Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
септембар 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)
   1.1 [0,3] Потпростор векторског простора.
   1.2 [0,3] Траг матрице.
   1.3 [0,5] Норма вектора у еуклидском векторском простору (дат је скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
   1.4 [0,3] Инверз матрице.
   1.5 [0,5] Сопствена вредност линеарног оператора $L : V \longrightarrow V$.
   1.6 [0,3] Ортогоналност вектора.
   1.7 [0,4] Ранг линеарног оператора $L : V \longrightarrow V$.
   1.8 [0,7] Формулисати *Грам–Шмитову теорему о ортогонализацији*.
   1.9 [0,7] Формулисати *Кејли–Хамилтонову теорему*.
   1.10 [1,0] Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$, $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $U = \{x \in V |\ Ax = \lambda x\}$ подскуп скупа V. Доказати да је U потпростор векторског простора V.

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z + 4t &= 1 \\ 2x + 7y - 5z + 7t &= 0 \\ 3x + 10y - 6z + 8t &= 3 \\ x + 6y - 7z + 8t &= -1 \end{aligned}$$

3. [4] Нека су U и V потпростори векторског простора $M_2(\mathbb{R})$ такви да је

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Одредити бар по једну базу и димензију за U, V, $U + V$, $U \cap V$. Да ли је $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$?

4. [4] Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \\ 6 & -13 & -7 \end{bmatrix}.$$

   Одредити карактеристични и минимални полином матрице A. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Нека је $U \leq \mathbb{R}^4$ скуп свих решења система једначина

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z - t &= 0 \\ x - 2y - z + 2t &= 0. \end{aligned}$$

   Наћи базу за $U^{\perp}$.

6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити растојање тачке $A(3, 5)$ од праве $p : 2y - x + 4 = 0$, као и нормалу из тачке A на правој p.
   б) [2] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину равни γ која садржи тачку $T(1, 1, 1)$ и ортогонална је на равнима $\alpha : 2x + 3y - 4z + 1 = 0$ и $\beta : x - y + z = 0$.

7. [5] Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ матрице, при чему је бар једна од њих инвертибилна. Доказати да матрице AB и BA имају исти карактеристични полином.

Време за рад је 180 минута.