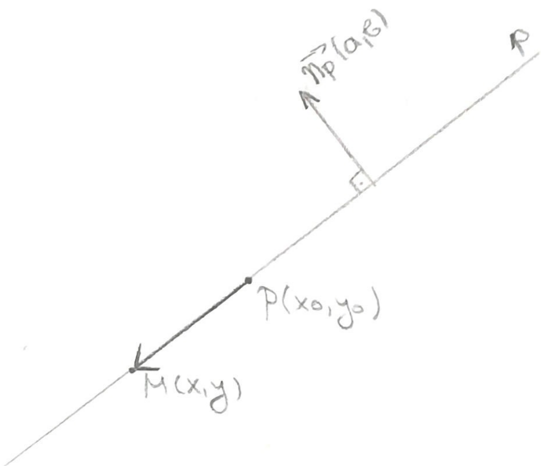
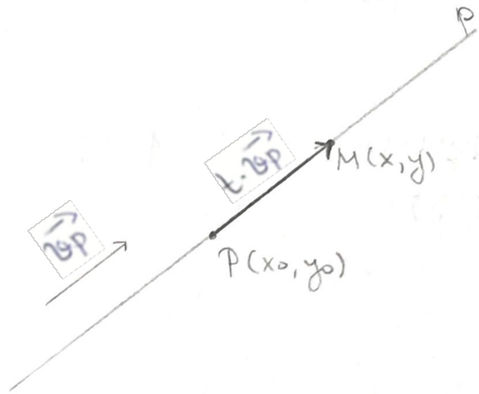
Тачка, права, раван

Права p у равни је јединствено одређена тачком $P(x_0,y_0)$ која јој припада и вектором нормалним на ту праву $\vec{n_p}(a,b)$





Нека је $M(x,y)\in p$ произвољна тачка праве. Тада је $\vec{PM}\perp\vec{n_p}$ па важи:

$$0=\vec{n_p}\circ\vec{PM}=(a,b)\circ(x-x_0,y-y_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)=ax+by\underbrace{-ax_0-by_0}_{c}$$

Дакле, једначину произвољне праве у равни можемо записати у облику:

$$\boxed{ax+by+c=0}$$ ← ИМПЛИЦИТНА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ.

Права p у равни је јединствено одређена и тачком $P(x_0,y_0)$ која јој припада и вектором правца $\vec{v_p}(p_x,p_y)$.

$$\vec{PM}=t\cdot\vec{v_p},\ \text{за неко } t\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=x_0+t\cdot p_x\\y&=y_0+t\cdot p_y,\quad t\in\mathbb{R}\end{aligned}}$$ ← ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

Из претходне једначине елиминацијом параметра t добијамо:

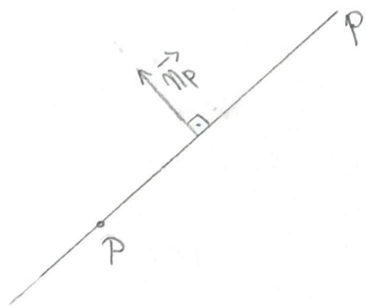
$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} \; (=t)}$$ ← КАНОНСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

* $\vec{v_p} \perp \vec{n_p}$

$\vec{v_p} \circ \vec{n_p} = 0$

ако је $\vec{n_p}=(a,b)$ онда је $\vec{v_p}=(-b,a)$ или $\vec{v_p}=(b,-a)$

1. Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(1,2)$ и има нормалан вектор $\vec{n_p}=(1,-2)$.



$P(1,2)$

$\vec{n_p}=(1,-2)$

$ax+by+c=0$ ← ИМПЛИЦИТНА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

координате нормалног вектора

$1\cdot x+(-2)\cdot y+c=0$

$\Rightarrow x-2y+c=0$

$P\in p \Rightarrow 1-2\cdot 2+c=0$

$1-4+c=0$

$c=3$

$\Rightarrow \boxed{p:\; x-2y+3=0}$

2. Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(2,3)$ и има вектор правца $\vec{v_p}=(2,1)$.

$P(x_0,y_0)$

$\vec{v_p}(p_x,p_y)$

$$\begin{aligned} x &= \boxed{x_0} + t\cdot \boxed{p_x} \\ y &= \boxed{y_0} + t\cdot \boxed{p_y}, \quad t\in\mathbb{R} \end{aligned}$$ ← ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

$P \qquad \vec{v_p}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2+2t \\ y &= 3+t, \quad t\in\mathbb{R} \end{aligned}}$$ ← параметарска ј-на праве p

$t = \frac{x-2}{2}$

$t = \frac{y-3}{1}$

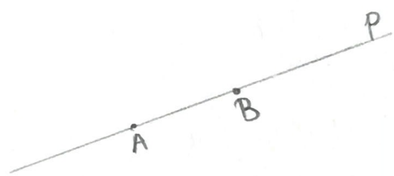
$$\boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} \quad (=t)}$$ ← канонско ј-на праве p

$1\cdot(x-2) = 2\cdot(y-3)$

$x-2 = 2y-6$

$\boxed{x-2y+4=0}$ ← имплицитна ј-на праве p

③ Одредити једначину праве p која садржи тачке $A(1,2)$ и $B(5,4)$. Записати једначину у имплицитном, параметарском и канонском облику.



$\vec{AB}$ је вектор правца праве

$\vec{v_p} = \vec{AB} = (5-1, 4-2) = (4,2)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 2 + 2t, \quad t\in\mathbb{R} \end{aligned}}$$ ← параметарска ј-на праве

A $\qquad \vec{v_p}$

$t = \frac{x-1}{4}$

$t = \frac{y-2}{2}$

$$\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2}}$$ ← канонска ј-на праве

$2(x-1) = 4(y-2)$

$2x-2 = 4y-8$

$2x-4y-2+8=0$

$\boxed{2x-4y+6=0}$ ← имплицитна ј-на праве

4. Одредити углове које права $3x-2y+4=0$ заклапа са координатним осама.

$p: \underline{\underline{3}}x-\underline{\underline{2}}y+4=0$

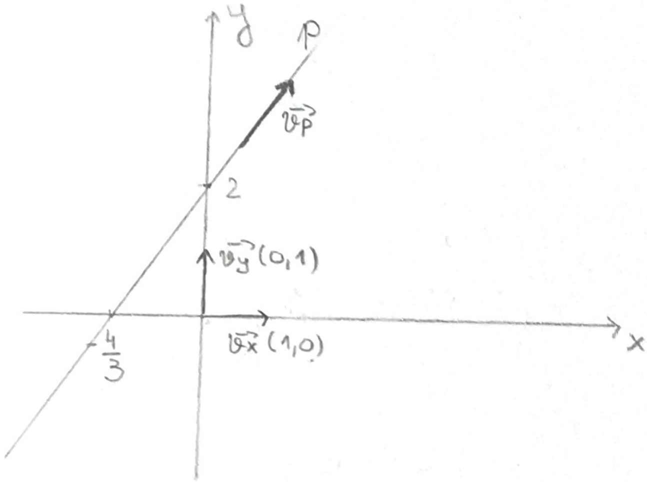
координате нормалног вектора

$\vec{n_p}=(3,-2)$

$\Rightarrow \vec{v_p}=(2,3)$

$\vec{v_x}=(1,0)$

$\vec{v_y}=(0,1)$



$\measuredangle(p, x\text{-осе}) = \measuredangle(\vec{v_p}, \vec{v_x})$

$$\cos\measuredangle(\vec{v_p},\vec{v_x}) = \frac{\vec{v_p}\circ\vec{v_x}}{\|\vec{v_p}\|\cdot\underbrace{\|\vec{v_x}\|}_{=1}} = \frac{(2,3)\circ(1,0)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{13}}}$$

$\measuredangle(p, y\text{-осе}) = \measuredangle(\vec{v_p}, \vec{v_y})$

$$\cos\measuredangle(\vec{v_p},\vec{v_y}) = \frac{\vec{v_p}\circ\vec{v_y}}{\|\vec{v_p}\|\cdot\underbrace{\|\vec{v_y}\|}_{=1}} = \frac{(2,3)\circ(0,1)}{\sqrt{13}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}}$$

5. Одредити једначину нормале праве $2x+3y-4=0$ која садржи пресек правих $x+y+1=0$ и $x-y=0$.

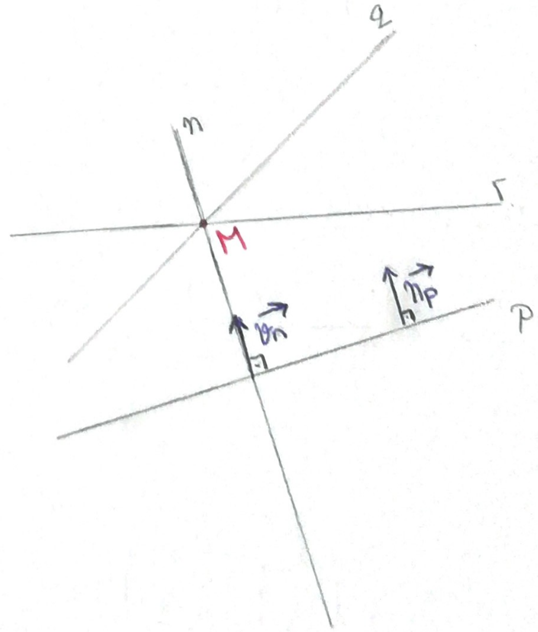
$p: 2x+3y-4=0$

$q: x+y+1=0$

$r: x-y=0$

$\{M\}=q\cap r$

$n: M\in n,\ n\perp p$



$$\begin{aligned} x+y+1&=0 \\ x-y&=0 \end{aligned} \Big]+$$

$$\begin{aligned} x+y+1&=0 \\ 2x+1&=0 \end{aligned}$$

$2x=-1 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$

$y=x=\boxed{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{M\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}$

$n \perp p \iff \vec{n_p} = \vec{v_n}$

$\vec{n_p} = (2,3)$

координате тачке M

$\Rightarrow \quad n: \quad \underbrace{\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}}_{\vec{v_n}}$

$\Rightarrow \quad n: \quad \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{3}$

$3\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\left(y+\frac{1}{2}\right)$

$3x + \frac{3}{2} = 2y + 1 \quad / \cdot 2$

$6x + 3 = 4y + 2$

$\boxed{n: \ 6x - 4y + 1 = 0}$

⑥ Одредити симетралу углова између правих $y = x-2$ и $y = 3$.

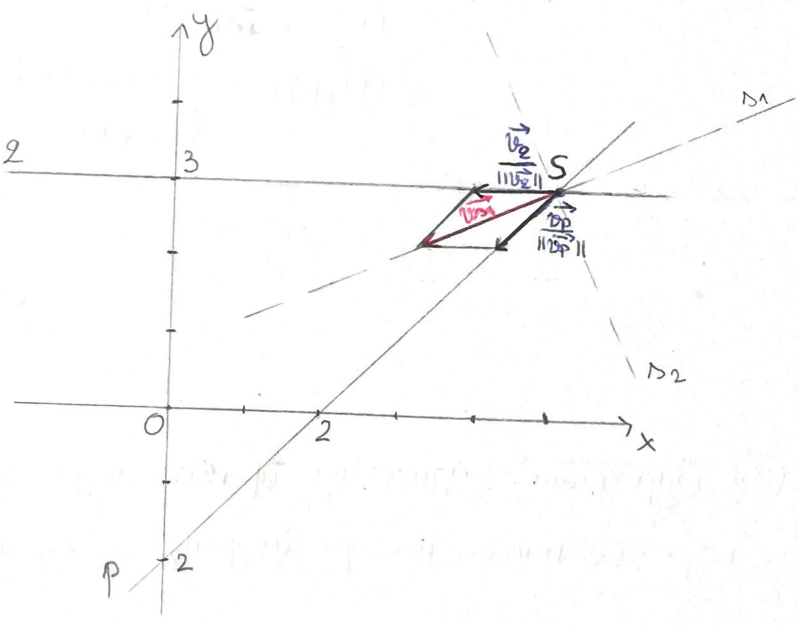
$p: y = x-2$

$q: y = 3$

$\{S\} = p \cap q$

$\left.\begin{array}{l} y = x-2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = x-2 \Rightarrow \boxed{x=5}$

$\Rightarrow \boxed{S(5,3)}$



$\vec{v_{s_1}} = \frac{\vec{v_p}}{\|\vec{v_p}\|} + \frac{\vec{v_q}}{\|\vec{v_q}\|}$

$\vec{v_{s_2}} = \frac{\vec{v_p}}{\|\vec{v_p}\|} - \frac{\vec{v_q}}{\|\vec{v_q}\|}$

$\vec{v_p}$?

$p: -x + y + 2 = 0$

$\vec{n_p} = (-1, 1) \Rightarrow \vec{v_p} = (-1,-1)$

$\|\vec{v_p}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\vec{v_q}$?

$q: y - 3 = 0$

$\vec{n_q} = (0,1) \Rightarrow \vec{v_q} = (-1, 0)$

$\|\vec{v_q}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$

$$\vec{v_{s_1}} = \frac{(-1,-1)}{\sqrt{2}} + \frac{(-1,0)}{1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1,0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{v_{s_2}} = \frac{(-1,-1)}{\sqrt{2}} - \frac{(-1,0)}{1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1,0) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

КООРДИНАТЕ ТАЧКЕ S

$$s_1: \underbrace{\frac{x-5}{-\frac{1}{\sqrt{2}}-1} = \frac{y-3}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}_{\vec{v_{s_1}}}$$

КООРДИНАТЕ ТАЧКЕ S

$$s_2: \underbrace{\frac{x-5}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}_{\vec{v_{s_2}}}$$

7. Одредити растојање тачке $A(3,6)$ од праве $p: x+2y-1=0$

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД ПРАВЕ

Растојање тачке $M(x_0,y_0)$ од праве $p: ax+by+c=0$ дато је формулом:

$$d(M,p) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d(A,p) = \frac{|1\cdot 3+2\cdot 6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|3+12-1|}{\sqrt{1+4}} = \boxed{\frac{14}{\sqrt{5}}}$$

8. Одредити једначину праве чији је коефицијент правца једнак -2 и која се налази на растојању 2 од координатног почетка.

$p: y = kx+n$

$k=-2$

$\Rightarrow p: y = -2x+n$

$\Rightarrow \underline{p: 2x+y-n=0}$

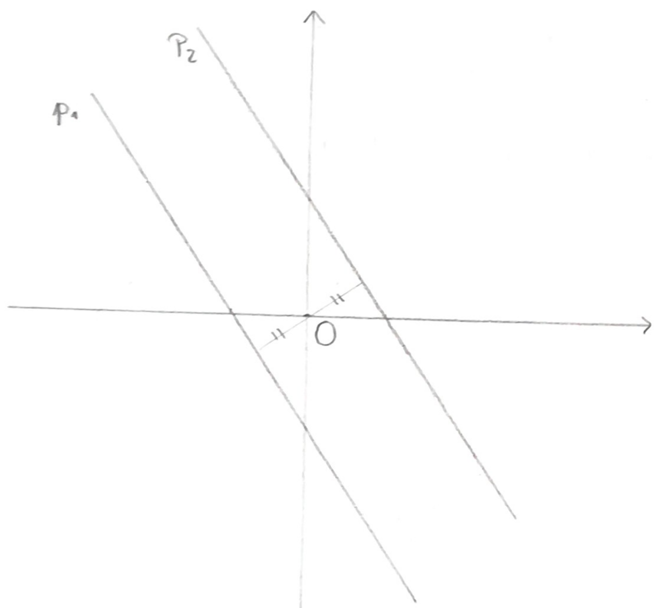
$$2 = d(\underset{(0,0)}{O}, p) = \frac{|2\cdot 0+0-n|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|n|}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow \underline{|n| = 2\sqrt{5}}$

Имамо два решења:

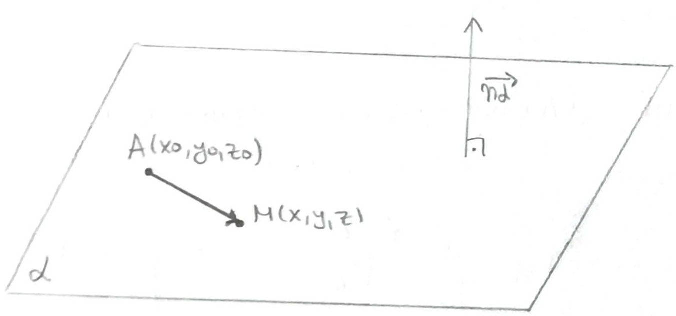
$$p_1: \ 2x + y - 2\sqrt{5} = 0$$

$$p_2: \ 2x + y + 2\sqrt{5} = 0$$



Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и вектором нормале $\vec{n_\alpha}(a, b, c)$.



Нека је $M(x,y,z) \in \alpha$ произвољна тачка равни. Тада је $\vec{AM} \perp \vec{n_\alpha}$ па важи

$$\begin{aligned} 0 = \vec{n_\alpha} \circ \vec{AM} &= (a, b, c) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ &= ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} \end{aligned}$$

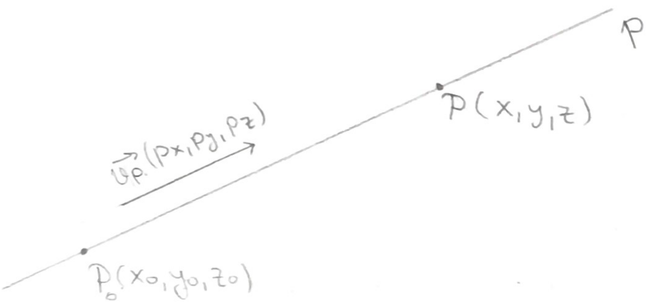
Дакле, једначину произвољне равни у простору можемо записати у облику:

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$ ← ИМПЛИЦИТНА ЈЕДНАЧИНА РАВНИ

КООРДИНАТЕ ВЕКТОРА НОРМАЛЕ

Права у простору

Права у простору се може задати тачком $P_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектором правца $\vec{v_p}(p_x,p_y,p_z)$



$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cdot p_x \\ y &= y_0 + t\cdot p_y \\ z &= z_0 + t\cdot p_z \end{aligned} \quad , t\in\mathbb{R}$$

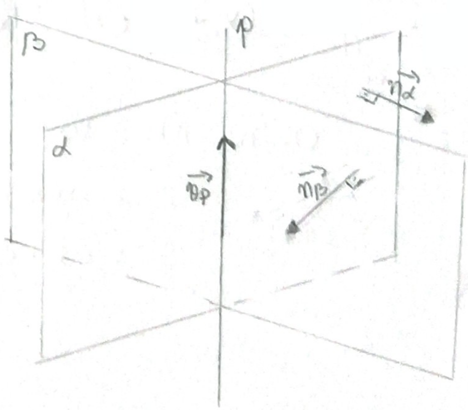
$\uparrow P_0$ $\uparrow \vec{v_p}$

← ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

Из претходне једначине елиминацијом параметра t добијамо:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z} \; (=t)}$$ ← КАНОНСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

Права као пресек две непаралелне равни:

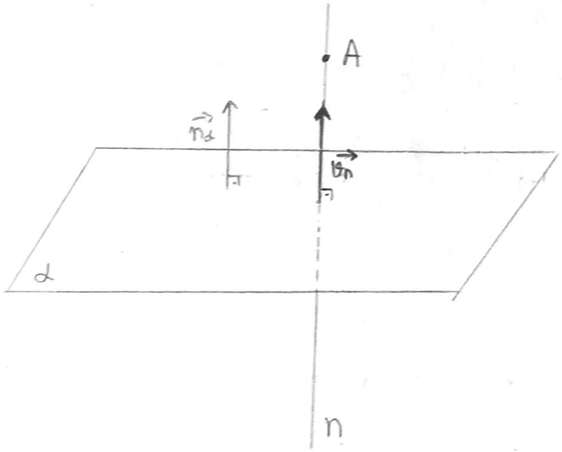


$$p: \begin{cases} \alpha: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ \beta: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

$\vec{n_\alpha}=(a_1,b_1,c_1)$
$\vec{n_\beta}=(a_2,b_2,c_2)$ неколинеарни вектори

$\Rightarrow \vec{v_p} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}$ (видећемо касније)

10. Одредити једначину нормале из тачке $A(2,3,-1)$ на раван $\alpha: 2x+y-4z+5=0$.



$n: \ n \ni A, \ n \perp \alpha$

$\vec{v_n} = \vec{n_\alpha} = (2,1,-4)$

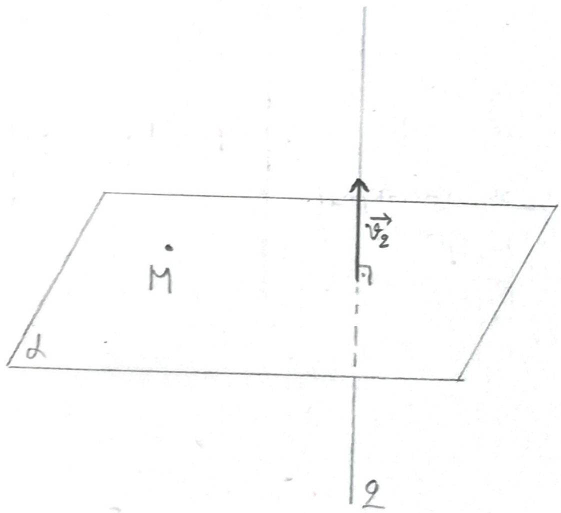
координате тачке A

$$n: \ \frac{x-2}{\underbrace{2}} = \frac{y-3}{\underbrace{1}} = \frac{z-(-1)}{\underbrace{-4}}$$

$\vec{v_n}$

$$\boxed{n: \ \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4}}$$

11. Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1,0,3)$ и нормална је на праву $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.



$\alpha: \ \alpha \ni M, \ \alpha \perp q$

$\vec{n_\alpha} = \vec{v_q} = (2,4,-1)$

$\alpha: \ 2x+4y-z+d=0$

$M \in \alpha \Rightarrow 2\cdot(-1)+4\cdot 0-3+d=0$

$-2-3+d=0$

$\underline{d=5}$

$$\boxed{\alpha: \ 2x+4y-z+5=0}$$

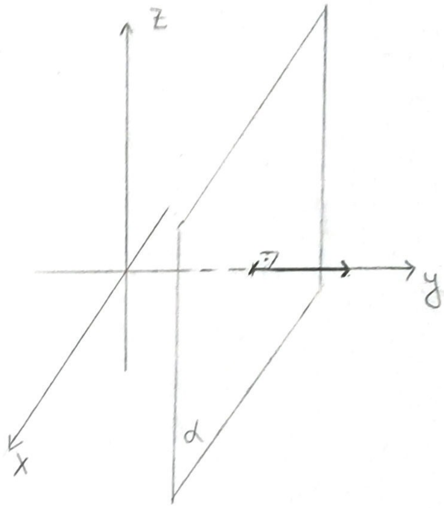
(12.) Одредити једначину равни која:

1) је паралелна равни Oxz и садржи тачку $P(2,3,5)$

2) садржи z-осу и тачку $M(-3,1,2)$

3) паралелна је x-оси и садржи тачке $A(4,0,-2)$ и $B(5,1,7)$

1) $\alpha : \alpha \ni P \,,\ \alpha \parallel Oxz$



$\alpha \parallel Oxz \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_{Oxz} = \underbrace{(0,1,0)}_{\text{јединични вектор } y\text{-осе}}$

$\Rightarrow \alpha : 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z + d = 0$

$\alpha : y + d = 0$

$P \in \alpha \Rightarrow 3 + d = 0$

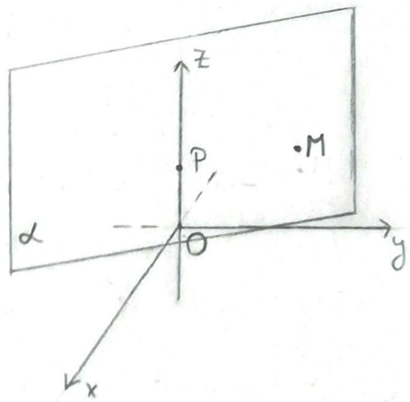
$\Rightarrow \underline{d = -3}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha : y - 3 = 0}$

2) $\alpha : \alpha \ni O_z \,,\ \alpha \ni M$

$P(0,0,z)$ - тачке z-осе

нпр. $z = 1 \leadsto P(0,0,1)$



Раван α је одређена тачкама:

$O(0,0,0)$

$P(0,0,1)$

$M(-3,1,2)$

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$O \in \alpha \Rightarrow a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$

$P \in \alpha \Rightarrow a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 1 + d = 0 \Rightarrow c + d = 0$

$M \in \alpha \Rightarrow a\cdot(-3) + b\cdot 1 + c\cdot 2 + d = 0 \Rightarrow -3a + b + 2c + d = 0$

$$\left.\begin{array}{r} -3a+b+2c+d=0 \\ \left.\begin{array}{r} c+d=0 \\ d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{c=d=0} \end{array}\right\} \underline{b=3a}$$

$\Rightarrow \alpha: a\cdot x+3a\cdot y=0 \quad /:a$

$\Rightarrow \boxed{\alpha: x+3y=0}$

3) $\alpha: \ \alpha \parallel Ox, \ \alpha \ni A(4,0,-2), \ \alpha \ni B(5,1,7)$

$\alpha: ax+by+cz+d=0$

$\alpha \parallel Ox \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}$

$\alpha: by+cz+d=0$

$A\in\alpha \Rightarrow b\cdot 0+c\cdot(-2)+d=0 \Rightarrow -2c+d=0$

$B\in\alpha \Rightarrow b\cdot 1+c\cdot 7+d=0 \Rightarrow b+7c+d=0$

$$\left.\begin{array}{l} b+7c+d=0 \\ -2c+d=0 \Rightarrow \underline{d=2c} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b}=-7c-d=-7c-2c=\underline{-9c}$$

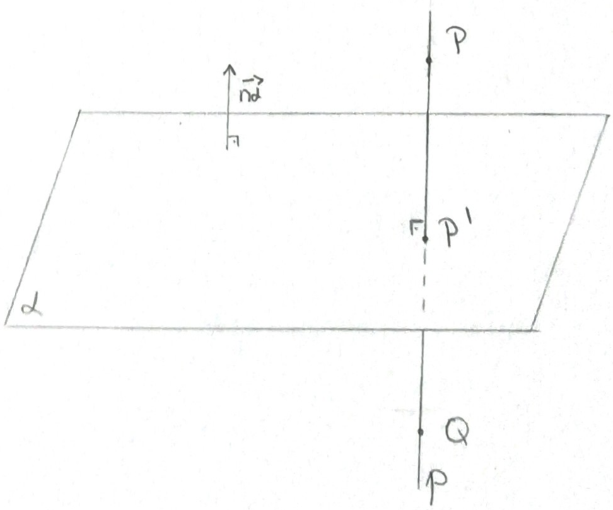
$\alpha: -9cy+cz+2c=0 \quad /:c$

$\Rightarrow \boxed{\alpha: -9y+z+2=0}$

(13.) Одредити тачку која је симетрична тачки $P(3,-2,-4)$ у односу на раван $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ као и пројекцију тачке P на раван α.

Q - тачка симетрична тачки P у односу на раван α

P' - пројекција тачке P на раван α



Нека је p права таква да $p \ni P$ и $p \perp \alpha$.

$\vec{v_p} = \vec{n_\alpha} = (6, 2, -3)$

$$p: \begin{array}{l} x = \boxed{3} + t \cdot \boxed{6} \\ y = -2 + t \cdot 2 \\ z = -4 + t \cdot (-3) \end{array} \Rightarrow \boxed{p: \begin{array}{l} x = 3 + 6t \\ y = -2 + 2t \\ z = -4 - 3t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

$\uparrow P \qquad \uparrow \vec{v_p}$

← ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ p

$\{P'\} = p \cap \alpha$

$P' \in p \Rightarrow P'(3+6t, -2+2t, -4-3t)$ за неко $t \in \mathbb{R}$ $\quad (*)$

$P' \in \alpha \Rightarrow 6 \cdot (3+6t) + 2 \cdot (-2+2t) - 3(-4-3t) - 75 = 0$

$18 + 36t - 4 + 4t + 12 + 9t - 75 = 0$

$49t + 30 - 79 = 0$

$49t = 49$

$t = 1 \quad (**)$

из $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow \boxed{P'(9, 0, -7)}$

~ P' је средиште дужи PQ па је $[P'] = \dfrac{[P] + [Q]}{2}$.

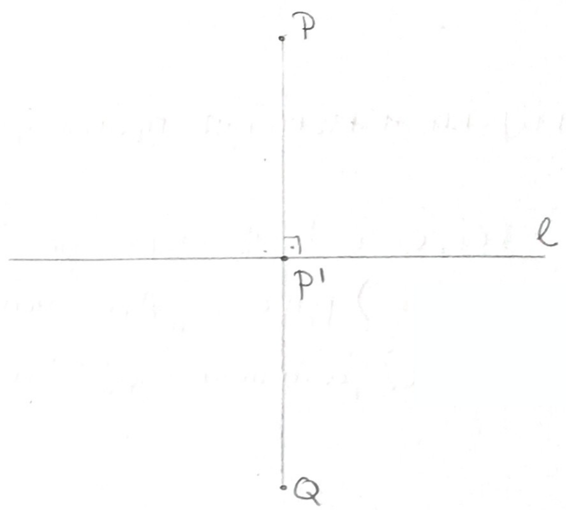
$[Q] = 2[P'] - [P] = 2 \cdot (9, 0, -7) - (3, -2, -4) = (15, 2, -10)$

$\Rightarrow \boxed{Q(15, 2, -10)}$

(14.) Одредити тачку која је симетрична тачки $P(-1,-2,1)$ у односу на праву $\ell: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$, као и пројекцију тачке P на ℓ.

P' - пројекција тачке P на ℓ

Q - тачка симетрична тачки P у односу на ℓ



$$\ell: \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1} \quad (=t)$$

$$\boxed{\ell: \quad \begin{aligned} x &= -2t \\ y &= 4t+3 \\ z &= t+4 \end{aligned} \quad , t\in\mathbb{R}}$$

← параметарска ј-на праве ℓ

$P'\in\ell \Rightarrow P'(-2t, 4t+3, t+4)$ за неко $t\in\mathbb{R}$ $(*)$

$PP' \perp \ell \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \perp \vec{v_\ell} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \circ \vec{v_\ell} = 0$

$\overrightarrow{PP'} = (-2t, 4t+3, t+4) - (-1,-2,1) = (1-2t, 4t+5, t+3)$

$\vec{v_\ell} = (-2,4,1)$

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{PP'} \circ \vec{v_\ell} &= (1-2t, 4t+5, t+3)\circ(-2,4,1) \\ &= -2(1-2t) + 4(4t+5) + 1\cdot(t+3) \\ &= -2 + 4t + 16t + 20 + t + 3 \\ &= 21t + 21 \end{aligned}$$

$\Rightarrow t = -1$ $(**)$

из $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow$ $\boxed{P'(2,-1,3)}$

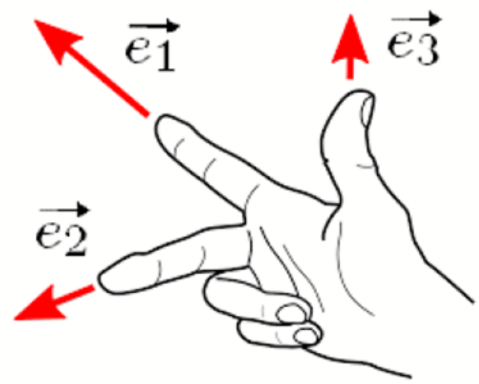
$[P'] = \frac{[P]+[Q]}{2}$

$[Q] = 2[P'] - [P] = 2(2,-1,3) - (-1,-2,1) = (5,0,5)$

$\Rightarrow \boxed{Q'(5,0,5)}$

Векторски и мешовит производ

База $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ простора је база позитивне оријентације ако важи правило (десне) руке: „Ако испружени кажипрст представља $\vec{e_1}$, средњи прст $\vec{e_2}$, а палац $\vec{e_3}$ база $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ је позитивно оријентисана".



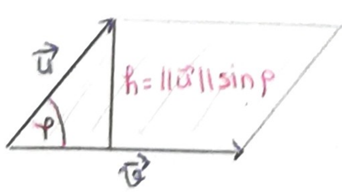
деф: Векторски производ је операција која векторима простора $\vec{v}$ и $\vec{u}$ додељује вектор $\vec{v}\times\vec{u}$ који је одређен особинама:

(1) $||\vec{v}\times\vec{u}|| = ||\vec{v}||\cdot||\vec{u}||\cdot\sin\varphi$, $\varphi = \measuredangle(\vec{v},\vec{u}) \in [0,\pi]$

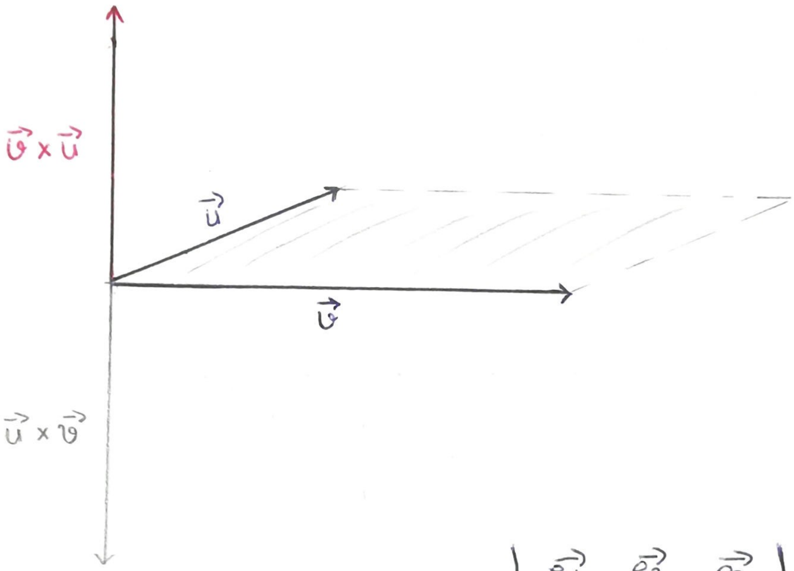
(2) вектор $\vec{v}\times\vec{u}$ је нормалан на сваки од вектора $\vec{v}$ и $\vec{u}$

(3) смер вектора $\vec{v}\times\vec{u}$ је такав да је база $(\vec{v},\vec{u},\vec{v}\times\vec{u})$ позитивне оријентисана.

Интензитет векторског производа $||\vec{v}\times\vec{u}||$ једнак је површини паралелограма одређеног векторима $\vec{v}$ и $\vec{u}$.



$\boxed{P_{\vec{u},\vec{v}} = ||\vec{v}\times\vec{u}||}$



$$\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{v} &= (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{u} &= (y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

деф: Мешовити производ је операција која векторима $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ додељује број $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v}\times\vec{u})\circ\vec{w}$.

Апсолутна вредност мешовитог производа $|[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|$ једнака је запремини паралелепипеда одређеног векторима $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$.

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{v} &= (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{u} &= (y_1, y_2, y_3) \\ \vec{w} &= (z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

* $\vec{v}\times\vec{u} = \vec{0} \iff \vec{v}, \vec{u}$ $\overbrace{\text{колинеарни}}^{\text{вектори су колинеарни ако њихови представници имају исти правац (паралелни су истој правој)}}$

* $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни (нису $\underbrace{\text{компланарни}}_{\text{вектори су компланарни ако су њихови представници паралелни истој равни}}$) $\iff [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0$