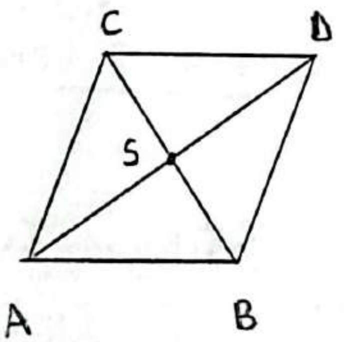
ВЕКТОРИ

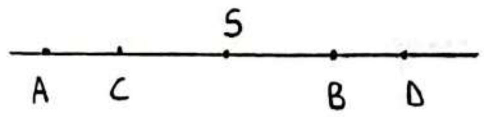
$\mathbb{E}$ – скуп тачака (дводимензионог или тродимензионог) еуклидског простора

$\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ ← елементи овог Декартовог производа су двотачке

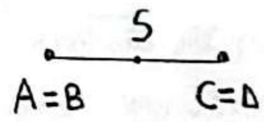
$(A,B)\in\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ је у релацији еквиполенције са двотачком $(C,D)\in\mathbb{E}\times\mathbb{E}$, у ознаци $(A,B)\sim(C,D)$, уколико дужи AD и BC имају заједничко средиште.



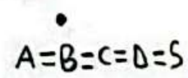
$\square ABDC$ је паралелограм



$A\neq B$, A,B,C и D су колинеарне



$A=B$
$A\neq C$
$C=D$



$A=B=C=D$

Релација еквиполенције је релација еквиваленције.

Вектор је класа еквиваленције при релацији еквиполенције.

$\overrightarrow{AB} = \{ (X,Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} : (X,Y) \sim (A,B) \}$ <u>вектор</u>

(A,B) је вектор представник вектора $\overrightarrow{AB}$

(A,A) је вектор представник <u>нула вектора</u> $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$

<u>Норма (дужина, интензитет)</u> вектора $\vec{v}$ је ненегативан реални број $\|\vec{v}\|$ који је једнак дужини његовог вектора представника (A,B), односно дужини дужи AB.

$\|\vec{0}\| = 0$

Само нула вектор $\vec{0}$ има норму 0. Сви остали вектори су <u>ненула вектори</u> и они поред норме имају и смер.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су <u>истог смера</u> уколико су полуправе $[A,B)$ и $[C,D)$ паралелне.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су <u>истог правца</u> уколико су праве AB и CD паралелне.

За векторе истог правца кажемо и да су <u>колинеарни</u>.

$\vec{0}$ је колинеаран са сваким вектором.

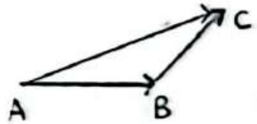
Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су <u>супротног смера</u> ако су истог правца али не и истог смера.

Ненула вектор је једнозначно одређен нормом и смером.

$\mathcal{V}$ - скуп свих вектора на еуклидском простору $\mathbb{E}$

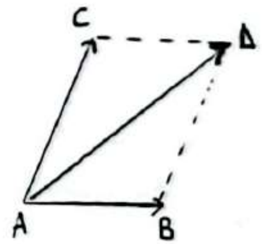
Лема За сваку тачку $A\in\mathbb{E}$ и сваки вектор $\vec{v}\in\mathcal{V}$ постоји јединствена тачка $B\in\mathbb{E}$ таква да је $\vec{v}=\vec{AB}$

- Збир вектора $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ је вектор $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$. (правило надовезивања)



Специјално, $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$, те је $\vec{BA}=-\vec{AB}$.

- Збир неколинеарних вектора $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ је вектор $\vec{AD}$ при чему је тачка D четврто теме паралелограма $CABD$. (правило паралелограма)



- Умножак вектора $\vec{v}\in\mathcal{V}$ скаларом (бројем) $\lambda\in\mathbb{R}$ је вектор $\lambda\cdot\vec{v}\in\mathcal{V}$ чија норма износи $\|\lambda\cdot\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$, док за $\vec{v}\neq\vec{0}$ важи да су вектори $\vec{v}$ и $\lambda\cdot\vec{v}$ истог смера у случају $\lambda>0$, односно супротног смера у случају $\lambda<0$.

- За скуп ненула вектора $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}\subseteq\mathcal{V}$ кажемо да је линеарно независан уколико $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ за $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ повлачи $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$. У супротном кажемо да је он линеарно зависан и тада се неки од вектора може изразити као линеарна комбинација осталих.
- Ако је вектор $\vec{v}$ могуће написати као $\vec{v}=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+\dots+\beta_n\vec{v}_n$ и $\vec{v}=\gamma_1\vec{v}_1+\gamma_2\vec{v}_2+\dots+\gamma_n\vec{v}_n$, где је $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ линеарно независан скуп вектора, онда мора бити $\beta_1=\gamma_1$, $\beta_2=\gamma_2$, …, $\beta_n=\gamma_n$.

ГЕОМЕТРИЈА 1

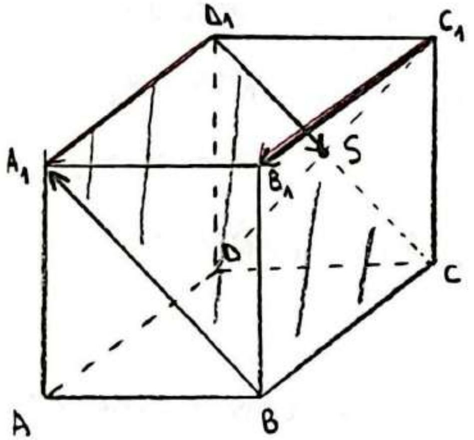
Задаци за вежбе

1. Линеарне операције са векторима

1.1. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да ли су вектори а) $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{C_1B_1}, \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$; б) $\overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{A_1D}$; в) $\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CD_1}$ компланарни?

Решење: Вектори $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ су компланарни ако постоји раван којој припадају неки представници вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ (вектори су класе еквиваленције).

а) Посматрајмо $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$.



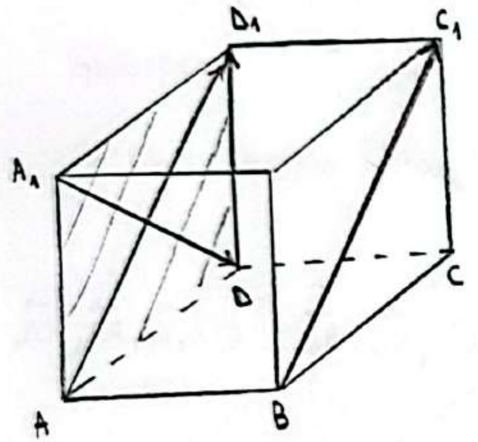
$\{S\} = CD_1 \cap DC_1$ $\Rightarrow$ Тачка S је средиште дужи CD_1 и DC_1 јер је четвороугао CC_1D_1D квадрат.

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{D_1S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$ јер су $\overrightarrow{D_1S}$ и $\overrightarrow{D_1C}$ истог смера и дужина дужи D_1S је два пута мања од дужине дужи D_1C

$\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{D_1A_1}$ јер је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ квадрат, па се средишта дужи C_1A_1 и B_1D_1 поклапају

Представници $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{D_1S}$ вектора $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$ припадају равни BCD_1A_1, те су вектори $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$ компланарни.

б) Посматрајмо векторе $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$.



$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1}$ јер је четвороугао ABC_1D_1 паралелограм,

($AB \parallel D_1C_1$ и $AB = D_1C_1$ као наспрамне ивице коцке)

те се средишта дужи BD_1 и C_1A поклапају

Представници $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$ вектора $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$ припадају равни ADD_1A_1, те су вектори $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$ компланарни.

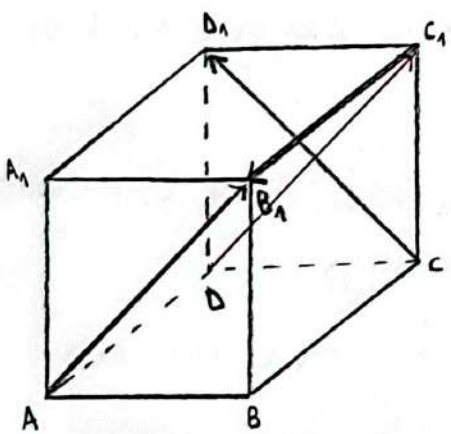
в) Посматрајмо векторе $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$ јер је четвороугао ADC_1B_1 паралелограм

($AD \parallel B_1C_1$ и $AD = B_1C_1$ као наспрамне ивице коцке),

те се средишта дужи AC_1 и B_1D поклапају

Представници $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ вектора $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ припадају равни CDD_1C_1, али $\overrightarrow{C_1B_1}$ не припада тој равни, као што и ниједан други представник тог вектора не припада равни CDD_1C_1 јер су сви нормални на ту раван.

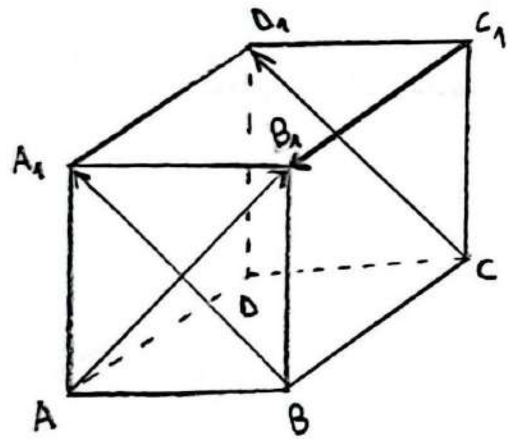


($C_1B_1 \perp C_1C$ јер је □BCC_1B_1 квадрат и $C_1B_1 \perp C_1D_1$ јер је □$B_1C_1D_1A_1$ квадрат, те је C_1B_1 нормално на раван CDD_1C_1 која је одређена помоћу правих C_1C и C_1D_1)

$\Rightarrow$ Вектори $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ нису компланарни.

в) Посматрамо векторе $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

Вектори $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ су некомпланарни ако за $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ важи да из $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ следи $\alpha=\beta=\gamma=0$, односно ако су вектори линеарно независни.



Представимо све векторе преко линеарно независних вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. $(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{AB}+\beta_1\overrightarrow{AD}+\gamma_1\overrightarrow{AA_1}=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\beta_1=\gamma_1=0)$

$\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{DA}$ јер је четвороугао C_1B_1AD паралелограм ($AD \parallel B_1C_1$ и $AD=B_1C_1$ као наспрамне ивице коцке), те се средишта дужи C_1A и B_1D поклапају

$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C_1B_1}=-\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}$ јер је $\square ABB_1A_1$ квадрат као страна коцке

$\overrightarrow{AB_1} \underset{\text{правило надовезивања}}{=} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$

јер је $\square BCD_1A_1$ паралелограм ($A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1=BC$ као наспрамне ивице коцке)

$$\alpha\cdot\overrightarrow{C_1B_1}+\beta\cdot\overrightarrow{AB_1}+\gamma\cdot\overrightarrow{CD_1}=\vec{0} \overset{?\checkmark}{\Rightarrow} \alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\alpha\cdot(-\overrightarrow{AD})+\beta\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})+\gamma\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\vec{0}$$

$$-\alpha\cdot\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AA_1}-\gamma\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AA_1}=\vec{0}$$

$(\beta-\gamma)\overrightarrow{AB} + (-\alpha)\cdot\overrightarrow{AD} + (\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{AA_1} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \beta-\gamma=0 \quad -\alpha=0 \quad \beta+\gamma=0$

$\uparrow$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ су линеарно независни

$-\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$

$\oplus \quad 2\beta=0$

$\beta=0$

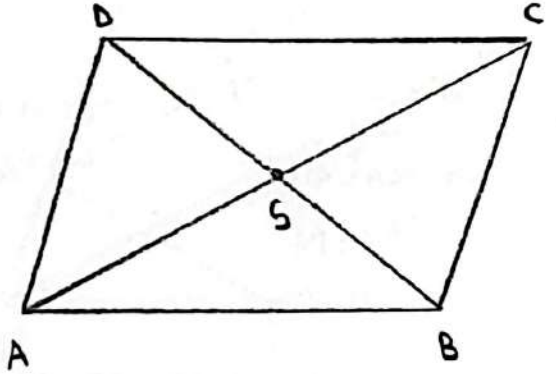
$\gamma=\beta=0$

Како из $\alpha\cdot\overrightarrow{C_1B_1} + \beta\,\overrightarrow{AB_1} + \gamma\,\overrightarrow{CD_1} = \vec{0}$ следи $\alpha=\beta=\gamma=0$, то су вектори $\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$ некомпланарни.

1.2. Доказати да се дијагонале четвороугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

Решење ако и само ако $\Leftrightarrow$

$\boxed{\Rightarrow}$ Претпостављамо да се дијагонале AC и BD четвороугла $ABCD$ полове, тј. да пресечна тачка S дијагонала AC и BD представља заједничко средиште тих дијагонала. Доказујемо да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.



$\vec{AS} = \vec{SC}$ јер су $\vec{AS}$ и $\vec{SC}$ истог смера и интензитета (дужи AS и SC су једнаке јер је S средиште AC)

$\vec{SB} = \vec{DS}$ јер су $\vec{SB}$ и $\vec{DS}$ истог смера и интензитета (дужи SB и DS су једнаке јер је S средиште BD)

$\oplus$

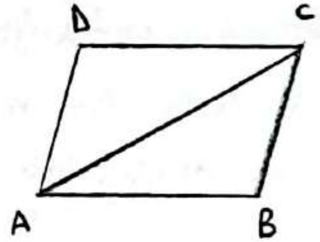
$$\vec{AS} + \vec{SB} = \vec{SC} + \vec{DS}$$
$$\vec{AB} = \vec{DS} + \vec{SC}$$
$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow AB \parallel DC$$

$\vec{AS} = \vec{SC}$ $\vec{SB} = \vec{DS}$ тј. $\vec{BS} = \vec{SD}$ $\Rightarrow$

$$\vec{AS} + \vec{SD} = \vec{SC} + \vec{BS}$$
$$\vec{AD} = \vec{BS} + \vec{SC}$$
$$\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow AD \parallel BC$$

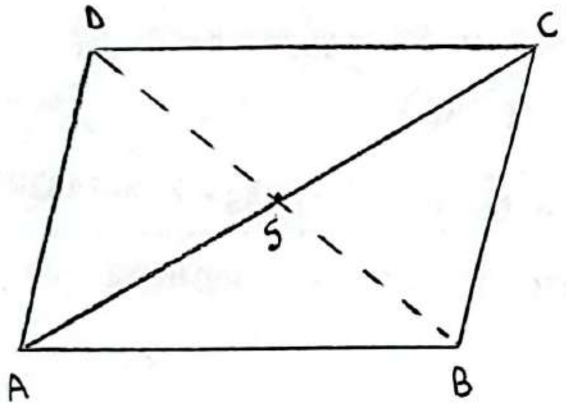
$\Rightarrow$ $\square ABCD$ је паралелограм по дефиницији паралелограма

$\Leftarrow$ Претпостављамо да је четвороугао ABCD паралелограм, тј. да су му наспрамне странице једнаке и паралелне, тј. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. +



По дефиницији паралелограма је $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$.

Доказујемо да се дијагонале AC и BD паралелограма ABCD полове. Нека је тачка S средиште дијагонале AC. Тада је $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$.



$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ } углови на
$\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ } трансверзали
$AC = AC$

$\Downarrow$ УСУ

$\triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow AB = DC$, $BC = AD$ +

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} \underset{\uparrow}{=} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{SD}$$

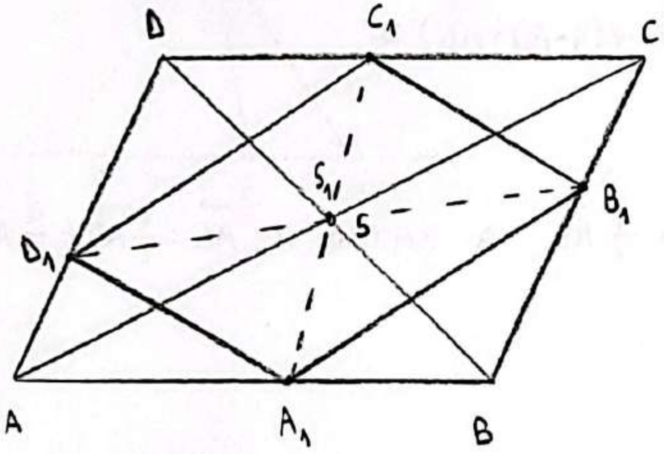
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$

Како је $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SD}$, то су тачке B, S и D колинеарне и дужи BS и SD су једнаке, те тачка S мора бити средиште дијагонале BD, односно дијагонале AC и BD се полове.

1.3. На страницама AB, BC, CD и AD паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 секу у једној тачки.

Решење:



$\square ABCD$ је паралелограм $\overset{1.2}{\Longrightarrow}$ Дијагонале AC и BD имају заједничко средиште S.

$\square A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм $\overset{1.2}{\Longrightarrow}$ Дијагонале A_1C_1 и B_1D_1 имају заједничко средиште S_1.

Циљ је да докажемо да је $S = S_1$, а да бисмо то могли закључити довољно је доказати да је $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS_1}$.

Приметимо да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно независни.

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \overset{\square ABCD \text{ је паралелограм}}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{AS}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ су истог смера и дужина дужи AS је једнака $\frac{1}{2}$ дужине дужи AC јер је S средиште дужи AC

$$\overrightarrow{AS_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1S_1}$$

$\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AA_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AD}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD_1} = \beta \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{A_1S_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}$ јер је S_1 средиште дужи A_1C_1

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1C_1}$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD_1} = -\overrightarrow{AA_1} + \beta \cdot \overrightarrow{AD} = -\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD_1} + \gamma\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \beta\cdot\overrightarrow{AD} + \gamma\overrightarrow{AB} = \gamma\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\cdot\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{DC}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow$ $\overrightarrow{DC_1} = \gamma\cdot\overrightarrow{DC} = \gamma\cdot\overrightarrow{AB}$

□ABCD је паралелограм

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_1S_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1C_1}) = \frac{1}{2}(-\alpha\cdot\overrightarrow{AB} + \beta\cdot\overrightarrow{AD} + \gamma\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\cdot\overrightarrow{AD}) =$$

$$= \frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AS_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1S_1} = \alpha\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\gamma+\alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

а имамо и $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

□$A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм $\Rightarrow$ $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$

$$\overrightarrow{D_1C_1} = \gamma\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} + \delta\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \alpha\cdot\overrightarrow{AB} + \delta\overrightarrow{AD} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB} + \delta\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$ су колинеарни вектори $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BB_1} = \delta\cdot\overrightarrow{BC} = \delta\cdot\overrightarrow{AD}$

□ABCD је паралелограм

$$\gamma\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\cdot\overrightarrow{AD} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB} + \delta\overrightarrow{AD}$$

$$(\gamma+\alpha-1)\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\beta-\delta)\cdot\overrightarrow{AD} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \gamma+\alpha-1=0 \qquad 1-\beta-\delta=0$$

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ су линеарно независни

$$\gamma+\alpha=1 \qquad \beta+\delta=1$$

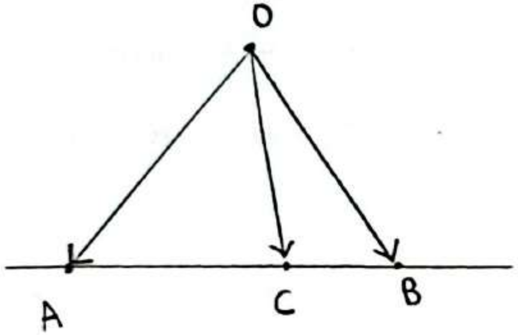
$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AS_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} \Rightarrow S_1 = S$$

$\Rightarrow$ Пресечна тачка AC и BD се поклапа са пресечном тачком A_1C_1 и B_1D_1 $\Rightarrow$ Праве AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 се секу у једној тачки.

(1.4.) У односу на тачку O дати су вектори положаја $\vec{OA}, \vec{OB}$ тачака A и B $(A \neq B)$. Изразити вектор положаја $\vec{OC}$ тачке C за коју је $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решење



правило надовезивања

$$\vec{OC} \overset{\downarrow}{=} \vec{OA} + \vec{AC} \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}}}{=} \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{CB} \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB}}}{=} \vec{OA} + \lambda \cdot (\vec{CO} + \vec{OB}) = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{CO} + \lambda \cdot \vec{OB}$$

по правилу надовезивања

$$\vec{OC} - \lambda \cdot \vec{CO} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$\Downarrow \quad -\vec{CO} = \vec{OC}$$

$$\vec{OC} + \lambda \cdot \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$(1+\lambda) \cdot \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

Ако би $1+\lambda = 0$, онда би $\lambda = -1$, те би $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB} = -\vec{CB} = \vec{BC}$, што би значило да се тачке A и B поклапају, али то је у контрадикцији са условом задатка $A \neq B$.

Дакле, $1+\lambda \neq 0$, те смемо делити са $1+\lambda$.

$$(1+\lambda)\vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB} \qquad / : (1+\lambda)$$

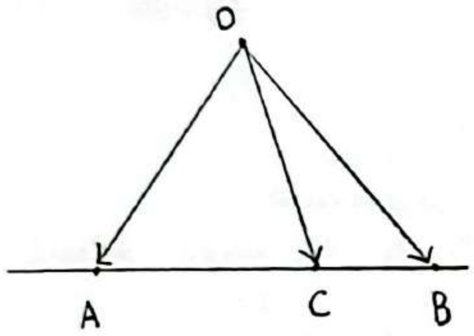
$$\vec{OC} = \frac{1}{1+\lambda} \cdot \vec{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \vec{OB}$$ је тражено изражавање вектора положаја $\vec{OC}$ тачке C

Пример C - средиште дужи AB, тј. $\vec{AC} = 1 \cdot \vec{CB}$

Тада би било $\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.

1.5. Дате су неколинеарне тачке A, B и O. Тачка C одређена са $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, тада тачка C припада дужи AB. Доказати.

Решење:



Тачка C припада правој AB $\Leftrightarrow$ Тачке A, B и C су колинеарне.

$\Leftrightarrow$ Вектори $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ су колинеарни, односно линеарно зависни.

$\Leftrightarrow$ $\vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

$\vec{AB} \neq \vec{0}$ јер су тачке A и B различите (зато што су тачке A, B и O неколинеарне, те све три морају бити међусобно различите)

Тачка C је одређена са $\vec{OC} = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Претпостављамо да тачка C припада правој AB, односно да је $\vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}$, за неко $\gamma \in \mathbb{R}$.

Доказујемо да је $\alpha + \beta = 1$.

$$\vec{OC} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{правило} \\ \text{надовезивања}}}{=} \vec{OA} + \vec{AC} \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{AC} = \gamma \cdot \vec{AB}}}{=} \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{AB} = \vec{OA} + \gamma \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) = \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{AO} + \gamma \cdot \vec{OB} \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{AO} = -\vec{OA}}}{=} \vec{OA} - \gamma \cdot \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{OB} = (1-\gamma) \cdot \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{OB}$$

Тачке A, B и O су неколинеарне тачке. $\Rightarrow$ Вектори $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ нису колинеарни, односно вектори $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ су линеарно независни.

$$\alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} = \vec{OC} = (1-\gamma) \cdot \vec{OA} + \gamma \cdot \vec{OB} \Rightarrow (\alpha + \gamma - 1) \cdot \vec{OA} + (\beta - \gamma) \cdot \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \alpha + \gamma - 1 = 0 \quad \beta - \gamma = 0$$

$$\alpha + \gamma = 1 \quad \beta = \gamma$$

$\alpha + \beta = 1$ што се и тражило

$\boxed{\Leftarrow}$ Претпостављамо да важи $\alpha+\beta=1$, а доказујемо да тачка C одређена са $\vec{OC}=\alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}$ припада правој AB, односно да је $\vec{AC}=\gamma\cdot\vec{AB}$, за неко $\gamma\in\mathbb{R}$.

$$\vec{AC}=\vec{AO}+\vec{OC}\underset{\substack{\uparrow\\ \vec{AO}=-\vec{OA}\\ \vec{OC}=\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}}}{=}-\vec{OA}+\alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}=(\alpha-1)\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha+\beta=1\\ \alpha-1=-\beta}}{=}-\beta\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}=\beta\cdot(\vec{OB}-\vec{OA})=\beta\cdot\vec{AB} \quad \text{и } \beta\in\mathbb{R}$$

Дакле, важи да је $\vec{AC}=\gamma\cdot\vec{AB}$ за $\gamma=\beta\in\mathbb{R}$.

Овим смо доказали: Тачка C одређена са $\vec{OC}=\alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}$ припада правој AB ако и само ако важи $\alpha+\beta=1$.

Сада доказујемо да ако је $\alpha+\beta=1$, $\alpha\geq 0$ и $\beta\geq 0$, онда тачка C припада дужи AB.

Из доказа $\boxed{\Leftarrow}$ видимо да из $\alpha+\beta=1$ следи $\vec{AC}=\beta\cdot\vec{AB}$.

Како је $\beta\geq 0$, то су вектори $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$ истог смера, односно тачка C је на полуправој AB.

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\geq 0 \Rightarrow \beta=1-\alpha\leq 1$

$\vec{AC}=\beta\cdot\vec{AB}$

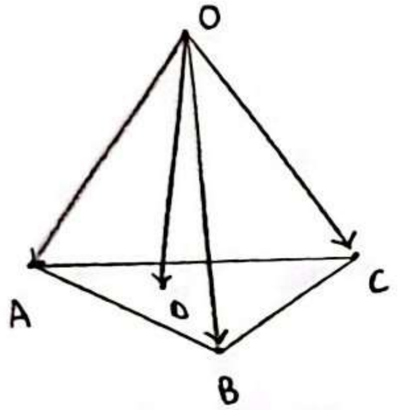
Како је $\beta\leq 1$, то је дужина дужи AC мања или једнака од дужине дужи AB.

$\Downarrow$

Тачка C припада дужи AB ако је $\alpha+\beta=1$, $\alpha\geq 0, \beta\geq 0$ и $\vec{OC}=\alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}$.

1.6. Нека су O, A, B и C четири некомпланарне тачке. Да би тачка D одређена са $\overrightarrow{OD} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$ припадала равни троугла ABC, потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, тада тачка D припада троуглу ABC. Доказати.

Решење:



Тачка D припада равни троугла $ABC \Leftrightarrow A, B, C$ и D су компланарне тачке

$\Leftrightarrow$ Вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ су компланарни вектори.

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \psi \cdot \overrightarrow{AC}$, за неке $\lambda, \psi \in \mathbb{R}$

Како су тачке O, A, B и C некомпланарне тачке, онда су тачке A, B и C неколинеарне, те су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно независни.

Тачка D је одређена са $\overrightarrow{OD} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Претпостављамо да тачка D припада равни троугла ABC, односно да је $\overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \psi \cdot \overrightarrow{AC}$, за неке $\lambda, \psi \in \mathbb{R}$. Доказујемо да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

$$\overrightarrow{OD} \underset{\text{правило надовезивања}}{=} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \underset{\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \psi\overrightarrow{AC}}{=} \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \psi \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \psi \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AO} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \psi \cdot \overrightarrow{AO} + \psi \cdot \overrightarrow{OC} =$$

$$\underset{\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}}{=} \overrightarrow{OA} - \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} - \psi \cdot \overrightarrow{OA} + \psi \cdot \overrightarrow{OC} = (1 - \lambda - \psi) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \psi \cdot \overrightarrow{OC}$$

По услову задатка, тачке O, A, B и C су некомпланарне, те су вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линеарно независни.

$$\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} = (1 - \lambda - \psi) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \psi \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow \alpha = 1 - \lambda - \psi \quad \beta = \lambda \quad \gamma = \psi$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1$$ што се и тражило.

$\boxed{\Leftarrow}$ Претпостављамо да важи $\alpha+\beta+\gamma=1$, а доказујемо да тачка D припада равни троугла ABC, односно да је $\vec{AD} = \lambda\cdot\vec{AB}+\varphi\cdot\vec{AC}$, за неке $\lambda,\varphi\in\mathbb{R}$.

$$\vec{AD} = \vec{AO}+\vec{OD} \underset{\uparrow}{=} -\vec{OA}+\alpha\cdot\vec{OA}+\beta\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{OC} = (\alpha-1)\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{OC} \underset{\uparrow}{=} (-\beta-\gamma)\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{OC} =$$

$\vec{AO} = -\vec{OA}$

$\vec{OD} = \alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{OC}$

$\alpha+\beta+\gamma=1$

$\alpha-1=-\beta-\gamma$

$$= -\beta\cdot\vec{OA}-\gamma\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{OC} = \beta\cdot(-\vec{OA}+\vec{OB})+\gamma\cdot(-\vec{OA}+\vec{OC}) \underset{\uparrow}{=} \beta\cdot(\vec{AO}+\vec{OB})+\gamma\cdot(\vec{AO}+\vec{OC}) =$$

$-\vec{OA} = \vec{AO}$

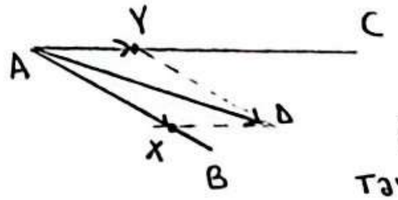
$$= \beta\cdot\vec{AB}+\gamma\cdot\vec{AC}$$

$\Rightarrow$ $\vec{AD} = \beta\cdot\vec{AB}+\gamma\cdot\vec{AC}$ те је $\vec{AD} = \lambda\cdot\vec{AB}+\varphi\cdot\vec{AC}$ за $\lambda=\beta$ и $\varphi=\gamma$, $\lambda,\varphi\in\mathbb{R}$.

Овим смо доказали: Да би тачка D одређена са $\vec{OD} = \alpha\cdot\vec{OA}+\beta\cdot\vec{OB}+\gamma\cdot\vec{OC}$ припадала равни троугла ABC, потребно је и довољно да је $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Сада доказујемо да ако је $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\geq0$, $\beta\geq0$ и $\gamma\geq0$, онда тачка D припада троуглу ABC.

У доказу $\boxed{\Leftarrow}$ смо из $\alpha+\beta+\gamma=1$ закључили да је $\vec{AD} = \beta\cdot\vec{AB}+\gamma\cdot\vec{AC}$, а како је $\beta\geq0$ и $\gamma\geq0$, то тачка D припада углу BAC.



$\alpha+\beta+\gamma=1$

$\vec{AX} = \beta\cdot\vec{AB}$ $\quad 0\leq\beta\leq1$

$\vec{AY} = \gamma\cdot\vec{AC}$ $\quad 0\leq\gamma\leq1$

$\vec{AD} = \beta\cdot\vec{AB}+\gamma\cdot\vec{AC} = \vec{AX}+\vec{AY}$

Тачка D је таква да је четвороугао AXDY паралелограм $\Rightarrow$ D $\in$ угла BAC

Слично се изводе једнакости $\vec{BD} = \alpha\cdot\vec{BA} + \gamma\cdot\vec{BC}$ и $\vec{CD} = \alpha\cdot\vec{CA} + \beta\cdot\vec{CB}$.

$$\begin{aligned}\vec{BD} = \vec{BO}+\vec{OD} &= -\vec{OB} + \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot\vec{OA} + (\beta-1)\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot\vec{OA} + (-\alpha-\gamma)\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot\vec{OA} - \alpha\cdot\vec{OB} - \gamma\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot(\vec{OA}-\vec{OB}) + \gamma\cdot(\vec{OC}-\vec{OB})\\ &= \alpha\cdot\vec{BA} + \gamma\cdot\vec{BC}\end{aligned}$$

$\alpha+\beta+\gamma=1$

$\beta-1=-\alpha-\gamma$

$$\begin{aligned}\vec{CD} = \vec{CO}+\vec{OD} &= -\vec{OC} + \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + \gamma\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + (\gamma-1)\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} + (-\alpha-\beta)\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot\vec{OA} + \beta\cdot\vec{OB} - \alpha\cdot\vec{OC} - \beta\cdot\vec{OC}\\ &= \alpha\cdot(\vec{OA}-\vec{OC}) + \beta\cdot(\vec{OB}-\vec{OC})\\ &= \alpha\cdot\vec{CA} + \beta\cdot\vec{CB}\end{aligned}$$

$\alpha+\beta+\gamma=1$

$\gamma-1=-\alpha-\beta$

$\left.\begin{array}{l}\vec{BD} = \alpha\cdot\vec{BA} + \gamma\cdot\vec{BC}\\ \alpha\geq 0,\ \gamma\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Тачка D мора бити у углу ABC.

$\left.\begin{array}{l}\vec{CD} = \alpha\cdot\vec{CA} + \beta\cdot\vec{CB}\\ \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Тачка D мора бити у углу ACB.

Како је тачка D у сваком од унутрашњих углова троугла ABC, то она припада троуглу ABC (у овом задатку се под појмом троугао подразумева унија троугаоне линије и унутрашње области коју та троугаона линија ограничава).

(1.7.) У простору је дато n тачака $A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 2)$ и тачка O. Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$.

а) Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

Са T_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа избацивањем тачке A_i.

б) Доказати да се све дужи A_iT_i $(1 \leq i \leq n)$ секу у тачки T и да је $\overrightarrow{A_iT} : \overrightarrow{TT_i} = (n-1) : 1$.

<u>Решење:</u> а) Да бисмо доказали да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O довољно је доказати да ако се уместо тачке O узме било која друга тачка O_1, онда важи једнакост $\overrightarrow{O_1T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1A_i}$.

$$\overrightarrow{O_1T} \underset{\substack{\text{правило} \\ \text{надовезивања}}}{=} \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{n} \cdot \left(n \cdot \overrightarrow{O_1O} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1O} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_i} \right) \overset{\substack{\text{правило} \\ \text{надовезивања}}}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1A_i}$$

Тиме смо доказали да је $\overrightarrow{O_1T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1A_i}$, односно да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

б) По тексту задатка, тачка T_i је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$.

(из скупа тачака $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ избацили смо тачку A_i)

O – произвољна тачка простора

По дефиницији тежишта је $\overrightarrow{OT_i} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \overrightarrow{OA_j}$.

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{OA_j} = \frac{1}{n}\cdot\Big(\overrightarrow{OA_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j}\Big) = \frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j} = \frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\overbrace{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j}}^{\overrightarrow{OT_i}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{OT_i} \qquad (*)$$

Како је $\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{1+n-1}{n} = \frac{n}{n} = 1$, $\frac{1}{n} \geq 0$ и $\frac{n-1}{n} \geq 0$ за $n \geq 2$, то на основу задатка 1.5. важи да тачка T припада дужи A_iT_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\Rightarrow$ Све дужи A_iT_i $(1 \leq i \leq n)$ се секу у тачки T.

$$\overrightarrow{A_iT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_i} \overset{(*)}{=} \frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{OT_i} - \overrightarrow{OA_i} = \Big(\frac{1}{n} - 1\Big)\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{OT_i} =$$

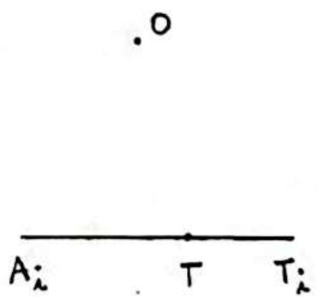
$$= \frac{1-n}{n}\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{OT_i} = -\frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{OT_i} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot(\overrightarrow{OT_i} - \overrightarrow{OA_i}) = \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{A_iT_i}$$

$$\overrightarrow{TT_i} = \overrightarrow{A_iT_i} - \overrightarrow{A_iT} = \overrightarrow{A_iT_i} - \frac{n-1}{n}\cdot\overrightarrow{A_iT_i} = \Big(1 - \frac{n-1}{n}\Big)\cdot\overrightarrow{A_iT_i} = \frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{A_iT_i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_iT} : \overrightarrow{TT_i} = \Big(\frac{n-1}{n}\overrightarrow{A_iT_i}\Big) : \Big(\frac{1}{n}\overrightarrow{A_iT_i}\Big) = (n-1) : 1$$

Подсетник (задатак 1.5)



O, A_i, T_i су неколинеарне тачке (тачку O смо на почетку бирали да је произвољна, а нека сада $O \notin A_iT_i$)

Тачка T одређена са $\overrightarrow{OT} = \alpha\cdot\overrightarrow{OA_i} + \beta\cdot\overrightarrow{OT_i}$ припада правој A_iT_i ако и само ако важи $\alpha + \beta = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, тада тачка T припада дужи A_iT_i.

$\alpha = \frac{1}{n}$ $\quad \beta = \frac{n-1}{n}$ $\quad \alpha + \beta = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} = 1$

$\alpha = \frac{1}{n} \geq 0$ $\quad \beta = \frac{n-1}{n} \geq 0$ јер је $n \geq 2$

1.8. Скицирати и доказати Задатак 1.7. за $n=2,3$ у равни и $n=4$ у простору.

Решење: Присетимо се текста задатка 1.7.

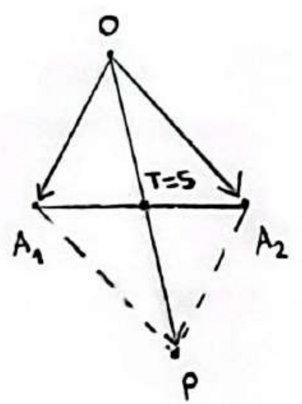
У простору је дато n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 2)$ и тачка O. Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{OA_i}$.

Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

Са T_i, $i \in \{1,\dots,n\}$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа избацивањем тачке A_i.

Доказати да се све дужи A_iT_i $(1 \leq i \leq n)$ секу у тачки T и да је $\vec{A_iT} : \vec{TT_i} = (n-1):1$.

$n=2$



У простору су дате 2 тачке A_1 и A_2. Дата је и тачка O. Оне су у равни.

Тежиште скупа $\{A_1, A_2\}$ је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\vec{OA_i} =$
$= \frac{1}{2}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2})$. Векторе $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_2}$ који имају заједничку почетну тачку можемо сабрати помоћу правила паралелограма. По том правилу је $\vec{OA_1}+\vec{OA_2} = \vec{OP}$ при чему је $\square OA_1PA_2$ паралелограм.

$\frac{1}{2}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}) = \frac{1}{2}\cdot\vec{OP}$

Означимо пресечну тачку дијагонала A_1A_2 и OP са S.

Како је четвороугао OA_1PA_2 паралелограм, онда је тачка S заједничко средиште дијагонала OP и A_1A_2. $\Rightarrow OS = \frac{1}{2}OP$

$\vec{OS} = \frac{1}{2}\cdot\vec{OP} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}) = \vec{OT} \Rightarrow S=T$

Дакле, тежиште T скупа $\{A_1, A_2\}$ је заправо средиште дужи A_1A_2.

Доказујемо да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O. Нека је O_1 произвољна тачка различита од тачке O. Желимо да докажемо да је $\overrightarrow{O_1T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{O_1A_i} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1A_2})$.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{правило}\\ \text{надовезивања}}}{\overrightarrow{O_1T} = \overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OT}} \underset{\substack{\uparrow\\ \overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})}}{=} \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}) = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}) = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OA_1}}_{\overrightarrow{O_1A_1}} + \underbrace{\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OA_2}}_{\overrightarrow{O_1A_2}}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{правило}\\ \text{надовезивања}}}{=} \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1A_2})$$

Дакле, дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

Са T_1 означавамо тежиште скупа тачака $\{A_2\}$.

↳ из скупа $\{A_1,A_2\}$ избацујемо тачку A_1

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{1}\cdot\sum_{i=2}^{2}\overrightarrow{OA_i} = 1\cdot\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_2} \Rightarrow T_1 = A_2$$

Са T_2 означавамо тежиште скупа тачака $\{A_1\}$.

↳ из скупа $\{A_1,A_2\}$ избацујемо тачку A_2

$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{1}\cdot\sum_{i=1}^{1}\overrightarrow{OA_i} = 1\cdot\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_1} \Rightarrow T_2 = A_1$$

Приметимо да су све дужи A_iT_i $(i\in\{1,2\})$, тј. дужи A_1T_1 и A_2T_2 заправо дуж A_1A_2, а она садржи тачку T јер смо већ доказали да је тачка T средиште дужи A_1A_2.

$i=1$ $\quad \overrightarrow{A_1T}:\overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{A_1T}:\overrightarrow{TA_2} = 1:1 = (2-1):1$ $\qquad$ $i=2$ $\quad \overrightarrow{A_2T}:\overrightarrow{TT_2} = \overrightarrow{A_2T}:\overrightarrow{TA_1} = 1:1 = (2-1):1$

$n=3$

У равни дате су три тачке A_1, A_2, A_3 и тачка O. Тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ је тачка T дефинисана са $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$.

Доказујемо да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O. Да бисмо то доказали довољно је да докажемо да за произвољну тачку O_1 различиту од тачке O важи
$\overrightarrow{O_1T} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1A_2} + \overrightarrow{O_1A_3})$.

$$\overrightarrow{O_1T} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{правило} \\ \text{надовезивања}}}{=} \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1}} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_3}) = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1A_2} + \overrightarrow{O_1A_3})$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{O_1T} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1A_2} + \overrightarrow{O_1A_3})$ $\Rightarrow$ Дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

Са T_i $(i \in \{1,2,3\})$ означавамо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа тачака избацивањем тачке A_i.

T_1 је тежиште скупа тачака који настаје из скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ избацивањем тачке A_1, односно тачка T_1 је тежиште скупа тачака $\{A_2, A_3\}$. $\Rightarrow \overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 2 \cdot \overrightarrow{OT_1}$ #

У случају $n=2$ смо већ доказали да је тежиште скупа од две различите тачке геометријски гледано средиште дужи коју одређују те две тачке.

Дакле, тачка T_1 је средиште дужи A_2A_3.

T_2 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_3\}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3})$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3} = 2\cdot\overrightarrow{OT_2}$ ★

$\leftarrow$ настао је од датог скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$ избацивањем тачке A_2.

Дакле, тачка T_2 је средиште дужи A_1A_3.

T_3 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2\}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OT_3} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} = 2\cdot\overrightarrow{OT_3}$

$\leftarrow$ настао је од датог скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$ избацивањем тачке A_3.

Доказујемо да се све дужи A_iT_i, $i\in\{1,2,3\}$ секу у тачки T и да је

$\overrightarrow{A_iT} : \overrightarrow{TT_i} = (n-1):1 = (3-1):1 = 2:1$

За $i=1$ доказујемо да тачка T припада дужи A_1T_1 и да је $\overrightarrow{A_1T} : \overrightarrow{TT_1} = 2:1$.

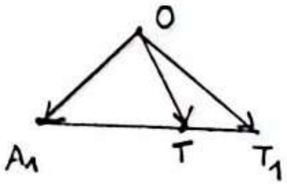
$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) \overset{\dagger}{=} \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OT_1}$$

† Подсетник (задатак 1.5.)

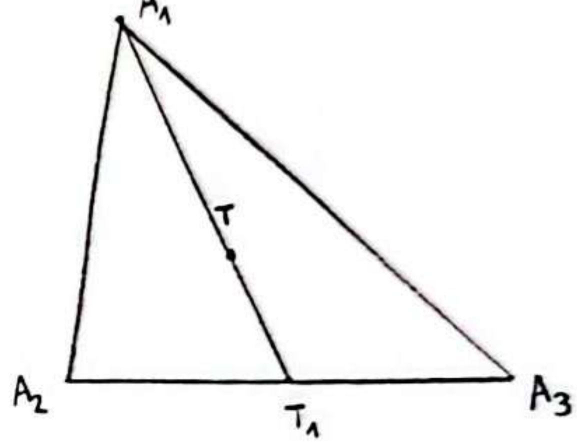
O, A_1 и T_1 су неколинеарне тачке и тачка T је одређена са $\overrightarrow{OT} = \alpha\cdot\overrightarrow{OA_1} + \beta\cdot\overrightarrow{OT_1}$.

Важи: тачка T припада правој A_1T_1 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=1$.

Ако важи $\alpha\geq 0$ и $\beta\geq 0$, онда тачка T припада дужи A_1T_1.



Како тачку O можемо изабрати произвољно, онда можемо узети да су тачке O, A_1 и T_1 неколинеарне.



$\vec{OT} = \frac{1}{3}\vec{OA_1} + \frac{2}{3}\vec{OT_1}$ и $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{1}{3} \geq 0 \quad \frac{2}{3} \geq 0$

$\Rightarrow$ Тачка T припада дужи A_1T_1.

Докажимо сада да је $\vec{A_1T} : \vec{TT_1} = 2:1$.

$$\vec{A_1T} = \vec{OT} - \vec{OA_1} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}) - \vec{OA_1} = \frac{1}{3}\cdot\vec{OA_1} + \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA_2} + \vec{OA_3}) - \vec{OA_1} =$$

јер је $\vec{OA_1} + \vec{A_1T} = \vec{OT}$

$$\overset{\#}{=} \left(\frac{1}{3} - 1\right)\cdot\vec{OA_1} + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\vec{OT_1} = -\frac{2}{3}\cdot\vec{OA_1} + \frac{2}{3}\cdot\vec{OT_1} = \frac{2}{3}\cdot(\vec{OT_1} - \vec{OA_1}) = \frac{2}{3}\cdot(\vec{OT_1} + \vec{A_1O}) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(\vec{A_1O} + \vec{OT_1}) = \frac{2}{3}\cdot\vec{A_1T_1}$$

$$\vec{TT_1} = \vec{A_1T_1} - \vec{A_1T} = \vec{A_1T_1} - \frac{2}{3}\cdot\vec{A_1T_1} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\cdot\vec{A_1T_1} = \frac{1}{3}\cdot\vec{A_1T_1}$$

јер је $\vec{A_1T} + \vec{TT_1} = \vec{A_1T_1}$

$\Rightarrow \vec{A_1T} : \vec{TT_1} = \left(\frac{2}{3}\cdot\vec{A_1T_1}\right) : \left(\frac{1}{3}\vec{A_1T_1}\right) = 2:1$ што смо и желели да докажемо.

Слично се доказује и да дужи A_2T_2 и A_3T_3 садрже тачку T и да је $\vec{A_2T} : \vec{TT_2} = 2:1$ и $\vec{A_3T} : \vec{TT_3} = 2:1$. Приметимо да тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ геометријски представља тежиште троугла ABC.

Доказујемо да тачка T припада дужи A_2T_2.

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}) + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_2} \overset{\star}{=} \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\overrightarrow{OT_2} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OT_2}$$

Како је тачка O произвољна, онда можемо изабрати O тако да су O, A_2 и T_2 неколинеарне тачке.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1 \qquad \frac{1}{3}\geq 0 \qquad \frac{2}{3}\geq 0 \qquad \Rightarrow$$ Тачка T припада дужи A_2T_2.

Докажимо сада да је $\overrightarrow{A_2T} : \overrightarrow{TT_2} = 2:1$.

$$\overrightarrow{A_2T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OA_2} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OT_2} + \left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA_2} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OT_2} - \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OA_2} = \frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{OT_2}-\overrightarrow{OA_2}) =$$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{A_2O}) = \frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OT_2}) = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A_2T_2}$$

$$\overrightarrow{TT_2} = \overrightarrow{TA_2} + \overrightarrow{A_2T_2} = \overrightarrow{A_2T_2} + \overrightarrow{TA_2} = \overrightarrow{A_2T_2} - \overrightarrow{A_2T} = \overrightarrow{A_2T_2} - \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A_2T_2} = \left(1-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{A_2T_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2T_2}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_2T} : \overrightarrow{TT_2} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{A_2T_2}\right) : \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{A_2T_2}\right) = 2:1$$

$\Rightarrow$ Тиме је доказано да тачка T припада дужи A_2T_2 и да је $\overrightarrow{A_2T} : \overrightarrow{TT_2} = 2:1$.

Доказујемо да тачка T припада дужи A_3T_3.

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_3} \overset{\odot}{=} \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\overrightarrow{OT_3} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_3} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OT_3}$$

Можемо изабрати тачку O тако да тачке O, A_3 и T_3 нису колинеарне.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1 \qquad \frac{1}{3}\geq 0 \qquad \frac{2}{3}\geq 0 \qquad \Rightarrow$$ Тачка T припада дужи A_3T_3.

Докажимо сада да је $\overrightarrow{A_3T} : \overrightarrow{TT_3} = 2:1$.

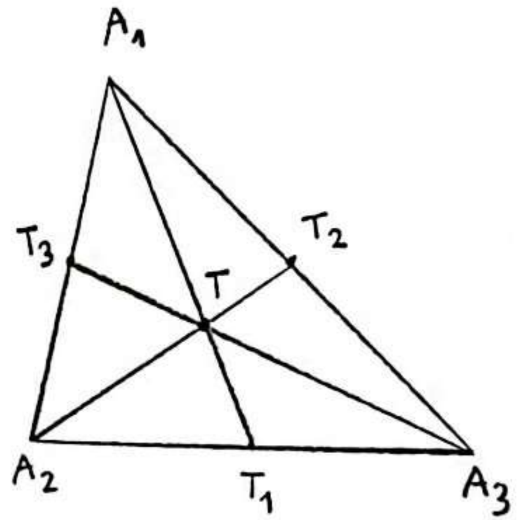
$$\overrightarrow{A_3T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_3} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) - \overrightarrow{OA_3} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}) - \overrightarrow{OA_3} = \left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\overrightarrow{OT_3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OT_3} = \frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{OT_3}-\overrightarrow{OA_3}) = \frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{OT_3}+\overrightarrow{A_3O}) = \frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{A_3O}+\overrightarrow{OT_3}) = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A_3T_3}$$

$$\overrightarrow{TT_3} = \overrightarrow{TA_3} + \overrightarrow{A_3T_3} = -\overrightarrow{A_3T} + \overrightarrow{A_3T_3} = -\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A_3T_3} + \overrightarrow{A_3T_3} = \left(-\frac{2}{3}+1\right)\cdot\overrightarrow{A_3T_3} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{A_3T_3}$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_3T} : \overrightarrow{TT_3} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{A_3T_3}\right) : \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{A_3T_3}\right) = 2:1$

$\Rightarrow$ Тиме смо доказали да тачка T припада A_3T_3 и да је $\overrightarrow{A_3T} : \overrightarrow{TT_3} = 2:1$.



$n=4$

У простору су дате 4 тачке A_1, A_2, A_3 и A_4 и тачка O. Тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ је тачка T дефинисана са $\vec{OT} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{i=1}^{4}\vec{OA_i} = \frac{1}{4}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4})$.

Доказујемо да дефиниције тачке T не зависи од избора тачке O. Да бисмо то доказали довољно је да докажемо да за произвољну тачку O_1 различиту од тачке O важи $\vec{O_1T} = \frac{1}{4}\cdot(\vec{O_1A_1}+\vec{O_1A_2}+\vec{O_1A_3}+\vec{O_1A_4})$.

$$\vec{O_1T} \underset{\uparrow}{=} \vec{O_1O}+\vec{OT} = \vec{O_1O}+\frac{1}{4}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) = \frac{1}{4}\cdot 4\cdot\vec{O_1O}+\frac{1}{4}(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) =$$

правило
надовезивања

$$= \frac{1}{4}\cdot(4\cdot\vec{O_1O}+\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) = \frac{1}{4}\cdot(\vec{O_1O}+\vec{O_1O}+\vec{O_1O}+\vec{O_1O}+\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4})$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(\vec{O_1A_1}+\vec{O_1A_2}+\vec{O_1A_3}+\vec{O_1A_4})$$

$\Rightarrow \vec{O_1T} = \frac{1}{4}(\vec{O_1A_1}+\vec{O_1A_2}+\vec{O_1A_3}+\vec{O_1A_4}) \Rightarrow$ Дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O.

Са T_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ означавамо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ избацивањем тачке A_i. (I)

T_1 је тежиште скупа тачака $\{A_2, A_3, A_4\}$ $\Rightarrow$ $\vec{OT_1} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) \Rightarrow \vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4} = 3\cdot\vec{OT_1}$

из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_1

T_2 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_3, A_4\}$ $\Rightarrow$ $\vec{OT_2} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) \Rightarrow \vec{OA_1}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4} = 3\cdot\vec{OT_2}$ (II)

из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_2

T_3 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_4\}$ $\Rightarrow$ $\vec{OT_3} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_4}) \Rightarrow \vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_4} = 3\cdot\vec{OT_3}$ (III)

из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_3

T_4 је тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2, A_3\}$ $\Rightarrow$ $\vec{OT_4} = \frac{1}{3}(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}) \Rightarrow \vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3} = 3\cdot\vec{OT_4}$ (IV)

из $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ се избацује тачка A_4

Доказујемо да се све дужи A_iT_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ секу у тачки T и да је

$\vec{A_iT} : \vec{TT_i} = (n-1):1 = (4-1):1 = 3:1.$

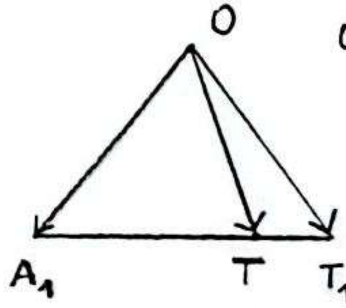
За $i=1$ доказујемо да тачка T припада дужи A_1T_1 и да је $\vec{A_1T}:\vec{TT_1} = 3:1$.

$$\vec{OT} = \frac{1}{4}\cdot(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) = \frac{1}{4}\cdot\vec{OA_1} + \frac{1}{4}\cdot(\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}) \overset{(I)}{=} \frac{1}{4}\cdot\vec{OA_1} + \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\vec{OT_1} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\vec{OA_1} + \frac{3}{4}\cdot\vec{OT_1}$$

Како је тачка O на почетку могла бити произвољна, то је сада можемо изабрати тако да тачке O, A_1 и T_1 буду неколинеарне. За тачку T је $\vec{OT} = \frac{1}{4}\cdot\vec{OA_1} + \frac{3}{4}\vec{OT_1}$ и важи $\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$, а и $\frac{1}{4} \geq 0$ и $\frac{3}{4} \geq 0$, те на основу задатка 1.5 следи да тачка T припада дужи A_1T_1.

+ подсетник (задатак 1.5)



O, A_1 и T_1 су неколинеарне

$\vec{OT} = \alpha\cdot\vec{OA_1} + \beta\cdot\vec{OT_1}$

Важи: тачка T припада правој $A_1T_1 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 1$

Ако важи $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, онда тачка T припада дужи A_1T_1.

Докажимо да је $\overrightarrow{A_1T} : \overrightarrow{TT_1} = 3:1$.

$$\overrightarrow{A_1T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_1} - \overrightarrow{OA_1} = \left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_1} = -\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OA_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_1} = \frac{3}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OT_1}-\overrightarrow{OA_1}\right)$$

$\uparrow$

јер је $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1T} = \overrightarrow{OT}$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{A_1O}\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OT_1}\right) = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{A_1T_1}$$

$$\overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{A_1T_1} - \overrightarrow{A_1T} = \overrightarrow{A_1T_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{A_1T_1} = \left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\overrightarrow{A_1T_1} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A_1T_1}$$

$\uparrow$

јер је $\overrightarrow{A_1T} + \overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{A_1T_1}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_1T} : \overrightarrow{TT_1} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1T_1}\right) : \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1T_1}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$

За $i=2$ доказујемо да тачка T припада дужи A_2T_2 и да је $\overrightarrow{A_2T} : \overrightarrow{TT_2} = 3:1$.

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}\right) \overset{(\mathrm{II})}{=} \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_2}$$

Тачку O можемо изабрати тако да тачке O, A_2 и T_2 буду неколинеарне.

$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA_2} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_2}$, $\quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$, $\quad \frac{1}{4} \geq 0$ и $\frac{3}{4} \geq 0$, те на основу задатка

(1.5) следи да тачка T припада дужи A_2T_2.

Докажимо да је $\overrightarrow{A_2T} : \overrightarrow{TT_2} = 3:1$.

$$\overrightarrow{A_2T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OA_2} = \left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_2} = -\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_2} = \frac{3}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{A_2T_2}$$

$$\overrightarrow{TT_2} = \overrightarrow{A_2T_2} - \overrightarrow{A_2T} = \overrightarrow{A_2T_2} - \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{A_2T_2} = \left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\overrightarrow{A_2T_2} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A_2T_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A_2T} : \overrightarrow{TT_2} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{A_2T_2}\right) : \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{A_2T_2}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$

За $i=3$ доказујемо да тачка T припада дужи A_3T_3 и да је $\overrightarrow{A_3T} : \overrightarrow{TT_3} = 3:1$.

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}) = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{1}{4}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}) \overset{(III)}{=} \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\overrightarrow{OT_3} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_3}$$

Тачку O можемо изабрати тако да тачке O, A_3 и T_3 не буду колинеарне.

$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_3}$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$, $\frac{1}{4}\geq 0$ и $\frac{3}{4}\geq 0$, те на основу задатка 1.5 следи да тачка T припада дужи A_3T_3.

Докажимо да је $\overrightarrow{A_3T} : \overrightarrow{TT_3} = 3:1$.

$$\overrightarrow{A_3T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_3} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_3} - \overrightarrow{OA_3} = \left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_3} = -\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OA_3} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{OT_3} = \frac{3}{4}\cdot(\overrightarrow{OT_3} - \overrightarrow{OA_3}) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{A_3T_3}$$

$$\overrightarrow{TT_3} = \overrightarrow{A_3T_3} - \overrightarrow{A_3T} = \overrightarrow{A_3T_3} - \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{A_3T_3} = \left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\overrightarrow{A_3T_3} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A_3T_3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_3T} : \overrightarrow{TT_3} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{A_3T_3}\right) : \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{A_3T_3}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$

За $i=4$ доказујемо да тачка T припада дужи A_4T_4 и да је $\overrightarrow{A_4T} : \overrightarrow{TT_4} = 3:1$.

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}) = \frac{1}{4}\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA_4} \overset{(IV)}{=} \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\overrightarrow{OT_4} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA_4} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA_4} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_4}$$

Тачку O можемо изабрати тако да тачке O, A_4 и T_4 не буде колинеарне.

$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA_4} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_4}$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$, $\frac{1}{4}\geq 0$, $\frac{3}{4}\geq 0$, те на основу задатка 1.5 следи да тачка T припада дужи A_4T_4.

Докажимо сада да је $\overrightarrow{A_4T} : \overrightarrow{TT_4} = 3:1$.

$$\overrightarrow{A_4T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_4} \overset{\ddot\smile}{=} \frac{1}{4}\overrightarrow{OA_4} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_4} - \overrightarrow{OA_4} = \left(\frac{1}{4} - 1\right)\cdot \overrightarrow{OA_4} + \frac{3}{4}\cdot \overrightarrow{OT_4} = -\frac{3}{4}\cdot \overrightarrow{OA_4} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OT_4} = \frac{3}{4}\cdot\left(\overrightarrow{OT_4} - \overrightarrow{OA_4}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot \overrightarrow{A_4T_4}$$

$$\overrightarrow{TT_4} = \overrightarrow{A_4T_4} - \overrightarrow{A_4T} = \overrightarrow{A_4T_4} - \frac{3}{4}\overrightarrow{A_4T_4} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\cdot \overrightarrow{A_4T_4} = \frac{1}{4}\cdot \overrightarrow{A_4T_4}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_4T} : \overrightarrow{TT_4} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{A_4T_4}\right) : \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{A_4T_4}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3:1.$$