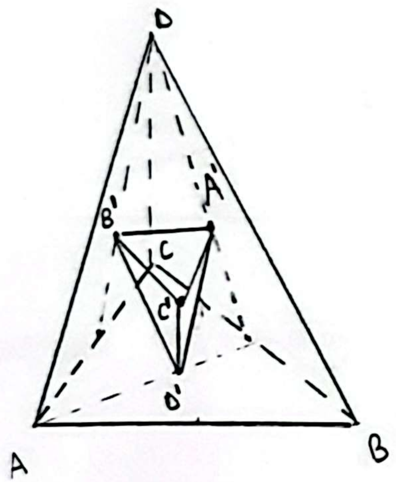
1.9. Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C' и D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC.

Решење:



Нека је O произвољна тачка.

T - тежиште тетраедра $ABCD$

Тачка T је тежиште скупа тачака $\{A, B, C, D\}$ и одређена је са $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Тачка A' је тежиште троугла BCD, те је $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Тачка B' је тежиште троугла ACD, те је $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Тачка C' је тежиште троугла ABD, те је $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$.

Тачка D' је тежиште троугла ABC, те је $\overrightarrow{OD'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

T' - тежиште тетраедра $A'B'C'D'$

Да бисмо доказали да се тежишта T и T' тетраедара $ABCD$ и $A'B'C'D'$ поклапају, довољно је доказати да је $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'}$.

Како је T' тежиште тетраедра $A'B'C'D'$, то је $\overrightarrow{OT'} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'})$.

$$\overrightarrow{OT'} = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right)$$

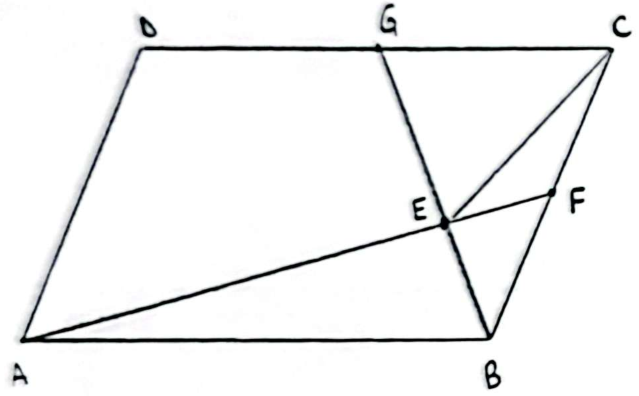
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{12} \cdot (3 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB} + 3 \cdot \overrightarrow{OC} + 3 \cdot \overrightarrow{OD}) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OT} \Rightarrow \overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{OT} \Rightarrow T' = T \Rightarrow$$

Тежишта тетраедара $ABCD$ и $A'B'C'D'$ се поклапају.

1.10. Дат је паралелограм ABCD. Ако је тачка F средиште странице BC, тачка G средиште странице CD, а тачка E пресек дужи AF и BG, одредити односе $\frac{AE}{EF}$ и $\frac{BE}{EG}$.

Решење:



Означимо $\frac{AE}{EF} = \frac{\vec{AE}}{\vec{EF}} = \lambda$ и $\frac{BE}{EG} = \frac{\vec{BE}}{\vec{EG}} = \mu$.

количник два вектора истог смера једнак је количнику њихових интензитета

Тачке B, C и D су неколинеарне $\Rightarrow$ $\vec{CB}$ и $\vec{CD}$ су линеарно независни.

На основу задатка 1.4 имамо да из $\vec{AE} = \lambda\cdot\vec{EF}$ следи

$$\vec{CE} = \frac{1}{\lambda+1}\cdot\vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\vec{CF}.$$

$$\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{CD} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{CD}$$

$\vec{DA} = \vec{CB}$ јер дужи DB и AC имају заједничко средиште

$\vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ јер је F средиште дужи CB

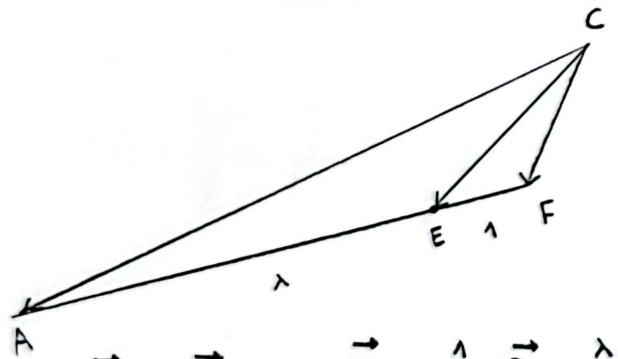
$$\Rightarrow \vec{CE} = \frac{1}{\lambda+1}\vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\vec{CF} = \frac{1}{\lambda+1}\cdot(\vec{CB}+\vec{CD}) + \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{2}\vec{CB} =$$

$$= \frac{1}{\lambda+1}\vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1}\cdot\vec{CD} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}\cdot\vec{CB} =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}\right)\cdot\vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1}\cdot\vec{CD} =$$

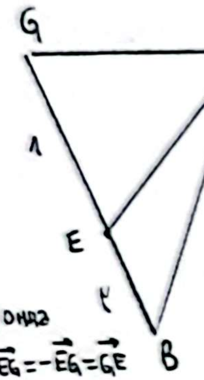
$$= \frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}\cdot\vec{CB} + \frac{1}{\lambda+1}\cdot\vec{CD}$$

Подсетник (задатак 1.4)



$\vec{AE} = \lambda\cdot\vec{EF}$ $\Rightarrow$ $\vec{CE} = \frac{1}{\lambda+1}\vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\vec{CF}$

$\lambda \neq -1$ јер је $\lambda = \frac{AE}{EF} > 0$



$\psi \neq -1$
јер ако би $\psi=-1$, онда би $\overrightarrow{BE}=\psi\overrightarrow{EG}=-\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{GE}$ те би $B=G$ ↯

На основу задатка 1.4. из $\overrightarrow{BE}=\psi\cdot\overrightarrow{EG}$ следи $\overrightarrow{CE}=\frac{\psi}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CG}+\frac{1}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ јер је тачка G средиште дужи CD

$$\Rightarrow \overrightarrow{CE}=\frac{\psi}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CG}+\frac{1}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{\psi}{1+\psi}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{\psi}{2(1+\psi)}\overrightarrow{CD}$$

$$\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}=\frac{1}{1+\psi}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{\psi}{2(1+\psi)}\cdot\overrightarrow{CD}$$

$$\left(\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}-\frac{1}{1+\psi}\right)\cdot\overrightarrow{CB}+\left(\frac{1}{\lambda+1}-\frac{\psi}{2(1+\psi)}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{0} \Rightarrow \frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}-\frac{1}{1+\psi}=0 \qquad \frac{1}{\lambda+1}-\frac{\psi}{2(1+\psi)}=0$$

Вектори $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су линеарно независни.

$$\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}=\frac{1}{1+\psi} \qquad \frac{1}{\lambda+1}=\frac{\psi}{2(1+\psi)}$$

$$\frac{1}{1+\psi}=\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}=\frac{\lambda+1+1}{2(\lambda+1)}=\frac{\lambda+1}{2(\lambda+1)}+\frac{1}{2(\lambda+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi}{2(1+\psi)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\psi}=\frac{1}{2}+\frac{\psi}{4(1+\psi)} \qquad /\cdot 4(1+\psi)\neq 0$$

$$4=2(1+\psi)+\psi$$

$$4=2+2\psi+\psi$$

$$4-2=3\psi$$

$$2=3\psi$$

$$\psi=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BE}{EG}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\lambda+1}=\frac{\psi}{2(1+\psi)}=\frac{\frac{2}{3}}{2(1+\frac{2}{3})}=\frac{\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{5}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\lambda+1=5$$

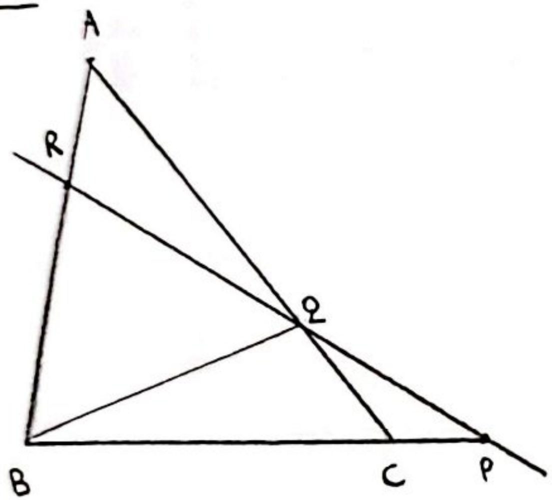
$$\lambda=5-1$$

$$\lambda=4 \Rightarrow \frac{AE}{EF}=4$$

Тражени односи су $\frac{AE}{EF}=4$ и $\frac{BE}{EG}=\frac{2}{3}$.

(1.11.) (Менелајева теорема, 1. век нове ере) Потребан и довољан услов да би тачке P, Q и R које леже редом на правама BC, CA и AB троугла ABC (и различите су од темена троугла) биле колинеарне, јесте да важи $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$.

<u>Решење:</u>



Уведимо ознаке $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \alpha$, $\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = \beta$ и $\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \gamma$. Доказујемо да су тачке P, Q и R колинеарне ако и само ако важи $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$, односно $\alpha\beta\gamma = -1$.

$$\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = \beta \Rightarrow \vec{CQ} = \beta \cdot \vec{QA} \overset{\text{задатак (1.4)}}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} \vec{BQ} = \frac{1}{1+\beta} \cdot \vec{BC} + \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \vec{BA}$$

$\beta \neq -1$ јер је $A \neq C$

Сада желимо да изразимо $\vec{BC}$ и $\vec{BA}$ помоћу $\vec{BP}$ и $\vec{BR}$.

$$\vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} \underset{\uparrow}{=} \vec{BP} + \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{BP} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \vec{BP} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \vec{BP}$$

$\vec{BP} = \alpha \cdot \vec{PC}$

$\vec{PC} = \frac{1}{\alpha} \vec{BP}$

$\alpha \neq 0$ јер ако би $\alpha = 0$, онда би $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \alpha = 0$, те би се поклапале тачке B и P а то је у контрадикцији са тим да је P различита од темена троугла ABC

$$\vec{BA} = \vec{BR} + \vec{RA} \underset{\uparrow}{=} \vec{BR} + \gamma \cdot \vec{BR} = (1+\gamma) \cdot \vec{BR}$$

$$\gamma = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \frac{-\vec{AR}}{-\vec{RB}} = \frac{\vec{RA}}{\vec{BR}} \Rightarrow \vec{RA} = \gamma \cdot \vec{BR}$$

$$\Rightarrow \vec{BQ} = \frac{1}{1+\beta} \cdot \vec{BC} + \frac{\beta}{1+\beta} \vec{BA} = \frac{1}{1+\beta} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \vec{BP} + \frac{\beta}{1+\beta} \cdot (1+\gamma) \cdot \vec{BR} = \frac{\alpha+1}{\alpha(1+\beta)} \cdot \vec{BP} + \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta} \cdot \vec{BR}$$

На основу задатка (1.5.) примењеног на неколинеарне тачке B, P и R (ако би тачке B, P и R биле колинеарне, онда би и тачке A, B и C биле колинеарне, а то је у контрадикцији са тим да је ABC троугао)

Тачка Q одређена са $\overrightarrow{BQ} = \frac{\alpha+1}{\alpha(1+\beta)} \cdot \overrightarrow{BP} + \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta} \cdot \overrightarrow{BR}$ припада правој PR ако и само ако важи

$\frac{\alpha+1}{\alpha(1+\beta)} + \frac{\beta(1+\gamma)}{1+\beta} = 1$, односно $\alpha+1+\alpha\beta(1+\gamma) = \alpha(1+\beta)$ након множења са $\alpha(1+\beta)$, тј.

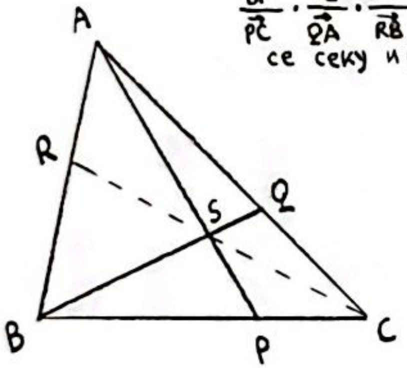
$\cancel{\alpha}+1+\cancel{\alpha\beta}+\alpha\beta\gamma = \cancel{\alpha}+\cancel{\alpha\beta}$, односно $\alpha\beta\gamma = -1$.

Дакле, тачке P, Q и R су колинеарне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$, тј. $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

(1.12.) (Чевaова теорема) Нека су P, Q и R тачке редом на правама BC, AC и AB, троугла ABC, различите од темена A, B, C. Тада је $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}}\cdot\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}}\cdot\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}}=1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне. Доказати.

Решење: Означимо $\alpha=\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}}$, $\beta=\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}}$ и $\gamma=\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}}$. Доказујемо да је $\alpha\beta\gamma=1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне. Посматрајмо праве AP и BQ у равни троугла ABC. Како су AP и BQ у истој равни, оне не могу бити мимоилазне. Праве AP и BQ се не могу поклапати јер би у супротном тачке A, B и C биле колинеарне (тачка C је на AQ јер је Q на AC) што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао. Остају две могућности.

1° Праве AP и BQ се секу у тачки S. Циљ је да докажемо да су тачке C, S и R колинеарне $\Leftrightarrow$ $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}}\cdot\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}}\cdot\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}}\overset{\heartsuit}{=}1$ јер из тога следи да се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки $\Leftrightarrow$ AP и BQ се секу и важи $\heartsuit$. Тачке B, Q и S су различите од темена P, C и A троугла PCA.



Тачке B, Q и S су колинеарне, а важи и да су тачке B, Q и S редом на правама PC, CA и AP троугла PCA. На основу Менелајеве теореме је $\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}}\cdot\frac{\vec{AQ}}{\vec{QC}}\cdot\frac{\vec{CB}}{\vec{BP}}=-1$.

$$\vec{CB}=\vec{CP}+\vec{PB}=\vec{CP}+\alpha\cdot\vec{CP}=(1+\alpha)\cdot\vec{CP}=\frac{1+\alpha}{\alpha}\cdot\vec{PB}=-\frac{1+\alpha}{\alpha}\cdot\vec{BP}\Rightarrow\frac{\vec{CB}}{\vec{BP}}=-\frac{1+\alpha}{\alpha}\quad(*)$$

$$\alpha=\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}}=\frac{-\vec{BP}}{-\vec{PC}}=\frac{\vec{PB}}{\vec{CP}}\Rightarrow\vec{PB}=\alpha\cdot\vec{CP}\Rightarrow\vec{CP}=\frac{1}{\alpha}\cdot\vec{PB}$$ ($\alpha\neq0$ јер је $\vec{BP}\neq\vec{0}$ зато што је $B\neq P$)

$$\vec{AQ}=\frac{1}{\beta}\cdot\vec{QC}\Rightarrow\frac{\vec{AQ}}{\vec{QC}}=\frac{1}{\beta}\quad(**)$$

$$\beta=\frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}}\Rightarrow\vec{QA}=\frac{\vec{CQ}}{\beta}\Rightarrow-\vec{QA}=-\frac{\vec{CQ}}{\beta}\Rightarrow\vec{AQ}=\frac{\vec{QC}}{\beta}$$ ($\beta\neq0$ јер је $C\neq Q$)

$$\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}}\cdot\frac{\vec{AQ}}{\vec{QC}}\cdot\frac{\vec{CB}}{\vec{BP}}=-1\overset{(*)}{\underset{(**)}{\Rightarrow}}\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\left(-\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)=-1\Rightarrow\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}}\cdot\left(-\frac{1+\alpha}{\alpha\beta}\right)=-1\Rightarrow\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}}=\frac{\alpha\beta}{1+\alpha}\quad(***)$$

$\alpha\neq-1$ јер $B\neq C$

Тачке C, S и R су на правама BP, PA и AB, редом, троугла ABP и различите су од темена A, B и P.

Приметимо да уколико важи $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} = -1$, онда, на основу Менелајеве теореме, следи да су тачке C, S и R колинеарне, а важи и обрнуто, тј. $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} = -1 \iff C, S$ и R су колинеарне.

$$\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \overset{(***)}{=} \frac{\alpha\beta}{1+\alpha} \qquad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \gamma \qquad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} = -(\alpha+1)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} = (\alpha+1)\cdot\overrightarrow{PC} = -(\alpha+1)\cdot\overrightarrow{CP}$$

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC}$$

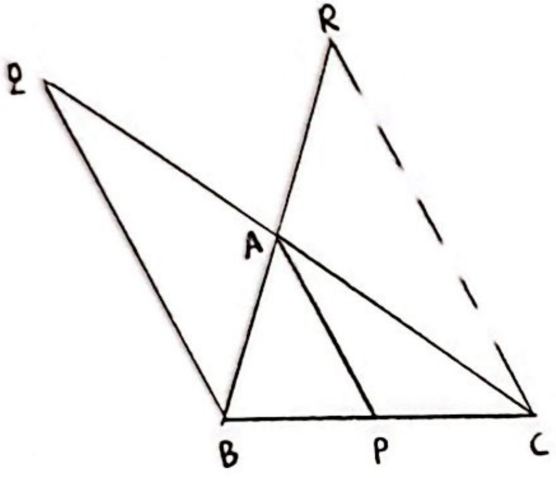
Тачке C, S и R су колинеарне. $\overset{\text{Менелајева}}{\underset{\text{теорема}}{\iff}}$ $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}} = -1 \iff \frac{\alpha\beta}{\cancel{1+\alpha}} \cdot \gamma \cdot (-\cancel{(\alpha+1)}) = -1$

$$\iff \alpha\beta\gamma = 1$$

$$\iff \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$$

Дакле, праве AP, BQ и CR се секу у једној тачки ако и само ако $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ и праве AP и BQ се секу.

2° Праве AP и BQ су паралелне и немају заједничких тачака.



$$AP \parallel BQ \xrightarrow[\text{теорема}]{\text{Талесова}} \frac{CP}{PB} = \frac{CA}{AQ} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AQ}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = -(\beta+1) \quad (\ast\ast\ast\ast)$$

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{-\overrightarrow{PB}}{-\overrightarrow{CP}} = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{CP}} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0 \text{ јер је } B \neq P)$$

$$\beta = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = -\beta \cdot \overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QA} = -\beta \cdot \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AQ} = -(\beta+1) \cdot \overrightarrow{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AQ}} = -(\beta+1)$$

Праве AP, BQ и CR су паралелне $\overset{AP \parallel BQ}{\Leftrightarrow}$ $AP \parallel CR \xleftrightarrow[\text{теорема}]{\text{Талесова}} \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AR} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AR}} \Leftrightarrow \alpha = -\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)$

$\gamma \neq 0$ јер је $A \neq R$

$$\gamma = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \Rightarrow \overrightarrow{RB} = \frac{1}{\gamma} \cdot \overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{RB} - \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AR} = -\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\overrightarrow{AR}$$

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AR}} = -\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)$$

$$(\ast\ast\ast\ast) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = -(\beta+1) \Rightarrow 1 = -\alpha(\beta+1) \Rightarrow 1 = -\alpha\beta - \alpha \Rightarrow \alpha = -1-\alpha\beta$$

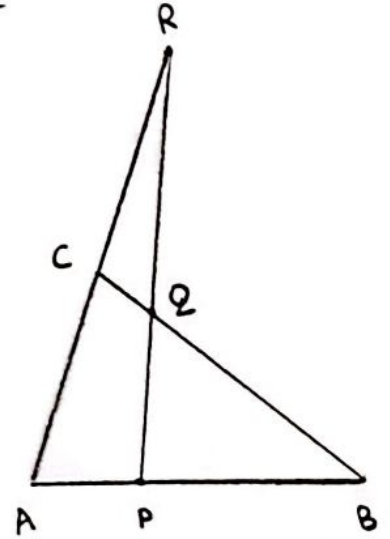
Праве AP, BQ и CR су паралелне $\Leftrightarrow$ $AP \parallel BQ$ и $\alpha = -\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) \Leftrightarrow AP \parallel BQ$ и $-1-\alpha\beta = -\frac{1}{\gamma} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AP \parallel BQ$ и $\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow AP \parallel BQ$ и $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$

Помоћу случаја 1° и 2° смо доказали да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1 \Leftrightarrow$ праве AP, BQ и CR се секу у једној тачки или су паралелне.

1.13. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ}=4\overrightarrow{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ. Израчунати однос $\overrightarrow{CR}:\overrightarrow{RA}$.

<u>Решење:</u>

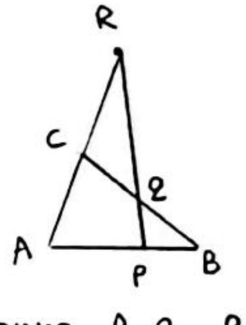


Посматрамо троугао ABC и приметимо да су тачке P, Q и R на правама одређеним страницама AB, BC и AC, редом, троугла ABC.

Заиста, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \Rightarrow P\in AB$,
$\overrightarrow{BQ}=4\overrightarrow{QC} \Rightarrow Q\in BC$, а тачка R је у пресеку правих AC и PQ, те је, специјално, на правој AC.

Из $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ}=4\overrightarrow{QC}$ следи да су тачке P и Q различите од темена троугла ABC. Тачка R је различита од темена B јер је R на правој AC. Тачка R се не може поклапати са теменом A јер би у супротном $\overset{\text{праве}}{PR=AB}$, те би $Q\in PR=AB$, а $Q\in BC$, те би $Q=B$, а већ смо доказали да је $Q\neq B$. Тачка R се не може поклапати са теменом C јер би у супротном $\overset{\text{праве}}{RQ=BC}$, те би $P\in RQ=BC$, а $P\in AB$, те би $P=B$, а већ смо доказали да је $P\neq B$. Дакле, тачке P, Q и R су различите од темена троугла ABC. Како је тачка R у пресеку правих AC и PQ, то су тачке P, Q и R колинеарне, те на основу Менелајеве теореме важи $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-1$, односно $4\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\cdot\frac{1}{2}=-1$, тј. $2\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1$, те је тражени однос $\overrightarrow{CR}:\overrightarrow{RA}$ једнак $-\frac{1}{2}$.

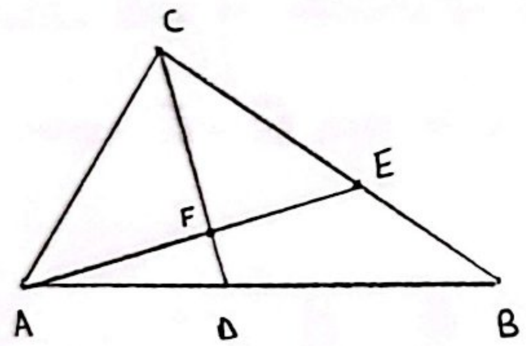
Менелајева теорема:



Тачке P, Q и R које су на правама одређеним страницама AB, BC и AC, редом, троугла ABC (тачке P, Q и R су различите од темена троугла ABC) су колинеарне
$\iff \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-1$

(1.14) У равни је дат троугао ABC. Нека тачка D припада страници AB, а тачка E страници BC, тако да је $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{4}$ и $\frac{BE}{EC}=\frac{5}{7}$. Ако се дужи AE и CD секу у тачки F, одредити у ком односу тачка F дели дужи AE и CD.

Решење:



Посматрајмо троугао ABE и приметимо да тачке C, F и D припадају правама одређеним страницама BE, AE и AB, редом, троугла ABE. Тачке C, F и D су различите од темена A, B и E троугла ABE.

Како је $\frac{BE}{EC}=\frac{5}{7}$, то је тачка C различита од тачака B и E (у супротном разломак $\frac{BE}{EC}$ није $\frac{5}{7}$ јер је 1 или не постоји). Тачка C је различита од тачке A јер је ABC троугао. Дакле, тачка C је различита од темена троугла ABE.

Ако би $F=A$, онда би $CA=CF=CD$ као праве, а како $D\in AB$ и $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{4}$, то није могуће.

Ако би $F=B$, онда би $CB=CF=CD$ као праве, а како $D\in AB$ и $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{4}$, то није могуће.

Ако би $F=E$, онда би $CB=CE=CF=CD$ као праве, а како $D\in AB$ и $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{4}$, то није могуће.

Дакле, тачка F је различита од темена троугла ABE.

Како је $D \in AB$ и $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{4}$, то је тачка D различита од тачака A и B.

Ако је $D = E$, онда би $BA = BD = BE = BC$ као праве, што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао. Дакле, тачка D је различита од темена троугла ABE.

По услову задатка се дужи AE и CD секу у тачки F, те су тачке C, F и D колинеарне. На основу Менелајеве теореме онда следи да је $\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$.

Тачка D је на страници AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{3}{4}$ јер су вектори $\vec{AD}$ и $\vec{DB}$ истог смера.

Тачка E је на страници BC и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} = \frac{5}{7}$ јер су вектори $\vec{BE}$ и $\vec{EC}$ истог смера.

$$\Downarrow$$

$$\vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EC}$$

$$\frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} = \frac{\vec{BE} + \vec{EC}}{-\vec{EC}} = -\frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} - \frac{\vec{EC}}{\vec{EC}} = -\frac{5}{7} - 1 = -\frac{12}{7}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{12}{7}\right) \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$$

$$\frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{12}$$

$$\frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{7}{9}$$

$$\Downarrow$$

$\frac{EF}{FA} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{FA}{EF} = \frac{9}{7} \Rightarrow$ Тачка F дели дуж AE у односу $9:7$.

Посматрамо троугао DBC и приметимо да тачке A, E и F припадају правама одређеним страницама BD, BC и CD, редом, троугла DBC. Тачке A, E и F се разликују од темена троугла DBC. Тачка A се разликује од темена B и D, јер $D \in AB$ и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$.
Тачка A се разликује од тачке C јер је ABC троугао. Дакле, тачка A се разликује од темена троугла DBC. Тачка E се разликује од темена B и C, јер $E \in BC$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$.
Ако би $E = D$, онда би $BC = BE = BD = BA$ као праве, што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао. Дакле, тачка E се разликује од темена троугла DBC.
Ако би $F = D$, онда би $AE = AF = AD = AB$ као праве, а како је $E \in BC$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$ то није могуће да се тачке E и B поклапају.
Ако би $F = B$, онда би $\overbrace{CD = CF = CB}^{\text{праве}}$, а како је $D \in AB$ и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, то није могуће да се тачке B и D поклапају.
Ако би $F = C$, онда би $\overbrace{AE = AF = AC}^{\text{праве.}}$, а како је $E \in BC$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$, то није могуће да се тачке E и C поклапају. Дакле, тачка F је различита од темена троугла DBC.
Како се по услову задатка дужи AE и CD секу у тачки F, то су тачке A, F и E колинеарне. Онда на основу Менелајеве теореме $\frac{\vec{DA}}{\vec{AB}} \cdot \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FD}} = -1$.

Тачка D је на дужи AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{3}{4}$

$$\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \frac{4}{3}\cdot\vec{AD} = \left(1 + \frac{4}{3}\right)\cdot\vec{AD} = \frac{7}{3}\vec{AD}$$

$$\frac{\vec{DA}}{\vec{AB}} = \frac{-\vec{AD}}{\frac{7}{3}\vec{AD}} = -\frac{3}{7}$$

Тачка E је на дужи BC и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$ $\Rightarrow$ $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{5}{7}$ јер су вектори $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{EC}$ истог смера

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = -1$$

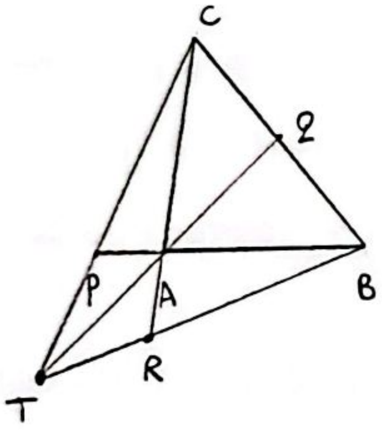
$$\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{5}$$

$$\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = \frac{49}{15} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{49}{15}$$ $\Rightarrow$ Тачка F дели дуж CD у односу 49:15.

1.15. Нека је ABC троугао, P и Q тачке такве да је $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}$ и $2\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се праве AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{AR}$.

Решење:



Посматрамо троугао ABC.

Приметимо да су тачке P, Q и R на правама одређеним страницама AB, BC и CA, редом, троугла ABC. Заиста, како је $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}$, то је тачка P на правој AB. Како је $2\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}$, то је тачка Q на правој BC. По услову задатка је R тачка праве AC.

Приметимо да се тачке P, Q и R разликују од темена троугла ABC.

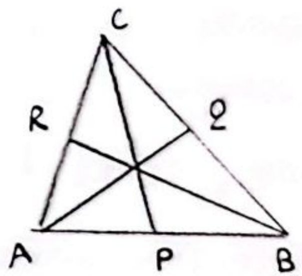
Заиста, тачка P се разликује од темена A и B јер је $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}$. Како је P на правој AB, то не може бити $P=C$ јер ABC не би био троугао. Дакле, тачка P се разликује од темена троугла ABC.

Подсетник - Чевина теорема

Нека су P, Q и R тачке на правама одређеним страницама AB, BC, AC, редом, троугла ABC и нека се тачке P, Q и R разликују од темена троугла ABC.

Тада важи:

Праве AQ, BR и CP се секу у једној тачки или су паралелне акко $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1$.



Напомена: Праве AQ, BR и CP се могу сећи у једној тачки која је у спољашњости троугла ABC.

Тачка Q се разликује од темена B и C јер је $2\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}$ (ако би $Q=B$ онда би $2\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{0}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow B=C$ ↯, а ако би $Q=C$ онда би $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\vec{0} \Rightarrow B=C$ ↯).

Тачка Q се разликује од темена A јер је тачка Q на правој BC, а тачка A не може бити на правој BC јер је ABC троугао. Дакле, тачка Q се разликује од темена троугла ABC.

$\{T\} = AQ \cap BR \cap CP$

Ако би $R=A$, онда би $BT=BR=BA$ као праве, те би тачке A, B и T биле колинеарне, а како су и тачке A, Q и T колинеарне и важи $Q \in BC$, то би се тачке B и Q поклапале, што је у контрадикцији са тим да је $2\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}$.

Ако би $R=B$, онда како $R \in AC$, то би $B \in AC$ што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао.

Ако би $R=C$, онда би B, T и C биле колинеарне (јер су B, R и T колинеарне), а како су B, C и Q колинеарне, то би тачке B, T, C и Q биле колинеарне, а по услову задатка су и тачке A, T и Q колинеарне, те би B, T, C, Q и A биле колинеарне, што је у контрадикцији са условом задатка да је ABC троугао.

Дакле, тачка R се разликује од темена троугла ABC.

$\Rightarrow$ Овим смо доказали да се тачке P, Q и R разликују од темена троугла ABC.

По услову задатка се праве AQ, BR и CP секу у једној тачки, те на основу Чевине теореме следи да је $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$.

$$3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$$
$$3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA}$$
$$3\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{AP}$$
$$4\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PB}$$
$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{1}{4}$$

$$2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$$
$$2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC}$$
$$2\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$$
$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$$
$$\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = 1$$

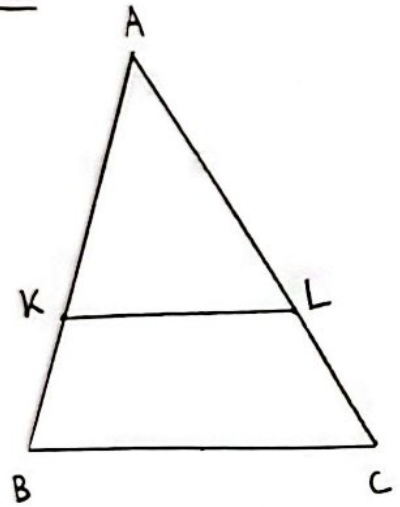
$$\rightsquigarrow \quad \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$
$$\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AR}} = \frac{\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC}}{-\overrightarrow{RA}} \underset{\uparrow}{=} \frac{-\overrightarrow{RA} + 4\overrightarrow{RA}}{-\overrightarrow{RA}} = \frac{3\overrightarrow{RA}}{-\overrightarrow{RA}} = -3$$

$$\overrightarrow{CR} = -4\overrightarrow{RA}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{RC} = -(-4\overrightarrow{RA}) = 4\overrightarrow{RA}$$

Тражени однос $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AR}$ је -3.

1.16. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L, такве да важи $\frac{KB}{AK}+\frac{LC}{AL}=1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL.

<u>Решење:</u>



Тежиште T скупа тачака $\{A,B,C\}$ се дефинише помоћу $\vec{OT}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$ и у задатку 1.7. смо доказали да уместо тачке O можемо изабрати било коју тачку из те равни. Специјално, за $O=A$ добијамо

$$\vec{AT}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{AA}+\vec{AB}+\vec{AC})=\frac{1}{3}\cdot(\vec{0}+\vec{AB}+\vec{AC})=\frac{1}{3}\cdot(\vec{AB}+\vec{AC}).$$

Тачка K је на дужи AB, те су вектори $\vec{KB}$ и $\vec{AK}$ истог смера, а одатле је $\frac{\vec{KB}}{\vec{AK}}=\frac{KB}{AK}=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Тачка L је на дужи AC, те су вектори $\vec{LC}$ и $\vec{AL}$ истог смера, а одатле је $\frac{\vec{LC}}{\vec{AL}}=\frac{LC}{AL}=\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$.

Због услова задатка $\frac{KB}{AK}+\frac{LC}{AL}=1$ важи $\lambda+\mu=1$. $(*)$

$\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ можемо изразити помоћу вектора $\vec{AK}$ и $\vec{AL}$, редом.

$$\vec{AB}=\vec{AK}+\vec{KB}\underset{\uparrow}{=}\vec{AK}+\lambda\cdot\vec{AK}=(1+\lambda)\cdot\vec{AK}$$

$\frac{\vec{KB}}{\vec{AK}}=\lambda$

$\vec{KB}=\lambda\cdot\vec{AK}$

$$\vec{AC}=\vec{AL}+\vec{LC}\underset{\uparrow}{=}\vec{AL}+\mu\cdot\vec{AL}=(1+\mu)\cdot\vec{AL}$$

$\frac{\vec{LC}}{\vec{AL}}=\mu$

$\vec{LC}=\mu\cdot\vec{AL}$

$$\Rightarrow\ \vec{AT}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{AB}+\vec{AC})=\frac{1}{3}\left((1+\lambda)\vec{AK}+(1+\mu)\vec{AL}\right)=\frac{1}{3}(1+\lambda)\vec{AK}+\frac{1}{3}(1+\mu)\vec{AL}$$

Како је $\frac{KB}{AK}+\frac{LC}{AL}=1$ услов задатка, онда сматрамо да је $A\neq K$ и $A\neq L$.

$K\in AB$ и $L\in AC$

$\Rightarrow$ Тачке A, K и L су неколинеарне (ако би биле колинеарне, онда би тачке A, B и C биле колинеарне што је у контрадикцији са тим да је ABC троугао).

Тачка T задовољава $\vec{AT}=\frac{1}{3}(1+\lambda)\vec{AK}+\frac{1}{3}(1+\mu)\vec{AL}$

Како је $\frac{1}{3}(1+\lambda)+\frac{1}{3}(1+\mu)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\lambda+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mu=$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot(\lambda+\mu)\overset{(*)}{=}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$, то на основу задатка 1.5 следи да је тачка T на правој KL.

$\frac{1}{3}(1+\lambda)\geq 0$ јер је $\lambda=\frac{KB}{AK}\geq 0$

$\frac{1}{3}(1+\mu)\geq 0$ јер је $\mu=\frac{LC}{AL}\geq 0$

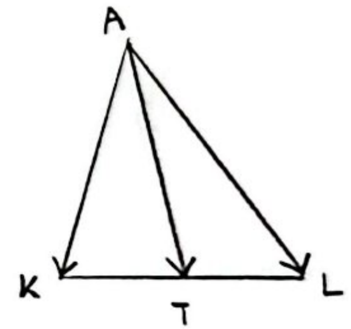
Како је $\frac{1}{3}(1+\lambda)\geq 0$ и $\frac{1}{3}(1+\mu)\geq 0$, онда на основу задатка 1.5 следи да тежиште T троугла ABC припада дужи KL.

Подсетник (задатак 1.5)

A, K, L су три неколинеарне тачке

Тачка T је одређена са $\vec{AT}=\alpha\cdot\vec{AK}+\beta\cdot\vec{AL}$. Тада важи:

T припада правој $KL \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$



Ако је при томе $\alpha\geq 0$ и $\beta\geq 0$, тада тачка T припада дужи KL.