачке E, F, G различите од темена троугла ABC и да је $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} = \frac{CF}{FA} = \frac{BC}{BA}$ и $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} = \frac{AG}{GB} = \frac{AC}{BC}$.



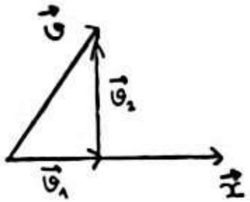
Како је $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} = \frac{AB}{\cancel{AC}} \cdot \frac{\cancel{BC}}{BA} \cdot \frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}} = 1$, то на основу Чевaове теореме следи да се праве AE, BF и CG секу у једној тачки или да су паралелне.

Приметимо да не може бити $AE \parallel BF \parallel CG$ јер би из $AE \parallel BF$ и чињенице да се тачке E и F налазе с исте стране праве AB (јер су обе у полуравни са рубом AB у којој је тачка C) следило да су $\measuredangle BAE$ и $\measuredangle ABF$ суплементни као углови на трансверзали. Како су AE и BF симетрале унутрашњих углова $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$, редом, то би $180° = \measuredangle BAE + \measuredangle ABF = \frac{\measuredangle BAC}{2} + \frac{\measuredangle ABC}{2}$, тј. $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 2 \cdot 180° = 360°$, што је у контрадикцији са чињеницом да је збир унутрашњих углова $\measuredangle BAC$, $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$ једнак $180°$, одакле је $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC < 180°$.

Дакле, праве AE, BF и CG се секу у једној тачки чиме је доказано да се симетрале унутрашњих углова троугла ABC секу у једној тачки.

(2.4.) а) Доказати да се нормална пројекција вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ може записати у облику $\vec{b}_1 = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}\vec{x}$.

<u>Решење:</u> Вектор $\vec{b}$ се разлаже на векторе $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ (односно $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$) такве да је $\vec{b}_1$ колинеаран с $\vec{x}$, а $\vec{b}_2$ нормалан на $\vec{x}$. По дефиницији је $\vec{b}_1$ <u>нормална (ортогонална) пројекција</u> вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{x}$, а $\vec{b}_2$ је <u>ортогонална допуна</u> при ортогоналној пројекцији вектора $\vec{b}$ на $\vec{x}$.



$$\left.\begin{aligned} &\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \implies \vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1 \\ &\vec{b}_1 \text{ је колинеаран са } \vec{x} \neq \vec{0} \implies \vec{b}_1 = \lambda\vec{x} \text{ за неко } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \implies \vec{b}_2 = \vec{b} - \lambda\vec{x}$$

$$\vec{b}_2 \perp \vec{x} \implies \vec{b}_2 \cdot \vec{x} = \|\vec{b}_2\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos\measuredangle(\vec{b}_2, \vec{x}) = \|\vec{b}_2\| \cdot \|\vec{x}\| \cos 90^\circ = \|\vec{b}_2\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot 0 = 0$$

$$\implies (\vec{b} - \lambda\vec{x}) \cdot \vec{x} = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{дистрибутивност} \\ \cdot \text{ према } -}}{\implies} \vec{b} \cdot \vec{x} - \lambda\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \underset{\uparrow}{\implies} \vec{b} \cdot \vec{x} - \lambda\|\vec{x}\|^2 = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|\|\vec{x}\| \cos\measuredangle(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 \cos 0^\circ = \|\vec{x}\|^2$$

$$\implies \lambda\|\vec{x}\|^2 = \vec{b} \cdot \vec{x} \underset{\vec{x} \neq \vec{0}}{\implies} \lambda = \frac{\vec{b} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$$

$$\implies \vec{b}_1 = \lambda\vec{x} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}\vec{x} \quad \text{што се и тражило.}$$

б) Ако су $\vec{v}=(1,1,1)$, $\vec{x}=(1,2,2)$ дати координатама у ортонормираној бази, одредити једнозначно разлагање $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ вектора $\vec{v}$ на пројекцију и ортогоналну допуну ($\vec{v}_2 \perp \vec{x}$).

<u>Решење:</u> Нека је $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ортонормирана база. По дефиницији, то значи да важи $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ (оваква база се зове ортогонална) и $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ (то значи да су вектори базе нормирани). $\Rightarrow$ $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 = 0$ $\quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1$

$$\vec{v} = (1,1,1) = 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 \qquad \vec{x} = (1,2,2) = 1\cdot\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

део а) $\Rightarrow$ $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}\vec{x}$

$$\vec{v}\cdot\vec{x} = (\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3) = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 =$$

$$= 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 1+2+2 = 5$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = (\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3) = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + 4\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + 2\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3$$

$$= 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 4\cdot 1 = 1+4+4 = 9$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}\vec{x} = \frac{5}{9}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = \frac{5}{9}\vec{e}_1 + \frac{10}{9}\vec{e}_2 + \frac{10}{9}\vec{e}_3 = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{5}{9}\vec{e}_1 - \frac{10}{9}\vec{e}_2 - \frac{10}{9}\vec{e}_3 = \frac{4}{9}\vec{e}_1 - \frac{1}{9}\vec{e}_2 - \frac{1}{9}\vec{e}_3 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right)$$

Пројекција на $\vec{x}$ је $\vec{v}_1 = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$, а ортогонална допуна је $\vec{v}_2 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right)$.