Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, ток 1и2
јун 1 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.8)

   1.1 [0,3] Ортогоналност два не-нула вектора $u$ и $v$ унитарног простора $V$.

   1.2 [0,3] Јединични вектор.

   1.3 [0,5] Линеарни омотач скупа $S \subseteq V$, где је $V$ векторски простор.

   1.4 [0,4] Слику линеарног оператора $A : V \longrightarrow W$.

   1.5 [0,6] Сопствени потпростор линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

   1.6 [0,3] Директну суму $U$ и $W$, $U, W \leq V$, где је $V$ векторски простор.

   1.7 [0,4] Сличност матрица $A$ и $B$.

   1.8 [0,5] Стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$.

   1.9 [0,7] Формулисати *Кејли–Хамилтонову теорему*.

   1.10 [1,0] Нека су $A$ и $B$ сличне матрице и $\phi_A(\lambda)$, $\phi_B(\lambda)$ њихови карактеристични полиноми. Доказати да је

$$\phi_A(\lambda) = \phi_B(\lambda).$$

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 0 \\ 7x + 14y + 20z + 27t &= 0 \\ 5x + 10y + 16z + 19t &= -2 \\ 3x + 5y + 6z + 13t &= 5. \end{aligned}$$

3. [4] Одредити бар једну базу језгра и слике линеарног оператора $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ задатог са

$$L(a, b, c) = (3a - b + 2c, -a - b + c, 2a - 2b + 3c, a - 3b + 4c).$$

4. [4] Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -8 & 8 \\ 2 & -9 & 11 \end{bmatrix}.$$

   Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A$ као и $\det(A)$. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу $P$ и дијагоналну матрицу $D$ такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Доказати да је са $u \circ v = u_1v_1 + 5u_2v_2 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1$, где је $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$, дефинисан један скаларни производ на $\mathbb{R}^2$.

6. а) [2] У координатном систему $Oxy$ одредити једначину праве $p$ која садржи тачку $A(1, 2019)$ а са правом $q : x + y + 4 = 0$ заклапа угао $\frac{\pi}{4}$.

   б) [2] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину равни $\pi$ која садржи праву $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} \frac{z-3}{3}$ и паралелна је са правом $t$ која се налази у пресеку равни $\alpha : x + y + z = 5$ и $\beta : 3x - 2y - z = 0$.

7. [5] Оператор $A : V \to V$ је нилпотентан уколико постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $A^n = 0$. Ако су $A$ и $B$ нилпотентни оператори такви да је $AB = BA$ показати:

   а) [2] Оператор $AB$ је нилпотентан.

   б) [3] Оператор $A + B$ је нилпотентан.

Време за рад је 180 минута.