

Међусобни положаји две праве у простору.

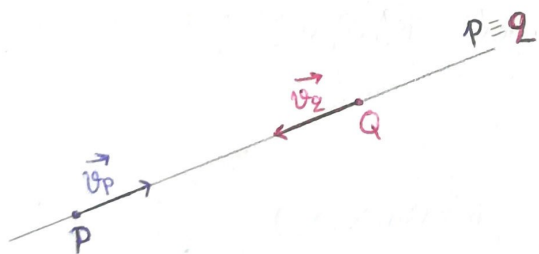
Представимо да је права p задата вектором правца $\vec{v}_p$ и тачком $P \in p$, а права q вектором правца $\vec{v}_q$ и тачком $Q \in q$.

Две праве у простору могу да:

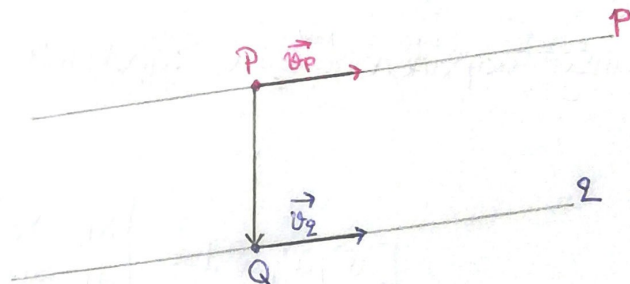
- * СЕ ПОКЛАПАЈУ $\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}$ су колинеарни
 - * БУДУ ПАРАЛЕЛНЕ $\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}$ нису колинеарни
 - * СЕ СЕКУ У ЈЕДНОЈ ТАЧКИ
 - * БУДУ МИМОЛАЗНЕ
- $$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_p \times \vec{v}_q = \vec{0} \\ \vec{v}_p \times \vec{v}_q \neq \vec{0} \end{array} \right\} \left[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ} \right] = 0$$
- $$\left[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ} \right] \neq 0$$

~ Мимолазне праве су праве у простору које нису колинеарне иј, за које не постоји раван која их садржи ($[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] \neq 0$)

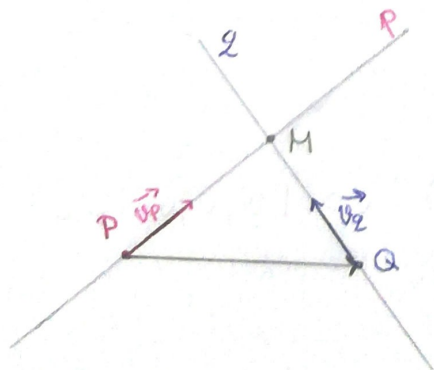
⊕ Сваке две мимолазне праве p и q имају јединствену заједничку нормалу n .



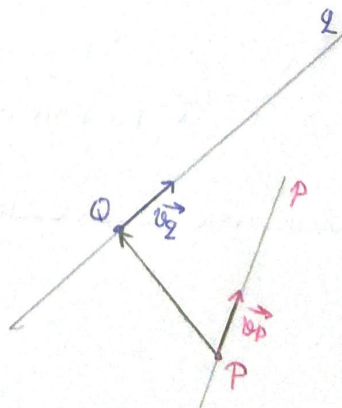
ПРАВЕ КОЈЕ СЕ ПОКЛАПАЈУ



ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ



ПРАВЕ КОЈЕ СЕ СЕКУ



МИМОЛАЗНЕ ПРАВЕ

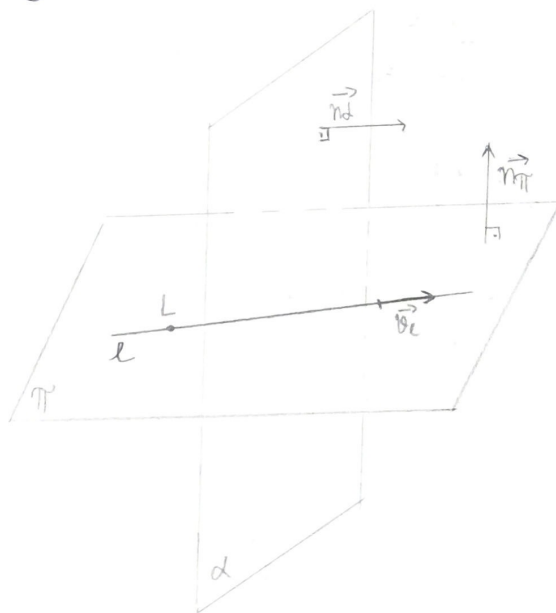
16. Odrediti jednadžinu ravni koja sadrži pravu $\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ i normalna je na ravan $\alpha: 2x-4y+z+5=0$

$$\Pi: \Pi \ni \ell, \Pi \perp \alpha$$

$$\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

$$L(1, -2, 3)$$

$$\vec{v}_\ell = (2, 1, 3)$$



$$\left. \begin{array}{l} * \ell \in \Pi \Rightarrow L \in \Pi \text{ и } \vec{v}_\ell \perp \vec{n}_\Pi \\ * \alpha \perp \Pi \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\Pi \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_\Pi = \vec{v}_\ell \times \vec{n}_\alpha$$

(ако су $\vec{v}_\ell$ и $\vec{n}_\alpha$ лн. независни, а овде јесу)

- + $\vec{v}_\ell = (2, 1, 3)$
- + $\vec{n}_\alpha = (2, -4, 1) \perp$

$$\vec{n}_\Pi = \vec{v}_\ell \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3 - 2\vec{e}_3 + 12\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 =$$

$$= 13\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$$

$$= \underline{\underline{(13, 4, -10)}}$$

$$\vec{n}_\Pi = (13, 4, -10) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Pi: 13x + 4y - 10z + d = 0 \\ L(1, -2, 3) \in \Pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 13 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 10 \cdot 3 + d = 0 \\ 13 - 8 - 30 + d = 0 \\ -25 + d = 0 \\ \underline{d = 25} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi: 13x + 4y - 10z + 25 = 0}$$

17) y kom su međusobnom položaju prave:

$$a) p: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$u \quad q: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -3 + 4s \\ z = 3 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

$$b) p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{3} \quad u \quad q: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-3}{2}$$

$$c) p: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \quad u \quad q: \begin{cases} x + 3 = 0 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$a) p: \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot t \\ y = 3 + (-1) \cdot t \\ z = -5 + 3 \cdot t \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 P $\vec{v}_p$

$$P(-1, 3, -5)$$

$$\vec{v}_p = (2, -1, 3)$$

$$q: \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot s \\ y = -3 + 4 \cdot s \\ z = 3 + (-2) \cdot s \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Q $\vec{v}_q$

$$Q(2, -3, 3)$$

$$\vec{v}_q = (1, 4, -2)$$

$$\vec{PQ} = (2, -3, 3) - (-1, 3, -5) = (3, -6, 8)$$

$$[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 64 + 6 - 18 - 36 - 24 + 8 = 78 - 78 = 0$$

$\Rightarrow p$ i q su komplanarne prave

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 + \vec{e}_3 - 12\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = -10\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 = (-10, 7, 9) \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow p$ i q se seku u jednoj tacki

$$-1 + 2t = 2 + s$$

$$3 - t = -3 + 4s$$

$$-5 + 3t = 3 - 2s$$

$$\begin{array}{rcl} 2t - s = 3 & / \cdot (-4) & / \cdot 2 \\ -t - 4s = -6 & \swarrow & \\ 3t + 2s = 8 & & \end{array}$$

$$2t - s = 3$$

$$-9t = -18 \quad / : -9$$

$$7t = 14 \quad / : 7$$

$$2t - s = 3$$

$$t = 2$$

$$\cancel{t} = 2$$

$$\underline{t = 2}$$

$$\underline{s = 2t - 3 = 4 - 3 = 1}$$

$\Rightarrow$
 Нпр. заметим
 $s = 1$ и $j = 1$ и $g = 2$

$$\begin{array}{|l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \text{Pr } g = \{x, y, z\}, X(3, 1, 1)$$

$$s) \quad p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$$

$$P(4, -3, 12)$$

$$\vec{v}_p = (1, 2, -1)$$

$$g: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$$

$$Q(3, 1, 1)$$

$$\vec{v}_g = (-7, -2, 3)$$

$$\vec{PQ} = (3, 1, 1) - (4, -3, 12) = (-1, 4, -11)$$

$$22 \cdot 7 = 154$$

$$[\vec{v}_p, \vec{v}_g, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -7 & -2 & 3 & -7 & -2 \\ -1 & 4 & -11 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{22} - \underline{6} + \underline{28} + \underline{2} - 12 - 154 = 52 - 172 = -120$$

$\neq$
 0
 $=$

$\Rightarrow p \neq g$ су титовлазне праве

$$b) p: x+5y+z=0 \\ x-z+4=0$$

$$q: \frac{x+3}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{5}$$

$$\bullet q: \frac{x+3}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{5}$$

$$Q(-3, 0, 1)$$

$$\vec{w}_2 = (5, -2, 5)$$

$$\bullet p: x+5y+z=0 \\ x-z+4=0$$

$$\pi_1: x+5y+z=0 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} = (1, 5, 1)$$

$$\pi_2: x-z+4=0 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} p \in \pi_1 \Rightarrow \vec{v}_p \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ p \in \pi_2 \Rightarrow \vec{v}_p \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_p = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$$

$$\vec{v}_p = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 + \vec{e}_2 = -5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 = (-5, 2, -5)$$

$$\vec{v}_p = -\vec{v}_q \Rightarrow p \parallel q \text{ und } p \equiv q$$

~ Da nu $Q \in p$?

$$\left. \begin{array}{l} -3+5 \cdot 0+1=0 \\ -3-1+4=0 \end{array} \right\} Q \notin p \Rightarrow \boxed{p \parallel q}$$

18) Одредити параметар λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и

$q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

p и q се секу ако $[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] = 0$ и $\vec{v}_p \neq \lambda \cdot \vec{v}_q$ за $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
($\vec{v}_p \times \vec{v}_q \neq \vec{0}$)

$$p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2} (=t)$$

$$P(2, -4, 1)$$

$$\vec{v}_p = (3, 5, -2)$$

$$q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0} (=s)$$

$$Q(\lambda, 3, -5)$$

$$\vec{v}_q = (2, 1, 0)$$

$$\vec{PQ} = (\lambda, 3, -5) - (2, -4, 1) = (\lambda-2, 7, -6)$$

$$0 = [\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ \lambda-2 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 28 + 2(\lambda-2) + 60 = 2\lambda - 50 + 60 = 2\lambda + 10$$

$$\Rightarrow 2\lambda = -10$$

$$\boxed{\lambda = -5}$$

$\Rightarrow$ За $\lambda = -5$ праве p и q се секу.

$$p: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t - 4 \\ z = -2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$q: \begin{cases} x = 2s - 5 \\ y = s + 3 \\ z = -5 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

$$3t + 2 = 2s - 5$$

$$5t - 4 = s + 3$$

$$-2t + 1 = -5 \Rightarrow -2t = -6 \Rightarrow \underline{\underline{t = 3}}$$

Заменим $t = 3$ у параметарску ј-ну праве p добијемо координате пресечне тачке:

$$p \cap q = \{XY, X(M, M, -5)\}$$

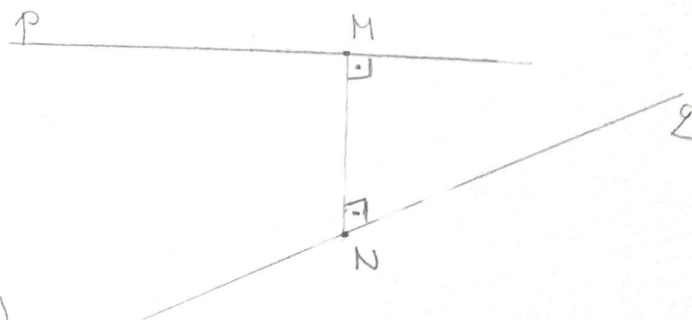
19) Опређити Заједничку Нормалу и параметричне титализне уравне

$$p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1} \text{ и } q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

$$p: x = t + 4$$

$$y = 2t - 3, t \in \mathbb{R}$$

$$z = -t + 12$$



→ произвољна тачка са уравне p
има координате облика $(t+4, 2t-3, -t+12)$.

$$q: x = -7s + 3$$

$$y = 2s + 1, s \in \mathbb{R}$$

$$z = 3s + 1$$

→ произвољна тачка са уравне q има
координате облика $(-7s+3, 2s+1, 3s+1)$.

$$M \in p \Rightarrow M(t+4, 2t-3, -t+12)$$

$$N \in q \Rightarrow N(-7s+3, 2s+1, 3s+1)$$

$$MN \perp p \vee MN \perp q$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \perp \vec{v}_p \text{ и } \vec{MN} \perp \vec{v}_q$$

$$\Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{v}_p = 0 \text{ и } \vec{MN} \cdot \vec{v}_q = 0$$

$$\vec{MN} = (-7s+3-t-4, 2s+1-2t+3, 3s+1+t-12) = (-7s-t-1, 2s-2t+4, 3s+t-11)$$

$$\vec{v}_p = (1, 2, -1)$$

$$\vec{v}_q = (-7, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{MN} \cdot \vec{v}_p = (-7s-t-1, 2s-2t+4, 3s+t-11) \cdot (1, 2, -1) = \\ &= \underline{-7s-t-1} + \underline{4s-4t+8} - \underline{3s-t+11} = \underline{-6s-6t+18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{MN} \cdot \vec{v}_q = (-7s-t-1, 2s-2t+4, 3s+t-11) \cdot (-7, 2, 3) = \\ &= \underline{49s+7t+7} + \underline{4s-4t+8} + \underline{9s+3t-33} = \underline{62s+6t-18} \end{aligned}$$

$$-6s - 6t + 18 = 0 \quad |:6$$

$$62s + 6t - 18 = 0 \quad |:2$$

$$-s - t + 3 = 0 \quad |:3$$

$$31s + 3t - 9 = 0$$

$$-s - t + 3 = 0$$

$$28s = 0$$

$$\underline{s=0} \Rightarrow \underline{t=-s+3=3}$$

$$s=0 \leadsto q \Rightarrow N(3, 1, 1)$$

$$t=3 \leadsto p \Rightarrow M(7, 3, 9)$$

$$\vec{MN} = (3, 1, 1) - (7, 3, 9) = (-4, -2, -8) \sim (2, 1, 4)$$

$$d(p, q) = \|\vec{MN}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+4+64} = \sqrt{84} = \boxed{2\sqrt{21}}$$

расстојање

између p и q

$$MN: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$$

20. Сређити равни α која са равни $\beta: x-4y-8z+12=0$ гради угао од $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву $p: x+5y+z=0, x-z+4=0$

⊕ Скуп свих равни које садрже праву p дају као пресек две равни

шг. $p: \begin{cases} \alpha: ax+by+cz+d=0 \\ \beta: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$ је даи једначином:

$$\gamma: \lambda_1(ax+by+cz+d) + \lambda_2(a_1x+b_1y+c_1z+d_1) = 0$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\gamma \in \chi_{\alpha, \beta} \Rightarrow \underline{\gamma = \beta} \text{ или } \underline{\gamma \neq \beta}$$

$$\uparrow$$

$$\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\gamma: ax+by+cz+d + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1) = 0}$$

$$p: \begin{cases} \pi_1: x+5y+z=0 \\ \pi_2: x-z+4=0 \end{cases}$$

Како раван α садржи праву p то $\alpha \in \chi_{\pi_1, \pi_2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha = \pi_2}_{1. \text{ случај}} \quad \text{или} \quad \underbrace{\alpha: x+5y+z + \lambda(x-z+4) = 0}_{2. \text{ случај}}$$

1. случај:

$$\text{Проверавато је да је } \angle(\pi_2, \beta) = \frac{\pi}{4}.$$

Угао између равни α и β

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

(Постављато је да је угао између равни оштар)

$$\vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_\beta = (1, -4, -8)$$

$$\cos \angle(\pi_2, \beta) = \frac{|(1, 0, -1) \cdot (1, -4, -8)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-8)^2}} = \frac{|1 + 0 + 8|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 16 + 64}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{81}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \angle(\pi_2, \beta) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \pi_2 \text{ закључа са равни } \beta \text{ угао од } \frac{\pi}{4}$$

2. случај:

$$\alpha: x+5y+z + \lambda(x-z+4) = 0$$

$$\alpha: \underline{(1+\lambda)x} + 5y + \underline{(1-\lambda)z} + 4\lambda = 0$$

$$\vec{n}_\alpha = (1+\lambda, 5, 1-\lambda)$$

$$\text{Постављато је да је } \angle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4} \text{ или } \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|(1+\lambda, 5, 1-\lambda) \cdot (1, -4, -8)|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 5^2 + (1-\lambda)^2} \cdot \sqrt{1+16+64}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+\lambda-20-8+8\lambda|}{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+25+1-2\lambda+\lambda^2} \cdot \sqrt{81}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|9\lambda-27|}{9\sqrt{2\lambda^2+27}} \quad / 2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(9\lambda-27)^2}{9^2(2\lambda^2+27)}$$

$$9^2(2\lambda^2+27) = 2 \cdot 9^2(\lambda-3)^2$$

$$2\lambda^2+27 = 2(\lambda^2-6\lambda+9)$$

$$2\lambda^2+27 = \cancel{2\lambda^2} - 12\lambda + 18$$

$$12\lambda = 18 - 27$$

$$12\lambda = -9$$

$$\lambda = -\frac{9}{12} \stackrel{/:3}{=} -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow d: x+5y+z-\frac{3}{4}(x-z+4)=0 \quad / \cdot 4$$

$$\underline{4x} + \underline{20y} + \underline{4z} - \underline{3x} + \underline{3z} - 12 = 0$$

$$\boxed{x+20y+7z-12=0}$$

Решена сy :

$$\boxed{\begin{matrix} x-z+4=0 \\ x+20y+7z-12=0 \end{matrix}}$$

(21) Кроз тачку $T(-3, 1, 2)$ одредити праву ℓ која је паралелна равни $\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

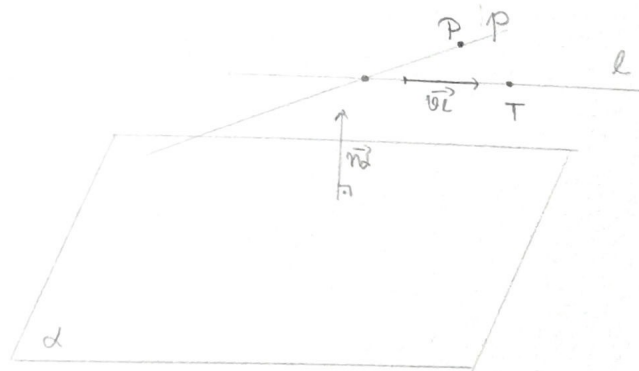
$$\ell \parallel \alpha \Rightarrow \vec{v}_\ell \perp \vec{n}_\alpha \text{ њј. } \underline{\vec{v}_\ell \cdot \vec{n}_\alpha = 0}$$

$$\vec{n}_\alpha = (4, -1, 2)$$

$$\vec{v}_\ell = (a, b, c)$$

$$(a, b, c) \cdot (4, -1, 2) = 0$$

$$\underline{4a - b + 2c = 0}$$



* p и ℓ се секу ако $[\vec{v}_p, \vec{v}_\ell, \vec{p}_T] = 0$ и $\vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_\ell$ за $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$p: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_p$$

$$\leadsto P(-3, 2, -1)$$

$$\vec{v}_p = (0, 2, -1)$$

$$\vec{p}_T = (-3, 1, 2) - (-3, 2, -1) = (0, -1, 3)$$

$$0 = [\vec{v}_p, \vec{v}_\ell, \vec{p}_T] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ a & b & c & a & b \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a - 6a = \underline{5a}$$

$$\Rightarrow \underline{a = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a - b + 2c = 0 \\ a = 0 \end{array} \right\} \ell = 2c$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\ell = (0, 2c, c) = c(0, 2, 1) \sim (0, 2, 1)$$

$$\text{Нај. } \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_\ell \text{ за } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

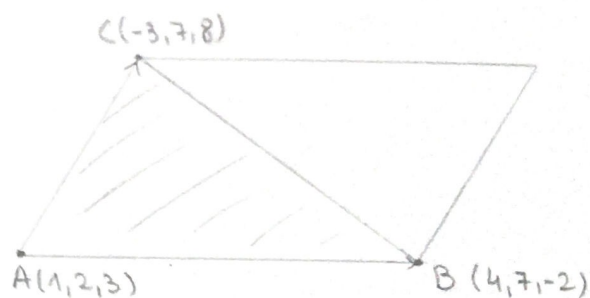
$$(0, 2, -1) \neq \lambda \cdot (0, 2, 1) \text{ за } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\ell: \frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$$

$\vec{v} \in \ell$

22. Израчунајте површину троугла ако његова шетена имају координате $A(1,2,3)$, $B(4,7,-2)$ и $C(-3,7,8)$.

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{\square} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$



$$\vec{AB} = (4,7,-2) - (1,2,3) = (3,5,-5)$$

$$\vec{AC} = (-3,7,8) - (1,2,3) = (-4,5,5)$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 5 & -5 \\ -4 & 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 25\vec{e}_1 + 20\vec{e}_2 + 15\vec{e}_3 + 20\vec{e}_3 + 25\vec{e}_1 - 15\vec{e}_2 \\ &= 50\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 35\vec{e}_3 \\ &= (50, 5, 35) \end{aligned}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|(50, 5, 35)\| = \frac{1}{2} \sqrt{50^2 + 5^2 + 35^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2500 + 25 + 1225} = \frac{1}{2} \sqrt{3750}$$

23. Израчунајте површину $\triangle ABC$ ако његова шетена имају координате $A(1,2)$, $B(4,7)$, $C(-3,7)$.

$$\vec{AB} = (3, 5) \xrightarrow{\text{у } \mathbb{R}^3} \vec{AB} = (3, 5, 0)$$

$$\vec{AC} = (-4, 5) \xrightarrow{\text{у } \mathbb{R}^3} \vec{AC} = (-4, 5, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 15\vec{e}_3 + 20\vec{e}_3 = 35\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, 35)$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(0, 0, 35)\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 35^2} = \frac{1}{2} \cdot 35 = \boxed{\frac{35}{2}}$$

9. Одредити трансформацију равни која представља композицију симетрије у односу на праву $\ell: x+3y-5=0$ и хометије са центром $S(2,1)$ и коефицијентом 3.

M_0 произволна тачка равни

$$S_\ell: M_0(x_0, y_0) \rightarrow M_1(x_1, y_1)$$

$$H_{S,3}: M_1(x_1, y_1) \rightarrow M_2(x_2, y_2)$$

Напомена: везе између координата (x_0, y_0) и (x_2, y_2) добијате формуле шрамене трансформације.

$$n: n \ni M_0 \text{ и } n \perp \ell$$

$$\ell: x+3y-5=0$$

$$3y = -x+5$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow k_\ell = -\frac{1}{3} \quad \left. \begin{array}{l} \\ n \perp \ell \end{array} \right\} \Rightarrow k_n = 3 \quad \Rightarrow n: y-y_0 = 3(x-x_0)$$

$$\{N\} = n \cap \ell$$

$$x+3y-5=0$$

$$3x-y-3x_0+y_0=0 \quad / \cdot 3$$

$$3x-y-3x_0+y_0=0$$

$$10x-9x_0+3y_0-5=0$$

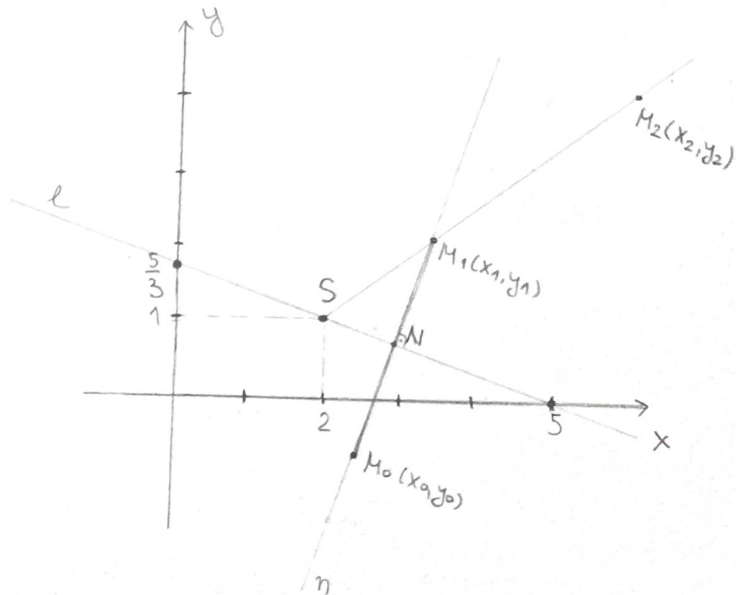
$$x = \frac{1}{10}(9x_0-3y_0+5)$$

$$y = 3x-3x_0+y_0$$

$$= \frac{3}{10}(9x_0-3y_0+5)-3x_0+y_0$$

$$= \frac{1}{10}(27x_0-9y_0+15-30x_0+10y_0)$$

$$= \frac{1}{10}(-3x_0+y_0+15)$$



$$\Rightarrow N \left(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10}, \frac{-3x_0 + y_0 + 15}{10} \right)$$

$$[N] = \frac{[M_0] + [M_1]}{2}$$

$$[M_1] = 2[N] - [M_0]$$

$$[M_1] = 2 \cdot \left(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10}, \frac{-3x_0 + y_0 + 15}{10} \right) - (x_0, y_0)$$

$$= \left(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{5} - x_0, \frac{-3x_0 + y_0 + 15}{5} - y_0 \right)$$

$$= \left(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5 - 5x_0}{5}, \frac{-3x_0 + y_0 + 15 - 5y_0}{5} \right)$$

$$\Rightarrow [M_1] = \left(\frac{4x_0 - 3y_0 + 5}{5}, \frac{-3x_0 - 4y_0 + 15}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{4x_0 - 3y_0 + 5}{5} \\ y_1 &= \frac{-3x_0 - 4y_0 + 15}{5} \end{aligned}}$$

$$\underline{\underline{H_{S,k}: X \rightarrow X'}} \quad \text{ug} \quad \overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$$

↑
хомотетија са
центром S и коефицијентом $k \neq 0$

$$k > 0, x' \in \overrightarrow{SX}$$

$$k < 0, x' \notin \overrightarrow{SX}$$

$$H_{S,3}: M_1 \rightarrow M_2$$

$$\overrightarrow{SM_2} = 3 \cdot \overrightarrow{SM_1}$$

$$[M_2] - [S] = 3 \cdot ([M_1] - [S])$$

$$[M_2] = [S] + 3 \cdot [M_1] - 3[S]$$

$$[M_2] = 3[M_1] - 2[S]$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{4x_0 - 3y_0 + 5}{5}, \frac{-3x_0 - 4y_0 + 15}{5} \right) - 2(2, 1)$$

$$= \left(\frac{12x_0 - 9y_0 + 15}{5} - 4, \frac{-9x_0 - 12y_0 + 45}{5} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{12x_0 - 9y_0 + 15 - 20}{5}, \frac{-9x_0 - 12y_0 + 45 - 10}{5} \right)$$

$$\Rightarrow [M_2] = \left(\frac{12x_0 - 9y_0 - 5}{5}, \frac{-9x_0 - 12y_0 + 35}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_2 &= \frac{12x_0 - 9y_0 - 5}{5} \\ y_2 &= \frac{-9x_0 - 12y_0 + 35}{5} \end{aligned}}$$

15) Одредити трансформацију простира која сваку тачку $M(x, y, z)$ пресликава у њој симетричну тачку у односу на тачку $S(-1, 1, 3)$.

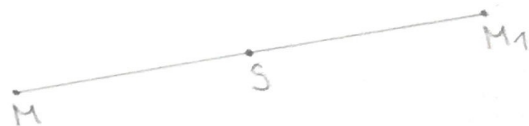
$$S_S : M(x, y, z) \rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$[S] = \frac{[M] + [M_1]}{2}$$

$$[M_1] = 2[S] - [M]$$

$$= 2(-1, 1, 3) - (x, y, z)$$

$$= (-2 - x, 2 - y, 6 - z)$$



$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= -2 - x \\ y_1 &= 2 - y \\ z_1 &= 6 - z \end{aligned}}$$