Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2 2020.

1. [5]

   а) Дефинисати векторски простор и векторски потпростор.

   б) Навести *Грасманову формулу*.

   в) Дефинисати скаларни производ.

   г) Ако је језгро линеарног оператора $L : V \to V$ тривијално, тада је L инјекција. Доказати.

   д) Ако су ненула вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ортогонални, они су и линеарно независни. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -14 \\ 16 & 7 & -28 \\ 8 & 4 & -15 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

4. [5] Одредити једначине симетрала углова између правих $p : x = 3$ и $q : 2x - y = 5$.

5. [5] Дате су тачка $L(2, 0, 2)$ као и праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$.

   а) Одредити међусобни положај правих p и q.

   б) Одредити праву која садржи тачку L и сече праве p и q.

6. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ линеарно пресликавање. Ако је k природан број за који је $ImL^k = ImL^{k+1}$, тада је $ImL^{k+1} = ImL^{k+2}$. Доказати. Навести пример пресликавања L и природног броја k за $n = 2$.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2 2020.

1. [5]

   а) Дефинисати векторски простор и векторски потпростор.

   б) Навести *Грасманову формулу*.

   в) Дефинисати скаларни производ.

   г) Ако је језгро линеарног оператора $L : V \to V$ тривијално, тада је L инјекција. Доказати.

   д) Ако су ненула вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ортогонални, они су и линеарно независни. Доказати.

2. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -14 \\ 16 & 7 & -28 \\ 8 & 4 & -15 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3. [5] Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

4. [5] Одредити једначине симетрала углова између правих $p : x = 3$ и $q : 2x - y = 5$.

5. [5] Дате су тачка $L(2, 0, 2)$ као и праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$.

   а) Одредити међусобни положај правих p и q.

   б) Одредити праву која садржи тачку L и сече праве p и q.

6. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ линеарно пресликавање. Ако је k природан број за који је $ImL^k = ImL^{k+1}$, тада је $ImL^{k+1} = ImL^{k+2}$. Доказати. Навести пример пресликавања L и природног броја k за $n = 2$.

СРЕЋНО!