Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)

   1.1 [0,3] Потпростор векторског простора.

   1.2 [0,3] Моничан полином.

   1.3 [0,5] Пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$.

   1.4 [0,3] Генератриса векторског простора.

   1.5 [0,5] Сопствена вредност линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

   1.6 [0,3] Скаларни производ на векторском простору V над пољем $\mathbb{R}$.

   1.7 [0,4] Карактеристични полином матрице $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

   1.8 [0,7] Формулисати *Грам–Шмитову теорему о ортогонализацији*.

   1.9 [0,7] Формулисати *Кејли–Хамилтонову теорему*.

   1.10 [1,0] Нека су u, v међусобно ортогонални вектори. Доказати да је $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$ (Питагорина теорема).

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+3y-2z+\ t &= -3 \\ -2x-5y+\ z-\ t &= 6 \\ -x-2y+\ z-4t &= -15 \\ x+3y-\ z-\ t &= -2. \end{aligned}$$

3. [4] Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4[X] = \{a+bx+cx^2+dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ и $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, где је $u_1 = x+1$, $u_2 = x^3 - x$, $v_1 = 2$, $v_2 = x^3 - x^2$ и $v_3 = x^2 + x^3$. Одредити бар по једну базу и димензију за U, V, $U+V$, $U \cap V$.

4. [4] Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \\ -16 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Одредити карактеристични и минимални полином матрице A. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Дати су вектори $v_1 = (3, 4, 0)$, $v_2 = (3, 4, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$. Одредити растојање вектора v_3 до потпростора $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, као и угао $\theta = \measuredangle(v_3, V)$.

6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити координате тачке B која је симетрична тачки $A(-1, 2)$ у односу на праву $p : x - y + 1 = 0$.

   б) [2] У координатном систему $Oxyz$ одредити једначину праве l која садржи тачку $A(3, 0, 0)$, паралелна је равни $\alpha : x - y + 1 = 0$ и сече праву $p : \frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-1}{1}$.

7. [5] Нека је $A : V \longrightarrow V$ линеарни оператор и нека је $U \leq V$ потпростор векторског простора V.

   а) Ако је $A(U) = U$ и $\dim U = 1$, доказати да је U сопствени потпростор оператора A.

   б) Ако је $B : V \longrightarrow V$ линеарни оператор такав да је $AB = BA$ и ако је $U \leq V$ сопствени потпростор оператора A, доказати да је $B(U) = U$.

Време за рад је 180 минута.