Афина пресликавања

<u>Дефиниција</u> Нека је $\mathbb{V}^n$ n-димензиони векторски простор над пољем $\mathbb{F}$ и $\mathbb{A}^n$ скуп чије елементе зовемо тачкама. Уређену тројку $(\mathbb{A}^n, \mathbb{V}^n, \psi)$ називамо афиним простором ако је $\psi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{V}^n$ пресликавање за које важе следеће аксиоме:

а1) $(\forall A \in \mathbb{A}^n)(\forall \vec{v} \in \mathbb{V}^n)\ \exists! B \in \mathbb{A}^n$ такво да је $\psi(A,B) = \vec{v}$.

а2) $\forall A, B, C \in \mathbb{A}^n$ важи $\psi(A,B) + \psi(B,C) = \psi(A,C)$.

<u>Дефиниција</u> Нека је $\mathbb{A}^n$ афини простор и нека $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$. Пресликавање f је афино ако је пресликавање $\bar{f} : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ дефинисано са $\bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$, где је $M' = f(M)$ и $N' = f(N)$ коректно дефинисано линеарно пресликавање.

- Нека је $O \in \mathbb{A}^n$ и e база за $\mathbb{V}^n$. Oe зовемо репер. Координате тачке X у реперу Oe у ознаци $[X]_{Oe}$ су координате вектора $\overrightarrow{OX}$ у бази e, тј. ако је $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$, онда је $[X]_{Oe} = [\overrightarrow{OX}]_e = (x_1, \dots, x_n)$.

<u>Теорема</u> Свако афино пресликавање f у фиксираном реперу Oe има облик $x' = Ax + b$.

Дакле, свако афино пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ је облика

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

нове координате; $[\bar{f}(e_1)]$; $[\bar{f}(e_2)]$; старе координате; $[f(O)]$

Претходном запису еквивалентан је и следећи $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Овакав запис афиних пресликавања олакшава рачун када имамо композицију више афиних пресликавања.

<u>Теорема</u> Постоји јединствено афино пресликавање које пресликава 3 неколинеарне тачке у 3 неколинеарне тачке у $\mathbb{R}^2$.

- За афине трансформације простора имамо представљање $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дато помоћу $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ или у проширеном запису: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$.

- У оквиру теме Трансформација координата видели смо да се координате тачке мењају уколико променимо репер, односно тачке у простору су фиксиране (не померају се), већ се мења репер и то узрокује промену у координатама.
Са друге стране, код афиних трансформација репер остаје фиксиран, а тачке се пресликавају и то узрокује промену у координатама.

- Особине афиних пресликавања:
  - пресликавају праве у праве
  - чувају размеру колинеарних дужи
  - чувају паралелност правих
  - однос површина слике и оригинала је $|\det A|$ где је A матрица из теореме
  - пресликавања код којих је $\det A > 0$ чувају оријентацију, а она код којих је $\det A < 0$ не чувају оријентацију
- У општем случају афина пресликавања не чувају дужине и углове.
- Афино пресликавање је изометрија ако и само ако је матрица A ортогонална (односно $A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$, тј. $A^{-1} = A^T$).

Хомотетија

Дефиниција: Хомотетија $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ са центром S и коефицијентом $\lambda \neq 0$ је трансформација еуклидског простора која сваку тачку T тог простора пресликава у тачку T' такву да је $\overrightarrow{ST'} = \lambda \cdot \overrightarrow{ST}$.

- Ако хомотетија $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ са центром $S(x_S, y_S, z_S)$ и коефицијентом λ пресликава тачку $T(x,y,z)$ у тачку $T'(x',y',z')$, онда је $\overrightarrow{ST'} = \lambda \cdot \overrightarrow{ST}$.

$$[T'] - [S] = \lambda \cdot ([T] - [S])$$

$$(x', y', z') - (x_S, y_S, z_S) = \lambda \left((x,y,z) - (x_S, y_S, z_S) \right)$$

$$(x' - x_S, y' - y_S, z' - z_S) = \lambda (x - x_S, y - y_S, z - z_S)$$

$$x' - x_S = \lambda (x - x_S) \qquad y' - y_S = \lambda (y - y_S) \qquad z' - z_S = \lambda (z - z_S)$$

$$x' = \lambda x - \lambda x_S + x_S \qquad y' = \lambda y - \lambda y_S + y_S \qquad z' = \lambda z - \lambda z_S + z_S$$

$$x' = \lambda x + (1-\lambda) x_S \qquad y' = \lambda y + (1-\lambda) y_S \qquad z' = \lambda z + (1-\lambda) z_S$$

$\Rightarrow$ Формуле те хомотетије $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ су $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda) x_S \\ (1-\lambda) y_S \\ (1-\lambda) z_S \end{pmatrix}$.

- Хомотетија $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ пресликава сферу $\sigma(C, r)$ у сферу $\sigma'(C', r \cdot |\lambda|)$, где је $C' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(C)$.

Доказ: $\boxed{\subseteq}$ Нека је M произвољна тачка сфере σ. Тада је $\|\overrightarrow{CM}\| = r$. Нека је $M' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(M)$. По дефиницији хомотетије то значи да је $\overrightarrow{SM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SM}$, а важи и $\overrightarrow{SC'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SC}$ јер је $C' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(C)$.

$\overrightarrow{C'M'} = \overrightarrow{C'S} + \overrightarrow{SM'} = -\overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SM'} = -\lambda \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SM'} = -\lambda \cdot \overrightarrow{SC} + \lambda \cdot \overrightarrow{SM} = \lambda \cdot (-\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SM}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SM}) = \lambda \cdot \overrightarrow{CM} \Rightarrow \|\overrightarrow{C'M'}\| = \|\lambda \cdot \overrightarrow{CM}\| = |\lambda| \cdot \|\overrightarrow{CM}\| = |\lambda| \cdot r$

Дакле, тачка M' припада сфери σ' са центром C' и полупречником $|\lambda| \cdot r$, тј. $\mathcal{H}_{S,\lambda}(\sigma) \subseteq \sigma'$.

$\boxed{\supseteq}$ Нека је N' произвољна тачка с сфере σ' чији је центар C' и полупречник $r \cdot |\lambda|$. Докажимо да је $N' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(N)$ за неку тачку N са сфере σ. Да би било $N' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(N)$, мора бити $\overrightarrow{SN'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SN}$, те је $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{SN'}$.

Како $N' \in \sigma'$, то је $\|\overrightarrow{C'N'}\| = r \cdot |\lambda|$, а важи и $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SN} = -\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SN} \underset{\overrightarrow{SC'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SC}}{=} -\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{SC'} + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{SN'} = \frac{1}{\lambda} (-\overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SN'}) = \frac{1}{\lambda} (\overrightarrow{C'S} + \overrightarrow{SN'}) = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{C'N'}$.

$\Rightarrow \| \vec{CN} \| = \| \frac{1}{\lambda} \vec{C'N'} \| = \frac{1}{|\lambda|} \| \vec{C'N'} \| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot r \cdot |\lambda| = r \quad \Rightarrow N \in \mathcal{G}$

Како је $N' = \mathcal{H}_{S,\lambda}(N)$ и $N \in \mathcal{G}$, то је $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{H}_{S,\lambda}(\mathcal{G})$.

Дакле, доказано је да је $\mathcal{H}_{S,\lambda}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$, те се центар сфере $\mathcal{G}$ при $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ слика у центар сфере $\mathcal{G}'$, која је слика сфере $\mathcal{G}$ при тој хомотетији.

6 Афина пресликавања

6.1. а) Одредити афино пресликавање које тачке $A_0(0,0)$, $B_0(1,0)$, $C_0(0,1)$ пресликава редом у тачке $A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$.

б) Да ли је пресликавање изометрија, чува ли оријентацију и површину? в) Одредити му инверзно пресликавање.

Решење: а) Знамо да се свако афино пресликавање у $\mathbb{R}^2$, па и пресликавање f које желимо да одредимо, може представити у облику $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$f(A_0)=A_1 \Rightarrow (0,0) \xrightarrow{f} (5,3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 \\ a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = 5 \quad b_2 = 3$$

$$f(B_0)=B_1 \Rightarrow (1,0) \xrightarrow{f} (6,2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+5 \\ a_{21}+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11}+5=6 \\ a_{21}+3=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11}=6-5=1 \\ a_{21}=2-3=-1 \end{matrix}$$

$$f(C_0)=C_1 \Rightarrow (0,1) \xrightarrow{f} (4,5) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}+5 \\ a_{22}+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12}+5=4 \\ a_{22}+3=5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12}=4-5=-1 \\ a_{22}=5-3=2 \end{matrix}$$

Дакле, тражено афино пресликавање је $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

б) Приметимо да посматрано пресликавање f пресликава дуж A_0B_0 дужине $\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(-1)^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$ у дуж A_1B_1 дужине $\sqrt{(5-6)^2+(3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, те пресликаване f није изометрија.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2-(-1)\cdot(-1) = 2-1 = 1 > 0 \Rightarrow$$ Пресликавање f чува оријентацију.

Како је однос површина слике при пресликавању f и оригинала једнак $|\det A| = |1| = 1$, то се површина чува.

в) f^{-1} - тражено инверзно пресликавање

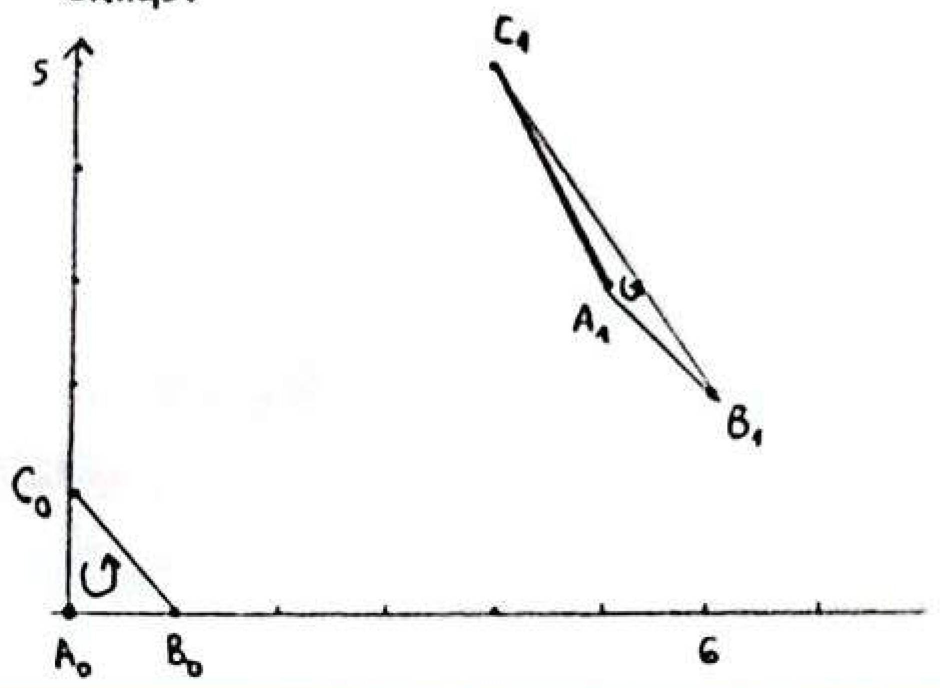
$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ тј. $X' = A\cdot X + b$ ← помножимо ово слева са A^{-1}

$$A^{-1}X' = A^{-1}AX + A^{-1}b$$
$$A^{-1}X' = EX + A^{-1}b$$
$$A^{-1}X' = X + A^{-1}b$$
$$f^{-1}: X = A^{-1}X' - A^{-1}b$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ јер је $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f^{-1}: X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X' - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ тј. $f^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$ је тражено инверзно пресликавање

Скица:



6.2. а) Одредити афино пресликавање које троугао $A_1B_1C_1$: $A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$ пресликава у троугао $A_2B_2C_2$: $A_2(1,1)$, $B_2(-1,0)$, $C_2(0,-3)$. б) Чува ли то пресликавање оријентацију? Скицирати. в) Одредити површину троугла $A_2B_2C_2$ ако се зна да је површина троугла $A_1B_1C_1$ једнака $\frac{1}{2}$.

Решење: а) Тражено афино пресликавање је дато са $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

$$f(A_1)=A_2 \Rightarrow (5,3) \xmapsto{f} (1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_{11}+3a_{12} \\ 5a_{21}+3a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_{11}+3a_{12}+b_1 \\ 5a_{21}+3a_{22}+b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5a_{11}+3a_{12}+b_1=1 \\ 5a_{21}+3a_{22}+b_2=1 \end{matrix}$$

$$f(B_1)=B_2 \Rightarrow (6,2) \xmapsto{f} (-1,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a_{11}+2a_{12} \\ 6a_{21}+2a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a_{11}+2a_{12}+b_1 \\ 6a_{21}+2a_{22}+b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 6a_{11}+2a_{12}+b_1=-1 \\ 6a_{21}+2a_{22}+b_2=0 \end{matrix}$$

$$f(C_1)=C_2 \Rightarrow (4,5) \xmapsto{f} (0,-3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_{11}+5a_{12} \\ 4a_{21}+5a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_{11}+5a_{12}+b_1 \\ 4a_{21}+5a_{22}+b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4a_{11}+5a_{12}+b_1=0 \\ 4a_{21}+5a_{22}+b_2=-3 \end{matrix}$$

Сада ћемо решити систем од 6 једначина са 6 непознатих тако што ћемо решити два система од по три једначине са 3 непознате.

$$\begin{aligned} 5a_{11}+3a_{12}+b_1&=1 \\ 6a_{11}+2a_{12}+b_1&=-1 \\ 4a_{11}+5a_{12}+b_1&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b_1}+5a_{11}+3a_{12}&=1 \quad /\cdot(-1) \quad /\cdot(-1) \\ b_1+6a_{11}+2a_{12}&=-1 \\ b_1+4a_{11}+5a_{12}&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b_1}+5a_{11}+3a_{12}&=1 \\ \boxed{a_{11}}-a_{12}&=-2 \quad /\cdot 1 \\ -a_{11}+2a_{12}&=-1 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b_1}+5a_{11}+3a_{12}&=1 \\ \boxed{a_{11}}-a_{12}&=-2 \\ \boxed{a_{12}}&=-3 \end{aligned}$$

$a_{11}=-2+a_{12}=-2-3=-5$

$b_1=1-5a_{11}-3a_{12}=1-5\cdot(-5)-3\cdot(-3)=1+25+9=35$

$$\begin{aligned} 5a_{21}+3a_{22}+b_2&=1 \\ 6a_{21}+2a_{22}+b_2&=0 \\ 4a_{21}+5a_{22}+b_2&=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b_2}+5a_{21}+3a_{22}&=1 \quad /\cdot(-1) \quad /\cdot(-1) \\ b_2+6a_{21}+2a_{22}&=0 \quad + \\ b_2+4a_{21}+5a_{22}&=-3 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b_2}+5a_{21}+3a_{22}&=1 \\ \boxed{a_{21}}-a_{22}&=-1 \quad /\cdot 1 \\ -a_{21}+2a_{22}&=-4 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{b_2}+5a_{21}+3a_{22}&=1 \\ \boxed{a_{21}}-a_{22}&=-1 \\ \boxed{a_{22}}&=-5 \end{aligned}$$

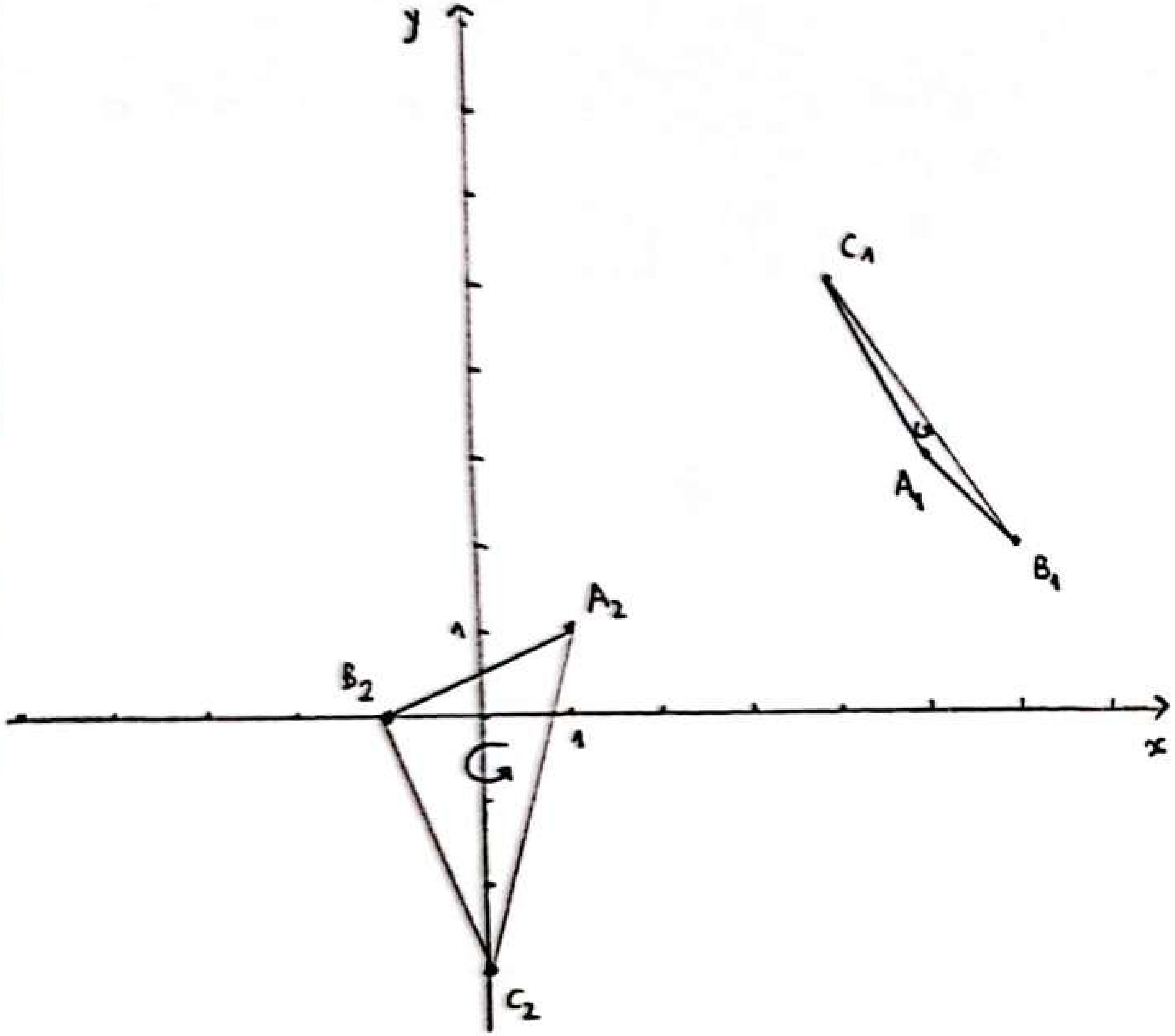
$a_{21}=-1+a_{22}=-1-5=-6$

$b_2=1-5a_{21}-3a_{22}=1-5\cdot(-6)-3\cdot(-5)$
$=1+30+15=46$

Тражено афино пресликавање је

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

б) Како је $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -5\cdot(-5)-(-6)\cdot(-3) = 25-18 = 7 > 0$, то афино пресликавање f чува оријентацију.



На слици се види да су троуглови $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ исте оријентације.

в) $P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}$

$\frac{P_{f(A_1B_1C_1)}}{P_{A_1B_1C_1}} = |\det A| \overset{б)}{=} 7 \Rightarrow \frac{P_{A_2B_2C_2}}{P_{A_1B_1C_1}} = 7 \Rightarrow P_{A_2B_2C_2} = 7\cdot P_{A_1B_1C_1} = 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ => Површина троугла $A_2B_2C_2$ је $\frac{7}{2}$.

6.3. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,2)$ за угао од $\varphi = \frac{\pi}{4}$. б) Шта је слика праве $y=-x$ при том пресликавању? Нацртати!

Решење: а) Како знамо формуле ротације око координатног почетка O идеја је да транслацијом пресликамо тачку S у координатни почетак O. То је транслација за вектор $\vec{SO}$ која се означава са $\mathcal{T}_{\vec{SO}}$ и она је изометрија, тј. при транслацији се чува дужина дужи, и то директна изометрија јер се не мења оријентација троугла при транслацији.

Важи теорема о трансмутацији: За директну изометрију равни $\mathcal{J}$ и ротацију $\mathcal{R}_{O,\varphi}$ важи
$\mathcal{J}\circ\mathcal{R}_{O,\varphi}\circ\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{J}(O),\varphi}$.

Специјално, за $\mathcal{J}=\mathcal{T}_{\vec{OS}}$ је $\mathcal{J}^{-1}=\mathcal{T}_{-\vec{OS}}=\mathcal{T}_{\vec{SO}}$ и важи $\mathcal{T}_{\vec{OS}}\circ\mathcal{R}_{O,\frac{\pi}{4}}\circ\mathcal{T}_{\vec{SO}} = \mathcal{R}_{\mathcal{T}_{\vec{OS}}(O),\frac{\pi}{4}} = \mathcal{R}_{S,\frac{\pi}{4}}$.

Формуле транслације за вектор $\vec{SO}=[O]-[S]=$
$=(0,0)-(2,2)=(-2,-2)$ су $\mathcal{T}_{\vec{SO}}$: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

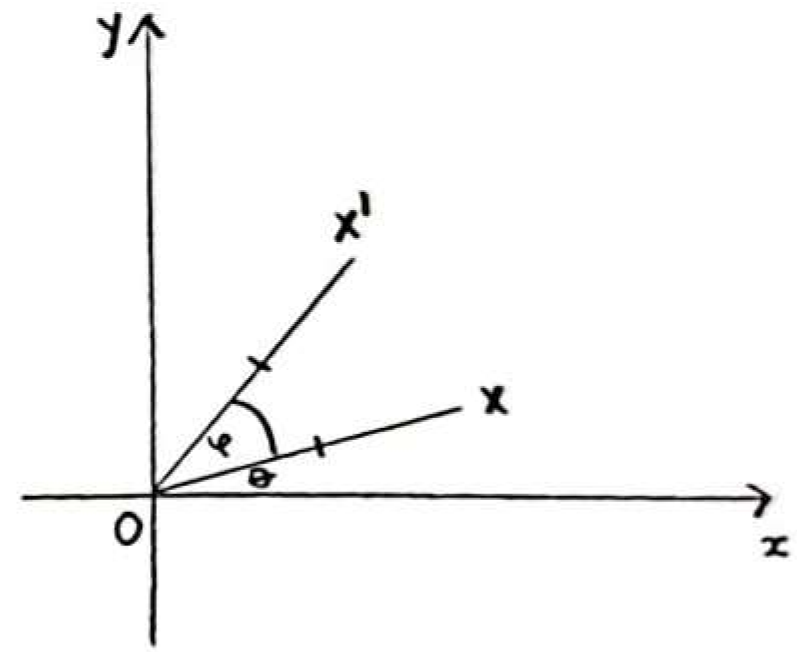
тј. $\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$.

Формуле ротације $\mathcal{R}_{O,\frac{\pi}{4}}$ су $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ тј. $\begin{pmatrix}x''\\y''\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}$

Формуле транслације за вектор $\vec{OS}=[S]-[O]=(2,2)-(0,0)=(2,2)$
су $\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ тј. $\mathcal{T}_{\vec{OS}}$: $\begin{pmatrix}x'''\\y'''\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\\1\end{pmatrix}$.

Формуле ротације око координатног почетка за угао φ

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



$X(OX\cos\theta, OX\sin\theta)$ тј. $X(x,y)$

$X'(OX'\cos(\theta+\varphi), OX'\sin(\theta+\varphi))$ тј $X'(x',y')$

$x'=OX'\cos(\theta+\varphi)=OX\cos(\theta+\varphi)=OX(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)$
$=(\cos\varphi\ \ -\sin\varphi)\begin{pmatrix}OX\cos\theta\\OX\sin\theta\end{pmatrix}=(\cos\varphi\ \ -\sin\varphi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$y'=OX'\sin(\theta+\varphi)=OX\sin(\theta+\varphi)=OX(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)$
$=(\sin\varphi\ \ \cos\varphi)\begin{pmatrix}OX\cos\theta\\OX\sin\theta\end{pmatrix}=(\sin\varphi\ \ \cos\varphi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}OX'\cos(\theta+\varphi)\\OX'\sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Матрицу $[\mathcal{R}_{S,\frac{\pi}{4}}]$ која одговара ротацији $\mathcal{R}_{S,\frac{\pi}{4}}$ добијамо као производ матрица $[T_{\vec{OS}}]\cdot[\mathcal{R}_{O,\frac{\pi}{4}}]\cdot[T_{\vec{SO}}]$.

$$[\mathcal{R}_{S,\frac{\pi}{4}}] = [T_{\vec{OS}}]\cdot[\mathcal{R}_{O,\frac{\pi}{4}}]\cdot[T_{\vec{SO}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тј. $\mathcal{R}_{S,\frac{\pi}{4}}: \quad \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

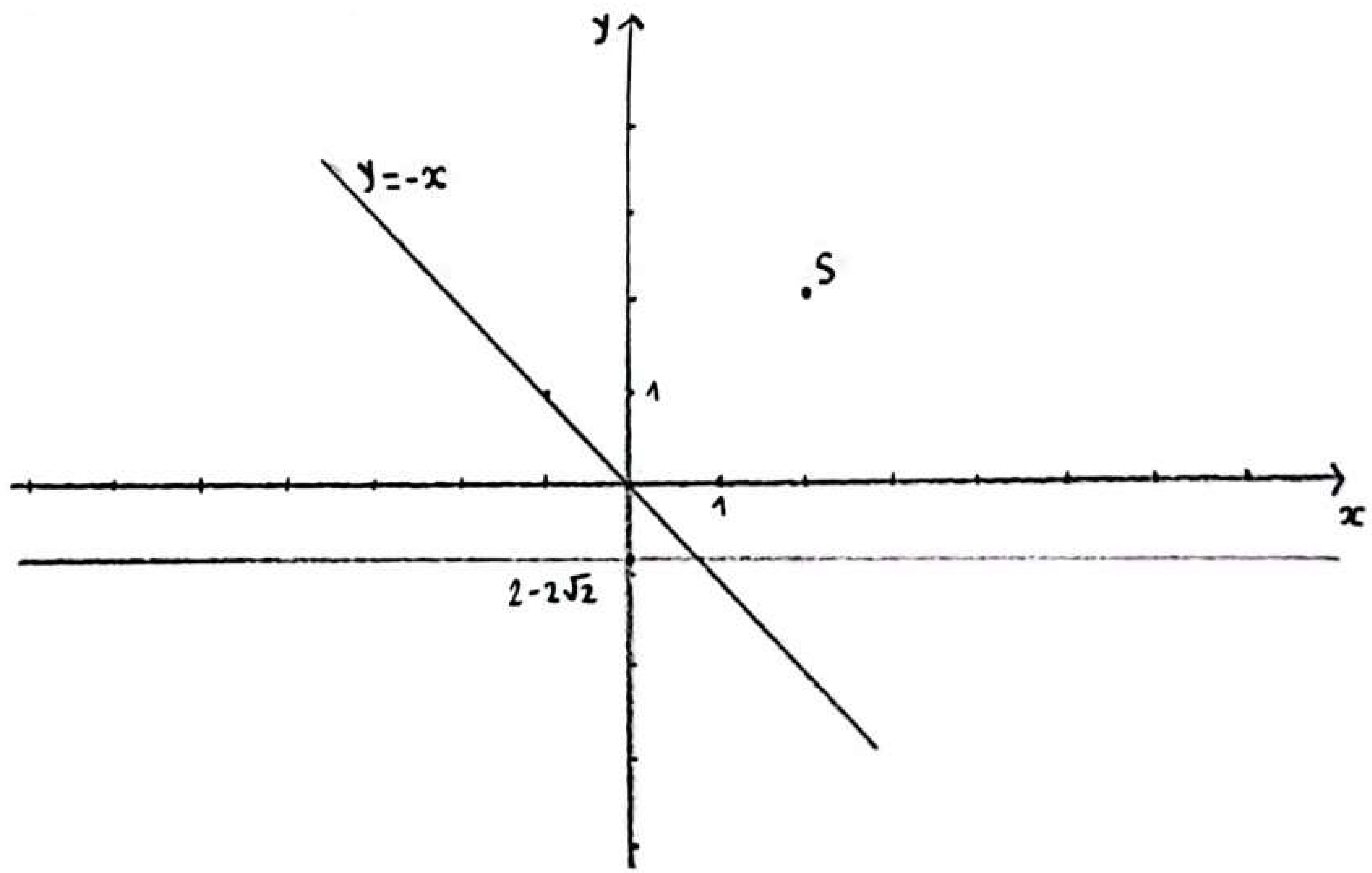
б) Из дела а) имамо $x''' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2$, $y''' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2 - 2\sqrt{2}$.

Да бисмо нашли слику праве $y=-x$ заменимо услов $y=-x$ у претходне једначине.

$$x''' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-x) + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2 = \sqrt{2}x + 2$$

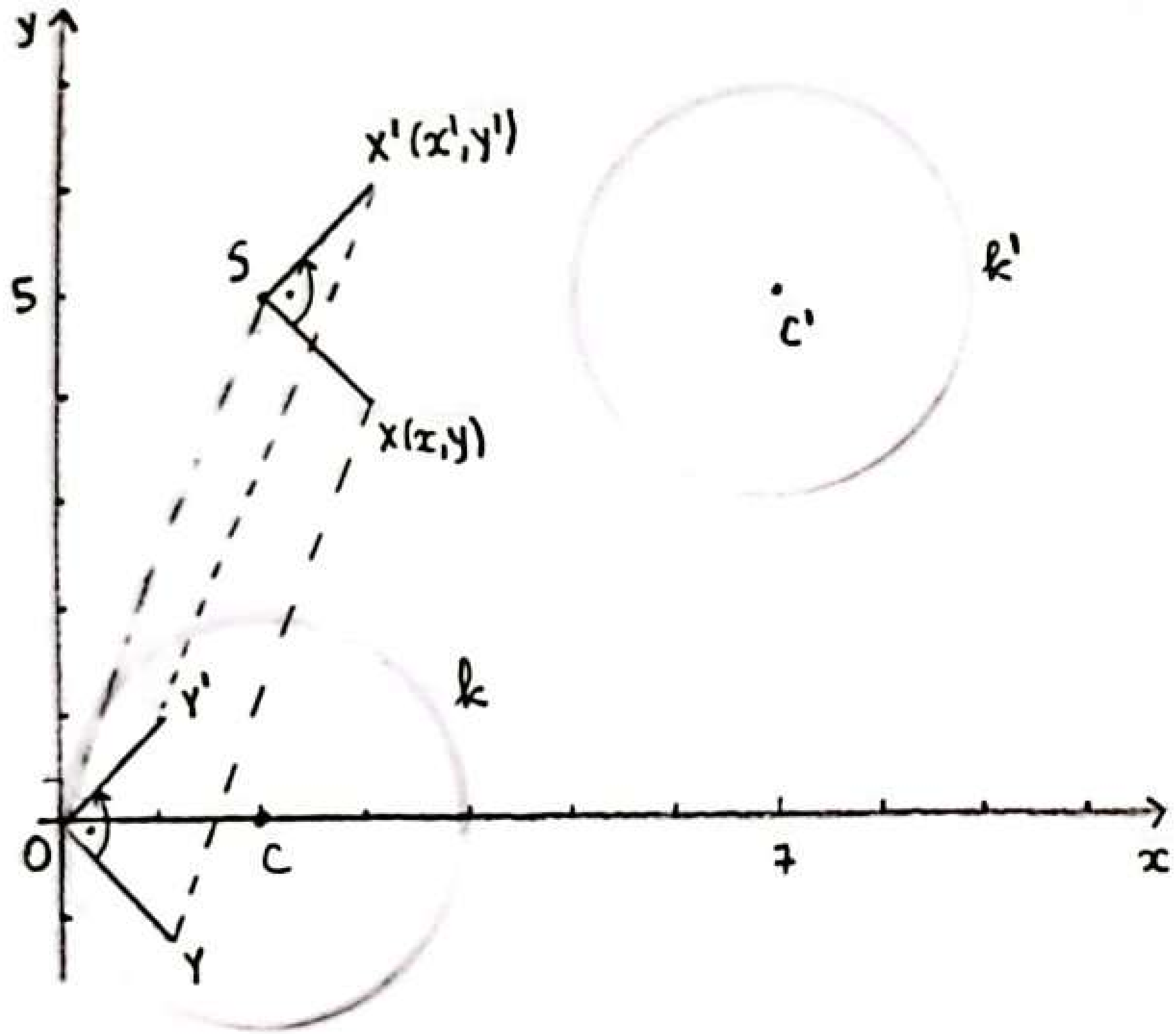
$$y''' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-x) + 2 - 2\sqrt{2} = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}x} + 2 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2}$$

Када је $x \in \mathbb{R}$, тада је $x''' = \sqrt{2}x + 2 \in \mathbb{R}$, те $x''' = \sqrt{2}x + 2$, $y''' = 2 - 2\sqrt{2}$ представља једначину праве $y''' = 2 - 2\sqrt{2}$.



(6.4.) а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,5)$ за угао од $\varphi=\frac{\pi}{2}$. б) Шта је слика круга $(x-2)^2+y^2=4$ при том пресликавању? Нацртати!

Решење: а)



Означимо са $X'(x',y')$ слику произвољне тачке $X(x,y)$ при ротацији око тачке $S(2,5)$ за угао од $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Уколико тачку S транслирамо у координатни почетак $O(0,0)$ и тачке X и X' транслирамо за исти вектор $\vec{SO}$ у тачке Y и Y' такве да је $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{SO}$, тада тачке Y и Y' имају координате $[Y]=[X]+\overrightarrow{SO}=(x,y)+(-2,-5)=(x-2,y-5)$

$[Y]-[X]=\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{SO}$ $\qquad$ $\overrightarrow{SO}=[O]-[S]=(0,0)-(2,5)=(-2,-5)$

и $[Y']=[X']+\overrightarrow{SO}=(x',y')+(-2,-5)=(x'-2,y'-5)$.

$[Y']-[X']=\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{SO}$

Приметимо да је Y' слика тачке Y при ротацији око координатног почетка $O(0,0)$ за угао од $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Дакле, $\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}$.

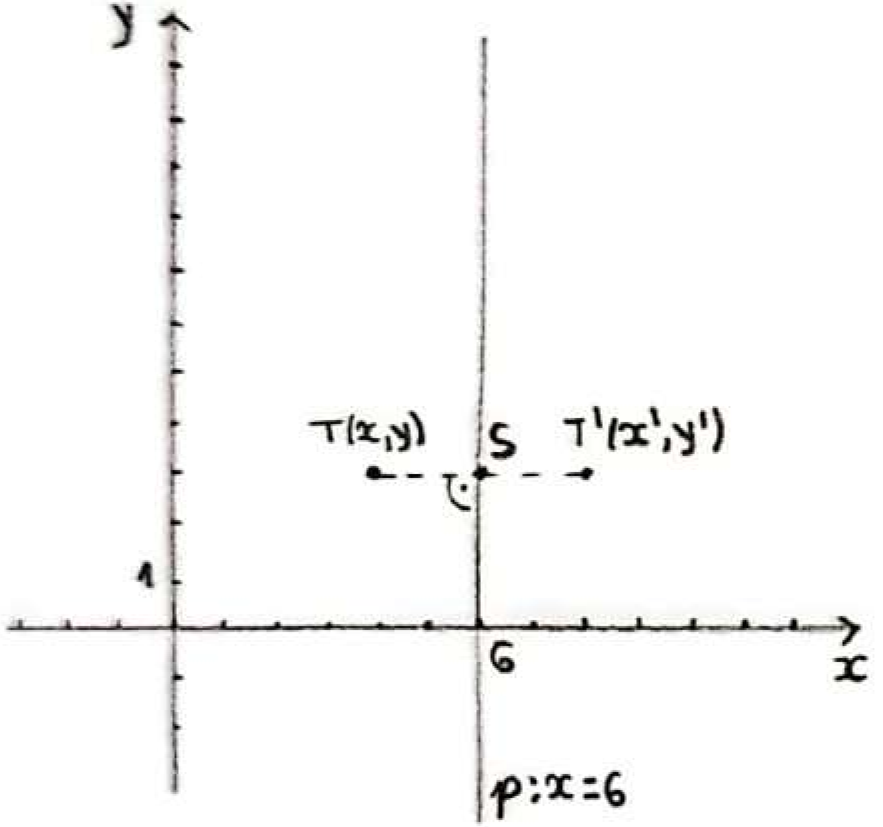
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

б) При ротацији око тачке $S(2,5)$ за угао $\varphi=\frac{\pi}{2}$ се круг $k: (x-2)^2+y^2=4$ са центром $C(2,0)$ и полупречника 2 пресликава у круг са центром C', при чему је C' слика тачке C при ротацији око тачке S за угао $\frac{\pi}{2}$, и полупречника 2. Како су формуле посматране ротације $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, то су координате тачке C' $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, те је тражена слика круга k круг $k': (x'-7)^2+(y'-5)^2=2^2=4$.

(6.5.) Одредити формуле рефлексије у односу на праву $p: x=6$.

Решење:



Нека је $T'(x',y')$ слика произвољне тачке $T(x,y)$ при рефлексији у односу на праву $p: x=6$.

По дефиницији рефлексије тада важи $TT' \perp p$ и средиште S дужи TT' припада правој p.

$p: x=6$ тј. $x-6=0 \Rightarrow \vec{n}_p=(1,0)$

Како је $TT' \perp p$, то су вектори $\vec{TT'}=[T']-[T]=(x',y')-(x,y)=$ $=(x'-x, y'-y)$ и $\vec{n}_p=(1,0)$ колинеарни, те је $y'-y=0$ тј. $y'=y$.

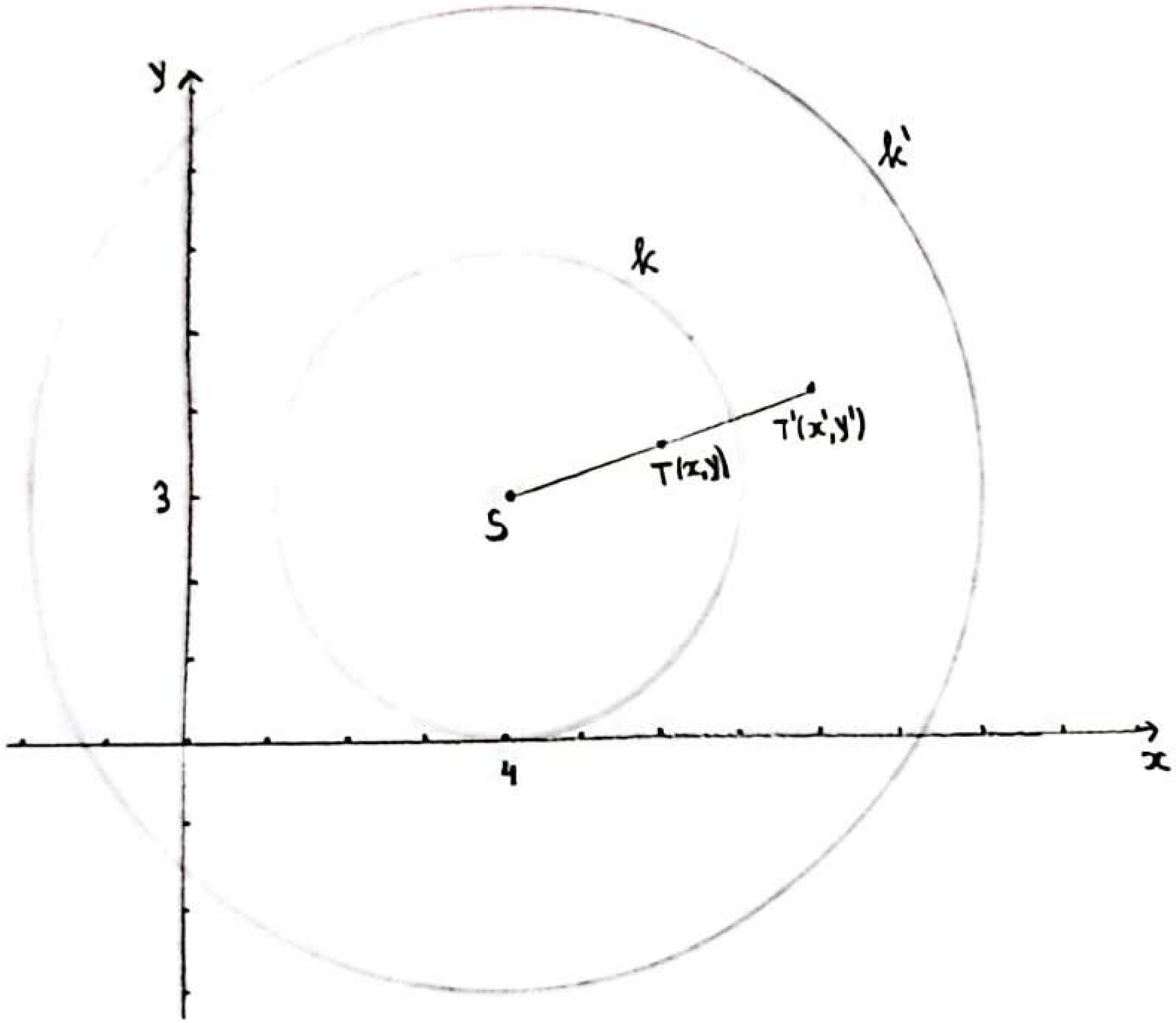
Координате средишта S дужи TT' су $S\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$, те како $S \in p$, то мора бити $\frac{x+x'}{2}=6$ тј. $x+x'=6\cdot 2=12$, одакле је $x'=12-x=-x+12$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+12 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$ су тражене

формуле рефлексије у односу на праву $p: x=6$.

66) Одредити формуле хомотетије са коефицијентом 2 у односу на тачку $S(4,3)$. Шта је слика круга $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ при тој хомотетији?

Решење:



Хомотетија $\mathcal{H}_{S,2}$ са центром S и коефицијентом 2 пресликава тачку S у себе, а произвољну тачку $T(x,y)$ различиту од S у тачку $T'(x',y')$ такву да је $\overrightarrow{ST'}=2\cdot\overrightarrow{ST}$.

$$\overrightarrow{ST'}=2\cdot\overrightarrow{ST}$$

$$[T']-[S]=2\cdot([T]-[S])$$

$$(x',y')-(4,3)=2\cdot((x,y)-(4,3))$$

$$(x'-4,y'-3)=2\cdot(x-4,y-3)$$

$$(x'-4,y'-3)=(2x-8,2y-6)$$

$$x'-4=2x-8 \Rightarrow x'=2x-8+4=2x-4$$

$$y'-3=2y-6 \Rightarrow y'=2y-6+3=2y-3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$ су тражене формуле хомотетије са коефицијентом 2 у односу на тачку $S(4,3)$

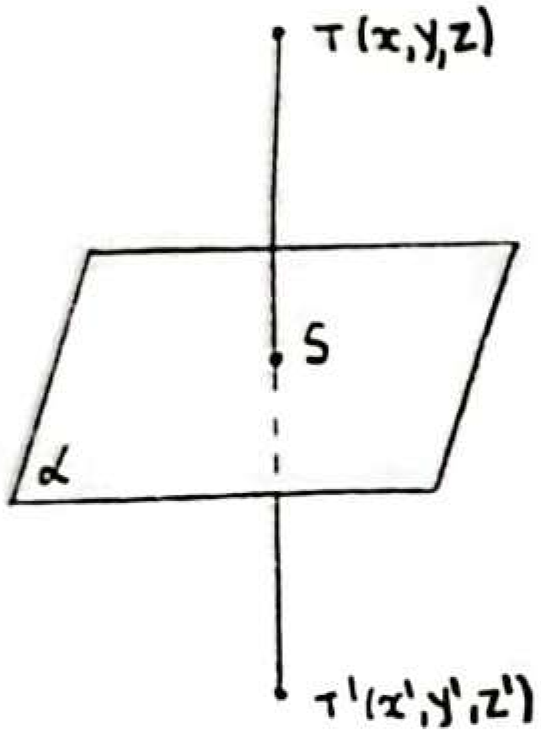
Приметимо да круг $k: (x-4)^2+(y-3)^2=9$ има центар баш у центру хомотетије $\mathcal{H}_{S,2}$, тј. у тачки $S(4,3)$ и полупречник $\sqrt{9}=3$. Слика круга k је круг k' са центром у тачки $\mathcal{H}_{S,2}(S)=S$ и полупречника $2\cdot3=6$ (јер је полупречник круга k једнак 3, а коефицијент хомотетије $\mathcal{H}_{S,2}$ је 2).

Дакле, слика круга k при посматраној хомотетији је круг $k': (x-4)^2+(y-3)^2=6^2=36$.

6.7. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha: 2x+2y-z+1=0$.

б) Шта је слика сфере $x^2+y^2+z^2=1$ при тој рефлексији? Скицирати!

Решење: а)



Означимо са $T'(x',y',z')$ слику тачке $T(x,y,z)$ при рефлексији S_α простора у односу на раван $\alpha: 2x+2y-z+1=0$.

Тада је $TT' \perp \alpha$ и средиште S дужи TT' припада равни α.

$\alpha: 2x+2y-z+1=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (2,2,-1)$ $\qquad S\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$

$$\overrightarrow{TS} = [S]-[T] = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right) - (x,y,z) = \left(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y}{2}, \frac{z'-z}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{TS} \perp \alpha \Rightarrow \overrightarrow{TS} = \lambda \cdot \vec{n}_\alpha = \lambda\cdot(2,2,-1) = (2\lambda, 2\lambda, -\lambda)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y}{2}, \frac{z'-z}{2}\right) = (2\lambda, 2\lambda, -\lambda) \Rightarrow \frac{x'-x}{2} = 2\lambda, \ \frac{y'-y}{2} = 2\lambda, \ \frac{z'-z}{2} = -\lambda$$

$$x' = 4\lambda + x \qquad y' = 4\lambda + y \qquad z' = -2\lambda + z$$

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{x+4\lambda+x}{2} = \frac{2x+4\lambda}{2} = x+2\lambda$$

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{y+4\lambda+y}{2} = \frac{2y+4\lambda}{2} = y+2\lambda$$

$$\frac{z+z'}{2} = \frac{z-2\lambda+z}{2} = \frac{2z-2\lambda}{2} = z-\lambda$$

$$S(x+2\lambda, y+2\lambda, z-\lambda) \in \alpha \Rightarrow 2\cdot(x+2\lambda) + 2\cdot(y+2\lambda) - (z-\lambda) + 1 = 0$$

$$2x+4\lambda+2y+4\lambda-z+\lambda+1=0$$

$$2x+2y-z+1+9\lambda=0$$

$$9\lambda = -2x-2y+z-1$$

$$\lambda = \frac{1}{9}(-2x-2y+z-1) = -\frac{1}{9}(2x+2y-z+1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x' &= 4\lambda + x = -\frac{4}{9}(2x+2y-z+1) + x = -\frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{4}{9} + x = \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{4}{9} \\ y' &= 4\lambda + y = -\frac{4}{9}(2x+2y-z+1) + y = -\frac{8}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{4}{9} + y = -\frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{4}{9} \\ z' &= z - 2\lambda = z + \frac{2}{9}(2x+2y-z+1) = z + \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{2}{9}z + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + \frac{2}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

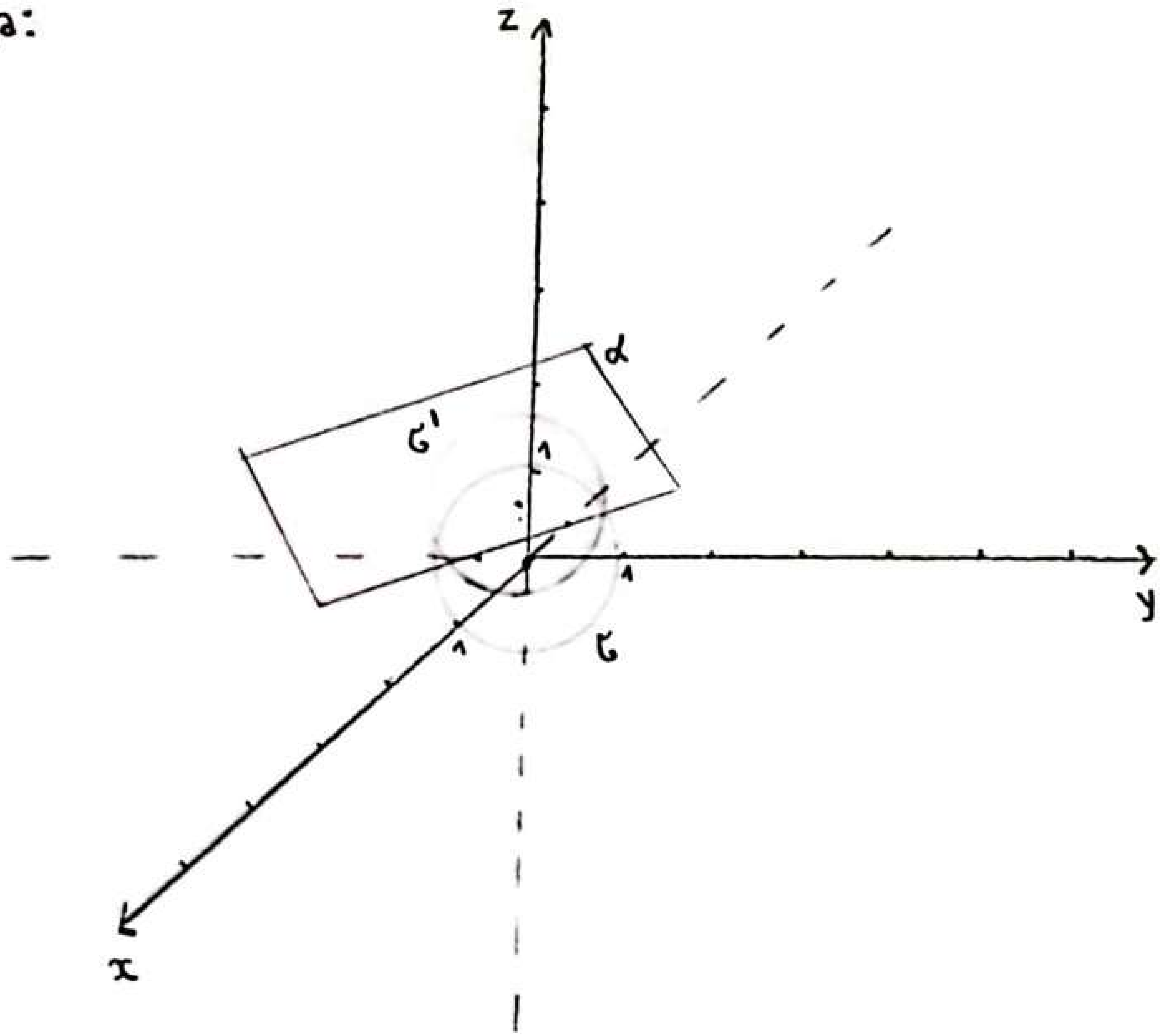
су тражене формуле рефлексије простора у односу на раван α

б) Слика сфере $\sigma: x^2+y^2+z^2=1$ при рефлексији у односу на раван α је сфера σ' истог полупречника као сфера σ, односно $\sqrt{1}=1$, чији је центар C' слика центра $C(0,0,0)$ сфере σ при рефлексији S_α у односу на раван α.

Координате тачке C' су $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Дакле, слика сфере $\sigma: x^2+y^2+z^2=1$ при рефлексији у односу на раван α је сфера $\sigma': (x'-(-\frac{4}{9}))^2+(y'-(-\frac{4}{9}))^2+(z'-\frac{2}{9})^2=1^2$, тј. $\sigma': (x'+\frac{4}{9})^2+(y'+\frac{4}{9})^2+(z'-\frac{2}{9})^2=1$.

Скица:



$\alpha: 2x+2y-z+1=0$

x	0	$-\frac{1}{2}$	0
y	0	0	$-\frac{1}{2}$
z	1	0	0

Како раван α сече сферу σ, то долази до преклапања сфере σ и њене слике σ'.

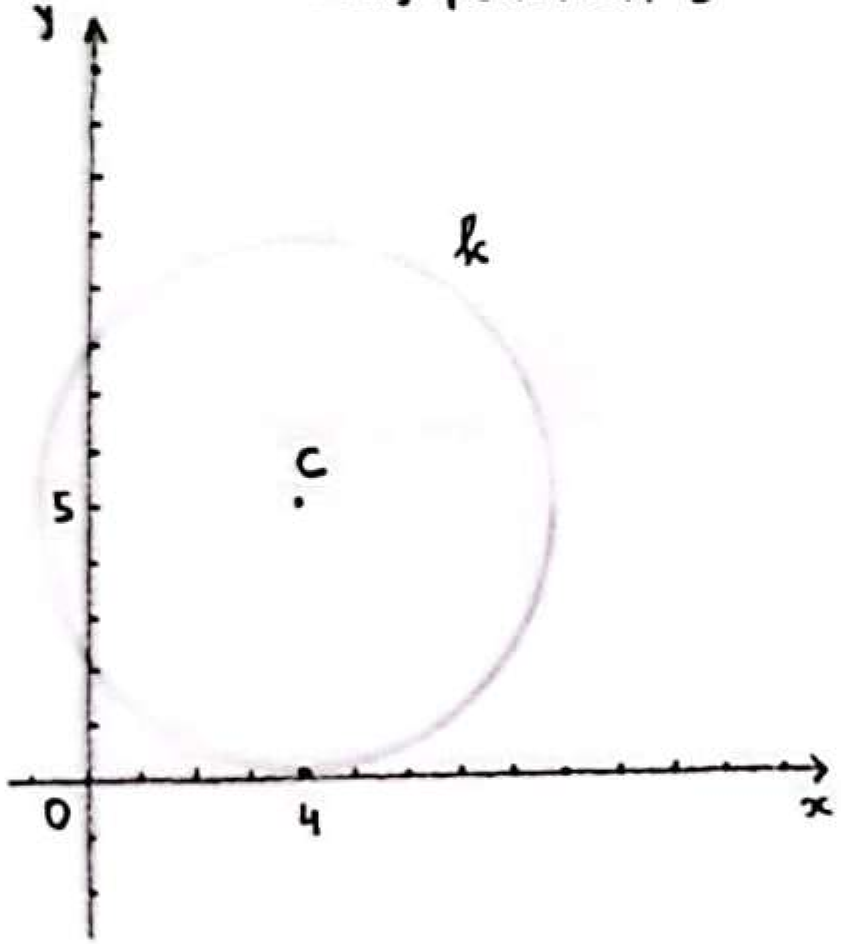
6.8. Одредити бар једно афино пресликавање равни које круг $k: x^2+y^2-8x-10y+16=0$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

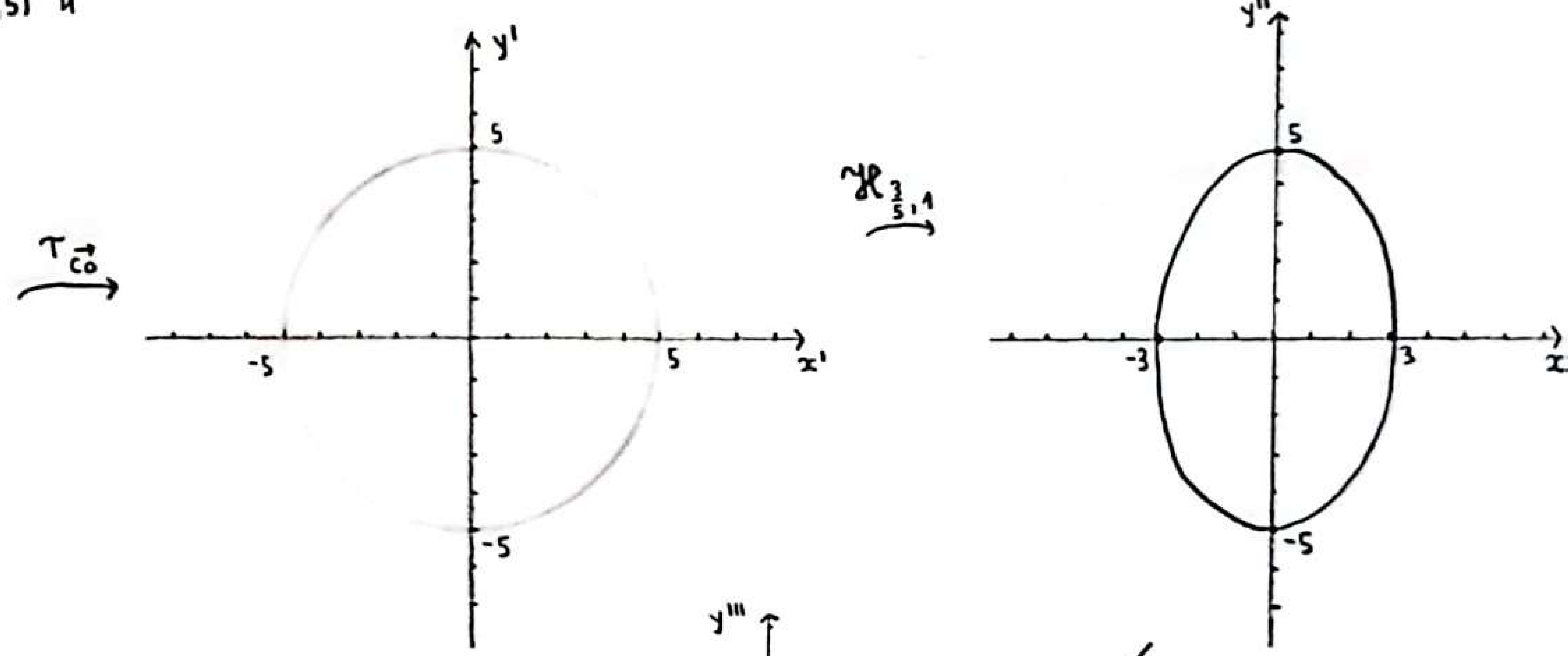
<u>Решење:</u>

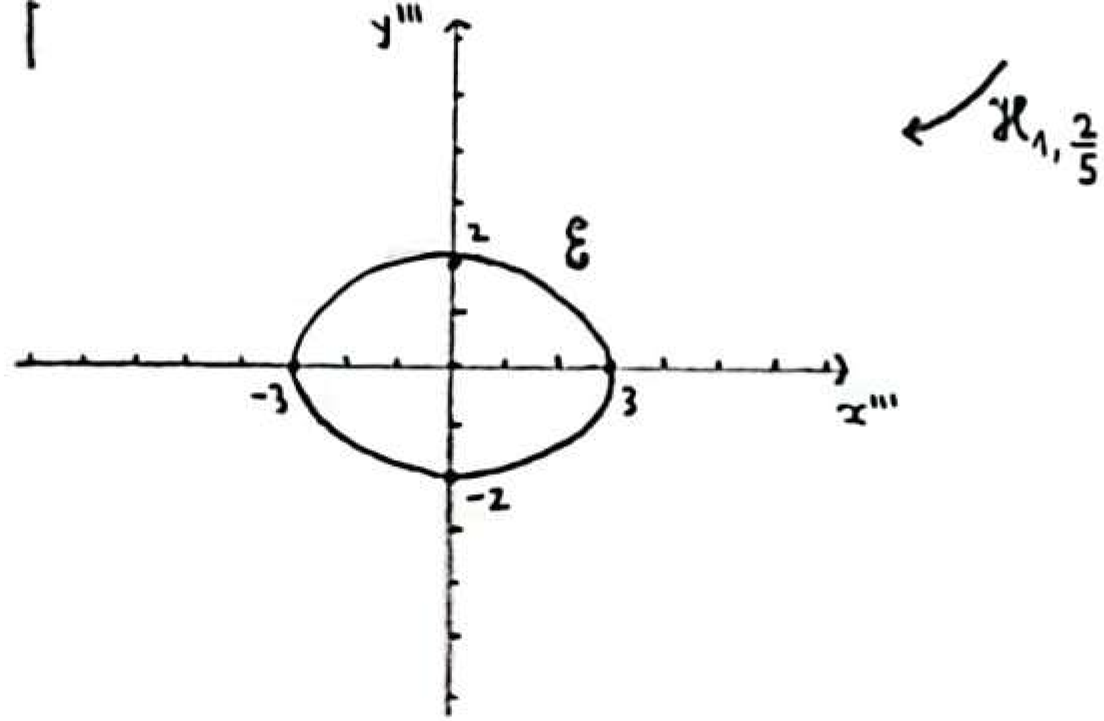
$$k: x^2+y^2-8x-10y+16=0$$
$$x^2-8x+y^2-10y+16=0$$
$$(x-4)^2-4^2+(y-5)^2-5^2+16=0$$
$$(x-4)^2+(y-5)^2-\cancel{16}-25+\cancel{16}=0$$
$$(x-4)^2+(y-5)^2=25=5^2$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$
$$a^2=9 \underset{a>0}{\Rightarrow} a=3$$
$$b^2=4 \underset{b>0}{\Rightarrow} b=2$$

k је круг са центром $C(4,5)$ и полупречником 5







Приметимо да се круг k може пресликати на елипсу $\mathcal{E}$ помоћу композиције $\mathcal{H}_{1,\frac{2}{5}}\circ\mathcal{H}_{\frac{3}{5},1}\circ T_{\vec{CO}}$, при чему су $\mathcal{H}_{1,\frac{2}{5}}$ и $\mathcal{H}_{\frac{3}{5},1}$ скалирања по y и x-оси.

$\vec{CO} = [O] - [C] = (0,0) - (4,5) = (-4,-5)$

$T_{\vec{CO}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ тј. у проширеном облику $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_{\frac{3}{5},1}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ тј. у проширеном облику $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_{1,\frac{2}{5}}: \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ тј. у проширеном облику $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$

Матрица која одговара посматраном афином пресликавању је

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

те је тражено афино пресликавање $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ -2 \end{pmatrix}.$

(6.9.) Доказати да су све параболе међусобно сличне.

<u>Решење:</u> Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ произвољне параболе у равни. Одаберимо Декартов правоугли координатни систем Oxy тако да у њему парабола $\mathcal{P}_1$ има канонску једначину $y^2 = 2p_1 x$. Парабола $\mathcal{P}_2$ онда има једначину $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ за неке $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

На основу теореме о свођењу криве другог реда на канонски облик, постоји трансформација координата $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ таква да је координатни систем $O'x'y'$ Декартов правоугли координатни систем и да у координатном систему $O'x'y'$ парабола $\mathcal{P}_2$ има канонску једначину $y'^2 = 2p_2 x'$. Тачан поступак доласка до трансформације координата $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ описан је у задатку 5.16. из области 5 Криве другог реда. Матрица преласка $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ с ортонормиране базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ Декартовог правоуглог координатног система Oxy на ортонормирану базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ Декартовог правоуглог координатног система $O'x'y'$ јесте ортогонална матрица, те је $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ и добијамо:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \Big/ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix}$$

Дефинишимо сада афино пресликавање f такво да је $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix}$.

Како је матрица $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ ортогонална, то је f изометрија. Такође, ако тачка $T(x, y)$ припада параболи $\mathcal{P}_2$, онда њена слика $T_1(x_1, y_1)$ припада параболи $y^2 = 2p_2 x$. Заиста, како у $O'x'y'$ координатном систему парабола $\mathcal{P}_2$ има једначину $y'^2 = 2p_2 x'$, а тачка $T_1 = f(T)$ у координатном систему Oxy има исте

координате као тачка T у координатном систему $O'x'y'$ (а знамо да за њих важи $y'^2 = 2p_2x'$ јер тачка T припада параболи $\mathcal{P}_2$), то следи да тачка $T_1(x_1, y_1) = f(T) = f(x,y)$ задовољава једначину $y^2 = 2p_2x$.
Према томе, слика параболе $\mathcal{P}_2$ је парабола $\mathcal{P}_3 : y^2 = 2p_2x$.
У равни су две фигуре сличне ако постоји трансформација $g = \mathcal{H}_{S,\lambda} \circ f$ где је $\mathcal{H}_{S,\lambda}$ нека хомотетија и f нека изометрија таква да се помоћу g једна фигура слика у другу. Како се помоћу изометрије f парабола $\mathcal{P}_2$ слика у параболу $\mathcal{P}_3$, довољно је наћи хомотетију којом се $\mathcal{P}_3$ слика у $\mathcal{P}_1$.
У наставку ћемо наћи хомотетију $\mathcal{H}_{O,\lambda}$, где је O координатни почетак, такву да се помоћу ње парабола $\mathcal{P}_3 : y^2 = 2p_2x$ пресликава у параболу $\mathcal{P}_1 : y^2 = 2p_1x$.

$P(x_P, y_P) \in \mathcal{P}_3 \Rightarrow y_P^2 = 2p_2x_P \quad (*)$

$\mathcal{H}_{O,\lambda}: \begin{array}{l} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{array}$ ← јер се произвољна тачка $T(x,y)$ слика у тачку $T'(x', y')$ такву да је $\overrightarrow{OT'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OT}$

$$[T'] - [O] = \lambda \cdot ([T] - [O])$$
$$(x', y') - (0,0) = \lambda((x,y) - (0,0))$$
$$(x', y') = \lambda(x,y)$$

Желимо да $Q = \mathcal{H}_{O,\lambda}(P) \in \mathcal{P}_1$.

$x_Q = \lambda \cdot x_P$, $y_Q = \lambda \cdot y_P \Rightarrow$ Мора бити $y_Q^2 = 2p_1x_Q$ да би $Q \in \mathcal{P}_1$.

$$(\lambda y_P)^2 = 2p_1 \cdot \lambda x_P$$
$$\lambda^2 y_P^2 = 2p_1 \lambda x_P \quad /: \lambda \neq 0$$
$$\lambda y_P^2 = 2p_1 x_P \quad \text{а важи } (*)\ y_P^2 = 2p_2x_P$$
$$\lambda \cdot 2p_2x_P = 2p_1x_P$$

Тачка $P(x_P, y_P)$ с параболе $\mathcal{P}_3$ је произвољна, те можемо посматрати произвољну тачку која није теме и чије је $x_P \neq 0$. $\Rightarrow \lambda \cdot 2p_2x_P = 2p_1x_P \ /: 2x_Pp_2 \Rightarrow \lambda = \frac{p_1}{p_2}$. Дакле, хомотетија $\mathcal{H}_{O,\frac{p_1}{p_2}}$ пресликава параболу $\mathcal{P}_3$ на параболу $\mathcal{P}_1$, тј. композиција $\mathcal{H}_{O,\frac{p_1}{p_2}} \circ f$ пресликава $\mathcal{P}_2$ на $\mathcal{P}_1$, те су параболе сличне.

6.10. Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију у односу на тачку $S(-1,1,3)$. Да ли пресликавање чува оријентацију простора?

Решење: Означимо са $T'(x',y',z')$ слику произвољне тачке $T(x,y,z)$ при централној симетрији S_S у односу на тачку $S(-1,1,3)$. То значи да је тачка S средиште дужи TT'.

$$\Rightarrow \quad \frac{x+x'}{2}=-1 \qquad \frac{y+y'}{2}=1 \qquad \frac{z+z'}{2}=3$$

$$x+x'=-2 \qquad y+y'=2 \qquad z+z'=6$$

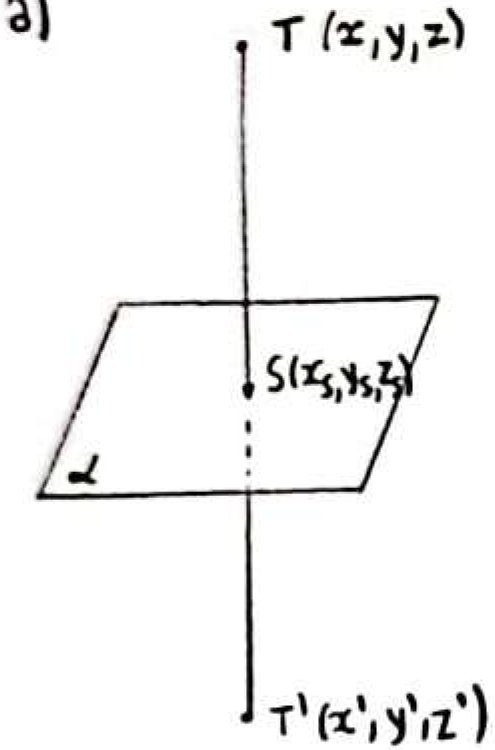
$$x'=-x-2 \qquad y'=-y+2 \qquad z'=-z+6$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$ су формуле централне симетрије простора у односу на тачку $S(-1,1,3)$

Како је $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = (-1)^2\cdot(-1)\cdot((-1)\cdot(-1)-0\cdot 0) = 1\cdot(-1)\cdot(1-0) = -1\cdot 1 = -1 < 0$, то ова централна симетрија не чува оријентацију простора.

6.11. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha: y-z=3$. б) Шта је слика праве $p: y=0, z=0$ при тој рефлексији? Нацртати!

Решење: а)



Означимо са $T'(x',y',z')$ слику произвољне тачке $T(x,y,z)$ при рефлексији S_α простора у односу на раван $\alpha: y-z=3$. Тада је $TT' \perp \alpha$ и средиште S дужи TT' припада равни α.

$TS \perp \alpha$

$\vec{TS} = [S]-[T] = (x_S,y_S,z_S)-(x,y,z) = (x_S-x, y_S-y, z_S-z)$

$\alpha: y-z=3$ тј. $\alpha: 0\cdot x+1\cdot y-1\cdot z-3=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha=(0,1,-1)$

$TS \perp \alpha \Rightarrow \vec{TS}=\lambda\cdot\vec{n}_\alpha$ за неко $\lambda\in\mathbb{R}$

$(x_S-x, y_S-y, z_S-z) = \lambda\cdot(0,1,-1) = (0,\lambda,-\lambda) \Rightarrow x_S-x=0,\ y_S-y=\lambda,\ z_S-z=-\lambda$

$x_S=x \qquad y_S=y+\lambda \qquad z_S=z-\lambda$

Како $S(x_S,y_S,z_S)\in\alpha$, то је $y_S-z_S=3$.

$y+\lambda-(z-\lambda)=3$

$y+\lambda-z+\lambda=3$

$2\lambda+y-z=3$

$2\lambda=3+z-y$

$\lambda=\frac{1}{2}(-y+z+3)$

Како је $S(x_S,y_S,z_S)$ средиште дужи TT' то је $\frac{x+x'}{2}=x_S$, $\frac{y+y'}{2}=y_S$, $\frac{z+z'}{2}=z_S$

$x+x'=2x_S \qquad y+y'=2y_S \qquad z+z'=2z_S$

$x+x'=2x \qquad y+y'=2(y+\lambda) \qquad z+z'=2\cdot(z-\lambda)$

$x'=2x-x \qquad y+y'=2y+2\lambda \qquad z+z'=2z-2\lambda$

$x'=x \qquad y'=2y-y+2\lambda \qquad z'=2z-z-2\lambda$

$y'=y+2\cdot\frac{1}{2}(-y+z+3) \qquad z'=z-2\lambda$

$y'=y-y+z+3 \qquad z'=z-2\cdot\frac{1}{2}(-y+z+3)$

$y'=z+3 \qquad z'=z-(-y+z+3)$

$z'=\cancel{z}+y-\cancel{z}-3$

$z'=y-3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ су тражене формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha: y-z=3$.

б) Нека је $P(x_P, y_P, z_P)$ произвољна тачка праве $p: y=0, z=0$. Тада је $y_P=0$ и $z_P=0$, тј. $P(x_P,0,0)$. Рефлексијом S_α у односу на раван α се тачка $P(x_P,0,0)$ слика у тачку $P'(x_P', y_P', z_P')$ која задовољава

$\begin{pmatrix} x_P' \\ y_P' \\ z_P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. То значи да тачка $P'(x_P, 3, -3)$ припада правој $p': y=3, z=-3$, те је $S_\alpha(p) \subseteq p'$.

Обрнуто, нека је $Q'(x_{Q'}, y_{Q'}, z_{Q'})$ произвољна тачка са праве $p': y=3, z=-3$. Тада је $Q'(x_{Q'}, 3, -3)$.

$$S_\alpha: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x'=x \\ y'=z+3 \\ z'=y-3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=x' \\ z=y'-3 \\ y=z'+3 \end{matrix} \Rightarrow S_\alpha^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

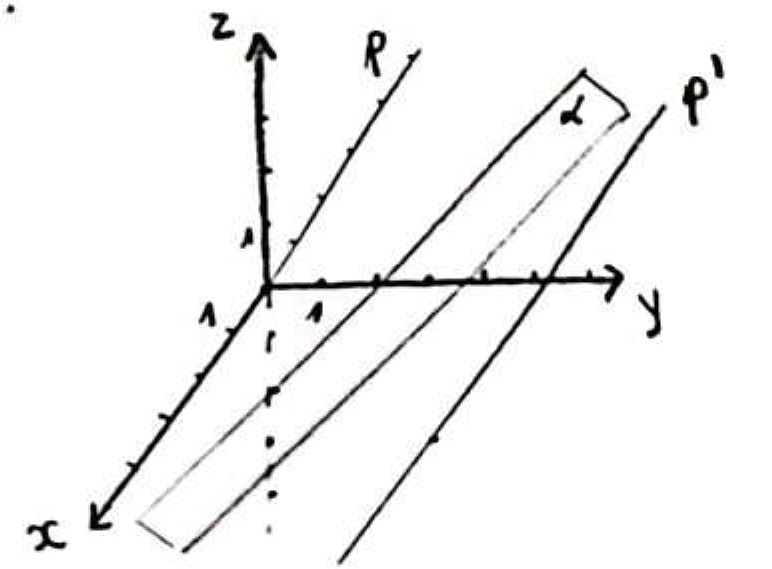
Приметимо да су пресликавања S_α и S_α^{-1} дата истим формулама те је $S_\alpha = S_\alpha^{-1}$.

Нека је $Q = S_\alpha^{-1}(Q') = S_\alpha(Q')$ тачка која се слика у тачку Q' при S_α. Ако обележимо $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, онда је

$\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{Q'} \\ y_{Q'} \\ z_{Q'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{Q'} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Q'} \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Q'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Према томе, $Q(x_{Q'}, 0, 0)$ припада правој $p: y=0, z=0$, те је $p' \subseteq S_\alpha(p)$.

Тиме смо доказали да је $S_\alpha(p) = p'$, тј. да се права $p: y=0, z=0$ слика у праву $p': y=3, z=-3$.

Скица:



(6.12.) Одредити формуле хомотетије којом се сфера $x^2+y^2+z^2=1$ пресликава на сферу $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3$. Наћи сва решења.

Решење: Ако са λ означимо коефицијент тражене хомотетије која пресликава сферу $x^2+y^2+z^2=1$ полупречника 1 на сферу $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3=(\sqrt{3})^2$ полупречника $\sqrt{3}$, онда је $\sqrt{3}=|\lambda|\cdot 1$, те је $|\lambda|=\sqrt{3}$, односно $\lambda=-\sqrt{3}$ или $\lambda=\sqrt{3}$. Дакле, постоје две такве хомотетије, али обе сликају центар $(0,0,0)$ прве сфере у центар $(3,1,3)$ друге сфере.

$$\mathcal{H}_{S,-\sqrt{3}}: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

јер је $-\sqrt{3}$ коефицијент хомотетије $\mathcal{H}_{S,-\sqrt{3}}$

$$\mathcal{H}_{S,-\sqrt{3}}: (0,0,0) \mapsto (3,1,3) \implies \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} a=3 \\ b=1 \\ c=3 \end{matrix}$$

Формуле једне тражене хомотетије су $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{H}_{S_1,\sqrt{3}}: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

јер је $\sqrt{3}$ коефицијент хомотетије $\mathcal{H}_{S_1,\sqrt{3}}$

$$\mathcal{H}_{S_1,\sqrt{3}}: (0,0,0) \mapsto (3,1,3) \implies \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} d=3 \\ e=1 \\ f=3 \end{matrix}$$

Формуле друге тражене хомотетије су $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.