(2) $A=\begin{bmatrix}-2&4&-3\\-2&7&-6\\-2&8&-7\end{bmatrix}$

- $\varphi_A(t)=\det(A-tE)=\begin{vmatrix}-2-t&4&-3\\-2&7-t&-6\\-2&8&-7-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2-t&-4t-4&-3\\-2&-t-1&-6\\-2&0&-7-t\end{vmatrix}\cdot(-4)$

$=\begin{vmatrix}6-t&0&21\\-2&-t-1&-6\\-2&0&-7-t\end{vmatrix}=-(t+1)\begin{vmatrix}6-t&21\\-2&-7-t\end{vmatrix}=-(t+1)\left(t^2+t-\cancel{42}+\cancel{42}\right)$

$=-(t+1)(t+1)t=-(t+1)^2t$

- $\underline{t_1=0}$, $\vartheta=\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\\\vartheta_3\end{bmatrix}$

$A\vartheta=0\vartheta$

$\begin{bmatrix}-2&4&-3\\-2&7&-6\\-2&8&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\\\vartheta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$-2\boxed{\vartheta_1}+4\vartheta_2-3\vartheta_3=0 \quad /\cdot(-1)$
$-2\vartheta_1+7\vartheta_2-6\vartheta_3=0$
$-2\vartheta_1+8\vartheta_2-7\vartheta_3=0$

$3\boxed{\vartheta_2}-3\vartheta_3=0$
$\cancel{4\vartheta_2-4\vartheta_3=0}$

$\vartheta_3=\lambda\in\mathbb{R}$
$\vartheta_2=\vartheta_3=\lambda$
$\vartheta_1=\frac{1}{2}(4\vartheta_2-3\vartheta_3)=\frac{\lambda}{2}$

$\vartheta=\begin{bmatrix}\lambda/2\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix}=\frac{\lambda}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\underline{t_2=-1}$

$A\vartheta=-\vartheta$

$\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\\\vartheta_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\\\vartheta_3\end{bmatrix}$

$-\boxed{\vartheta_1}+4\vartheta_2-3\vartheta_3=0 \quad /\cdot(-2)$
$\cancel{-2\vartheta_1+8\vartheta_2-6\vartheta_3=0}$
$\cancel{-2\vartheta_1+8\vartheta_2-6\vartheta_3=0}$

$\vartheta_2,\vartheta_3\in\mathbb{R}$
$\vartheta_1=4\vartheta_2-3\vartheta_3$

$\vartheta=\begin{bmatrix}4\vartheta_2-3\vartheta_3\\\vartheta_2\\\vartheta_3\end{bmatrix}=\vartheta_2\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}+\vartheta_3\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vartheta_2,\vartheta_3\in\mathbb{R}$, $\vartheta_2^2+\vartheta_3^2\neq0$

$\Rightarrow$ има 3 лин. нез. соп. вектора
$\Rightarrow$ A јесте слична дијагоналној
$\Rightarrow \mu_A(t)=t(t+1)$

- $P=\begin{bmatrix}1&4&-3\\2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right]/\cdot(-2)$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\0&-7&6&-2&1&0\\0&-8&7&-2&0&1\end{array}\right]/\cdot(-1)$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&-1\\0&-8&7&-2&0&1\end{array}\right]/\cdot 8$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&-3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&-1\\0&0&-1&-2&8&-7\end{array}\right]/\cdot(-1)\ /\cdot(-3)$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&0&7&-24&21\\0&1&0&2&-7&6\\0&0&1&2&-8&7\end{array}\right]/\cdot(-4)$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&4&-3\\0&1&0&2&-7&6\\0&0&1&2&-8&7\end{array}\right]$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&4&-3\\2&-7&6\\2&-8&7\end{bmatrix}$

$D=P^{-1}AP$
$A=PDP^{-1}$

$A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n}=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})=PD^nP^{-1}$

$n\in\mathbb{N}$

$=\begin{bmatrix}1&4&-3\\2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&4&-3\\2&-7&6\\2&-8&7\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0&4(-1)^n&-3(-1)^n\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&4&-3\\2&-7&6\\2&-8&7\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}2(-1)^n&-4(-1)^n&3(-1)^n\\2(-1)^n&-7(-1)^n&6(-1)^n\\2(-1)^n&-8(-1)^n&7(-1)^n\end{bmatrix}$

(3) $f_1=(-1,1,1,-1)$ $\qquad \mathbb{V}=\mathcal{L}(f_1,f_2,f_3)$

$f_2=(3,-1,-1,3)$

$f_3=(-5,-1,1,-7)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & -6 & -4 & \boxed{-2} \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ лин. су нез. $\Rightarrow$ база за $\mathbb{V}$

$$\hat{e}_1=f_1=(-1,1,1,-1)$$

$$\hat{e}_2=f_2-\frac{f_2\circ\hat{e}_1}{\hat{e}_1\circ\hat{e}_1}\hat{e}_1=(3,-1,-1,3)-\frac{-3-1-1-3}{1+1+1+1}(-1,1,1,-1)=(3,-1,-1,3)+2(-1,1,1,-1)=(1,1,1,1)$$

$$\hat{e}_3=f_3-\frac{f_3\circ\hat{e}_1}{\hat{e}_1\circ\hat{e}_1}\hat{e}_1-\frac{f_3\circ\hat{e}_2}{\hat{e}_2\circ\hat{e}_2}\hat{e}_2=(-5,-1,1,-7)-\frac{5-1+1+7}{1+1+1+1}(-1,1,1,-1)-\frac{-5-1+1-7}{1+1+1+1}(1,1,1,1)=$$

$$=(-5,-1,1,-7)-3(-1,1,1,-1)+3(1,1,1,1)=$$

$$=(-5,-1,1,-7)+(6,0,0,6)=(1,-1,1,-1)$$

$e_1=\frac{1}{\|\hat{e}_1\|}\hat{e}_1=\frac{1}{2}(-1,1,1,-1)$

$e_2=\frac{1}{\|\hat{e}_2\|}\hat{e}_2=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$ $\qquad \Rightarrow \{e_1,e_2,e_3\}$ - ОНБ за $\mathbb{V}=\mathcal{L}(e_1,e_2,e_3)$

$e_3=\frac{1}{\|\hat{e}_3\|}\hat{e}_3=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$

$\mathbb{V}=\{v\in\mathbb{R}^4 \mid v\perp \underbrace{\mathbb{V}}_{\mathcal{L}(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)}\}=\{v\in\mathbb{R}^4 \mid v\perp \hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}=\{v=(a,b,c,d) \mid$

$-a+b+c-d=0$

$a+b+c+d=0$

$a-b+c-d=0$

$2\boxed{b}+2c=0$

$2c-2\boxed{d}=0$

$c\in\mathbb{R},\ d=c$

$b=-c$

$a=b+c-d=-c$

$=\{(-c,-c,c,c) \mid c\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}(\hat{e}_4)$

$\hat{e}_4=(-1,-1,1,1)$

$e_4=\frac{1}{\|\hat{e}_4\|}\hat{e}_4=\frac{1}{2}(-1,-1,1,1)$

(4) $L(0,-1,-4)$

$p: \boxed{x}+y+z-3=0$

$2x\ 2y-\boxed{z}-14=0$

l: $l\ni L$

$l\perp p$

l сече p

• p: $y=\lambda\in\mathbb{R}$

$z=2\lambda-14$

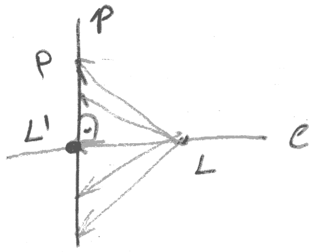
$x=-\lambda-(2\lambda-14)+3=$

$=-3\lambda+17$

p: $x=-3\lambda+17$

$y=\lambda$

$z=2\lambda-14$ $\longrightarrow \vec{v}_p=(-3,1,2)$



$P(-3\lambda+17,\lambda,2\lambda-14),\ \lambda\in\mathbb{R}$

• $\overrightarrow{LP}=(-3\lambda+17,\lambda+1,2\lambda-10),\ \lambda\in\mathbb{R}$

• λ: $\overrightarrow{LP}\perp p \iff \overrightarrow{LP}\perp\vec{v}_p$

$\iff \overrightarrow{LP}\circ\vec{v}_p=0$

$\iff (-3\lambda+17,\lambda+1,2\lambda-10)\circ(-3,1,2)=0$

$\iff 14\lambda-70=0$

$\iff \lambda=5 \longrightarrow$ у $P \longrightarrow L'(2,5,-4)$

$l=LL'$, $\vec{v}_l=\overrightarrow{LL'}=(2,6,0)=2(1,3,0) \Rightarrow \boxed{l: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+4}{0}}$

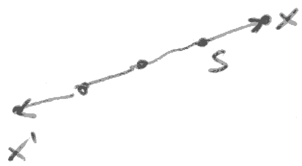
(5.) $\mathcal{H}_{-3,S}$, $S(1,-2)$

$k: x^2+y^2-4x-2y+4=0$

$\mathcal{H}_{-3,S}(k) = ?$

• $X(x,y) \xmapsto{\mathcal{H}_{-3,S}} X'(x',y')$

$\Leftrightarrow -3\vec{SX} = \vec{SX'}$



$\Leftrightarrow -3(X-S) = X'-S$

$\Leftrightarrow X' = -3X+4S$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}x'=-3x+4\\ y'=-3y-8\end{matrix}} \Leftarrow \boxed{\mathcal{H}_{-3,S}}$

• $k: x^2+y^2-4x-2y+4=0$ ← круг (скуп тачака које су за r удаљене од центра круга $C(a,b)$)

$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+4=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

→ $C(2,1)$ центар круга

$r=1$ полупр. круга

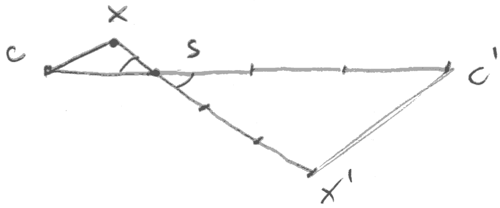
$X(x,y): \|\vec{CX}\|=r$

$\Leftrightarrow \|(x-a,y-b)\|=r$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a,y-b)\circ(x-a,y-b)}=r$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ← ј-на круга са центром $C(a,b)$ и полупр r

I НАЧИН ШТА РАДИ ХОМОТЕТИЈА ДУЖИНАМА ДУЖИ? СА CX пар.



$\Delta CSX \sim \Delta C'SX'$ $\left(\begin{matrix}\measuredangle CSX = \measuredangle C'SX' \\ \frac{SC}{SC'} = \frac{SX}{SX'} = \frac{1}{3}\end{matrix} \right)$ коеф. сличности

$\Rightarrow \frac{CX}{C'X'} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow C'X' = 3CX = 3\cdot 1$

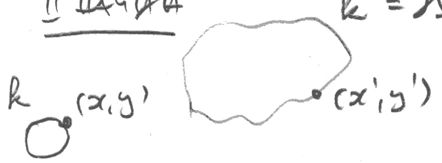
$\Rightarrow$ све тачке у слици круга k су за 3 удаљене од $C' = \mathcal{H}_{-3,S}(C)$ → C': $x'=-3\cdot2+4=-2$, $y'=-3\cdot1-8=-11$

$C(2,1)$

$\to C'(-2,5)$

$\Rightarrow$ слика круга k је круг са центром $C'(-2,-11)$ и полупр 3 → $\boxed{k': (x+2)^2+(y+11)^2=3^2}$

II НАЧИН $k' = \mathcal{H}_{-3,S}(k)$



$k: (x-2)^2+(y-1)^2=1$

$\mathcal{H}_{-3,S}: \left.\begin{matrix}x'=-3x+4\\ y'=-3y-8\end{matrix}\right)$ ← веза (x,y) и (x',y')

Нама треба скуп који задовољавају (x',y')

$\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{3}(-x'+4)\\ y=\frac{1}{3}(-y'-8)\end{matrix}\right)$ → у k

$k': \left(\frac{1}{3}(4-x')-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}(-y'-8)-1\right)^2=1 \; /\cdot 3^2$

k' $(4-x'-6)^2+(-y'-8-3)=3^2 \Leftrightarrow \boxed{k': (x+2)^2+(y+11)^2=3^2}$

6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ - инверзибилна $\rightarrow$ $\exists A^{-1} = \frac{1}{\det} \operatorname{adj} A$

$\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$

$\Rightarrow (\det A) \cdot A^{-1} = \operatorname{adj} A$

$$\boxed{\det(\operatorname{adj} A)} \overset{*}{=} \det\Big(\underbrace{(\det A)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{A^{-1}}_{\in M_n(\mathbb{R})}\Big) =$$

$k = \det A$

$$= (\det A)^n \cdot \det A^{-1} = (\det A)^{n-1} \cdot \underbrace{\det A \cdot \det A^{-1}} =$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(kM) = \det \begin{bmatrix} k a_{11} & \cdots & k a_{1n} \\ \vdots & & \\ k a_{n1} & \cdots & k a_{nn} \end{bmatrix} = k^n \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = k^n \cdot \det M$$

$$= (\det A)^{n-1} \cdot \det(\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{= E}) =$$

$$\boxed{(\det A)^{n-1}}$$