Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.4)

   а) База векторског простора.

   б) Изоморфизам векторских простора.

   в) Ранг линеарног пресликавања.

   г) Директна сума векторских потпростора векторског простора V.

   д) Доказати да је сума $U+W$ директна ако и само ако је $U \cap W = \{0\}$.

2. ([5]) У зависности од реалног параметра λ решити систем:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 5y & + & z & + & 3t & = & 2 \\ 4x & + & 6y & + & 3z & + & 5t & = & 4 \\ 4x & + & 14y & + & z & + & 7t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 3z & + & \lambda t & = & 7. \end{array}$$

3. [5] Нека су $U = \{p \in \mathbb{R}^3[x] | p(0) + p(1) = 0\}$ и $W = \{p \in \mathbb{R}^3[x] | p(1) + p'(1) = 0\}$, где је $\mathbb{R}^3[x]$ - векторски простор свих полинома степена 2 и мањег.

   а) Доказати да су U и W векторски потрпостори од $\mathbb{R}^3[x]$.

   б) Одредити бар по једну базу, као и димензију простора U и W.

   в) Испитати да ли је $\mathbb{R}^3[x] = U + W$. Да ли је сума директна.

4. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
   $L(x, y, z, t) = (x - y + z - t, 2x - y - z + 2t, 3x - z - t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

5. [5] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha+1 & -1 \\ 0 & \alpha & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & \alpha-1 \\ 2019 & 12 & 14 & 2020 \end{bmatrix}$.

   а) Израчунати $\det A$.

   б) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра α.

   в) За које α матрица A има инверз?

6. [5] Нека су U и W разни четвородимензиони потпростори векторског простора V димензије 5. Одредити димензију за $U + W$ и $U \cap W$. Образложити и навести пример у $\mathbb{R}^5$.

Време за рад је 180 минута.
СРЕЋНО!