Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2018.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)
   1.1 [0,3] Декартов производ два скупа.
   1.2 [0,3] Сурјекција или 'на' пресликавање.
   1.3 [0,5] Димензија векторског простора.
   1.4 [0,3] Линеарна независност скупа вектора $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ над пољем $\mathbb{C}$.
   1.5 [0,5] Линеарни функционал.
   1.6 [0,3] Језгро линеарног оператора.
   1.7 [0,4] Ранг матрице $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
   1.8 [0,7] Навести формулу за растојање мимоилазних правих у $\mathbb{R}^3$.
   1.9 [0,7] Навести *Грасманову формулу*.
   1.10 [1,0] Доказати да је сума $U + V$ директна ако и само ако је $U \cap V = \{0\}$.
2. [5] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x-2y+2z-\ t &= 5\\ 3x-5y+\ z+4t &= 6\\ 2x-3y-2z+2t &= 7\\ x-3y+9z-2t &= 2 \end{aligned}$$

3. [5] Нека је $V = \{p(x) \in \mathbb{R}^4[X] |\ p(0) = p(1),\ p(-1) + p(1) = 0\}$.
   а) Доказати да је V векторски потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$.
   б) Одредити $\dim V$.
   в) Нека је $W = \mathcal{L}(-x^2 + x + 1, x)$. Испитати да ли је $\mathbb{R}^4[X] = V \oplus W$.
4. [5] Нека су дати вектори $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 0)$.
   а) Доказати да је $[u_1, u_2, u_3]$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити координате вектора $v = (1, -1, 2)$ у бази $[u_1, u_2, u_3]$.
   в) Нека је $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ матрица линеарног пресликавања $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ у односу на базе $[u_1, u_2, u_3]$ и $[e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)]$ простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Одредити слику вектора v из дела под б) при пресликавању L.
   г) Одредити ранг пресликавања L из дела под в).
5. [5] Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 10 & 0 \\ -2 & 6 & 14 & -5 \end{bmatrix}$.
   а) Одредити A^T и A^{-1}.
   б) Израчунати $\det A$.
   в) Одредити ранг матрице A.
6. [5] Нека је $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор такав да је $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$.
   а) Доказати да је $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2$.
   б) Доказати да је $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$.

Време за рад је 180 минута.