Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2019.

1. [5] Дефинисати следеће појмове (1.1-1.7)

    1.1 [0,3] Угао између два не-нула вектора u и v унитарног простора V.

    1.2 [0,3] Суму $U+V$, где су U и V потпростори векторског простора W.

    1.3 [0,5] Минимални полином матрице $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

    1.4 [0,3] Дефект линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

    1.5 [0,5] Сопствени вектор линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$.

    1.6 [0,3] Ортогонални комплемент потпростора L унитарног простора V.

    1.7 [0,4] Билинеарни функционал(или форма) над $\mathbb{C}$.

    1.8 [0,7] Навести неједнакост *Коши–Шварц–Буњаковског*.

    1.9 [0,7] Формулисати *Бине–Кошијеву теорему*.

    1.10 [1,0] Нека су A и B сличне матрице, доказати да је $\det(A) = \det(B)$.

2. [4] Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x+\ 2y-\ 1z-\ 5t &= -3 \\ 1x+\ 3y-\ 4z-\ t &= -1 \\ -5x-13y+15z+11t &= 19 \\ 4x+12y-14z-\ 8t &= 6. \end{aligned}$$

3. [4] Дате су базе $f = [(1,0,1),(2,1,2),(-1,-1,-2)]$ и $e = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ простора $\mathbb{R}^3$. Одредити матрицу преласка P са базе e на базу f као и координате вектора v у бази f уколико су $[v]_e = (1,1,1)$ његове координате у бази e.

4. [4] Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

    Одредити карактеристични и минимални полином матрице A. Ако постоје, наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$.

5. [4] Нека је $U = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$ потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и $f_1 = (1,0,1,-1)$, $f_2 = (\frac{4}{3}, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $f_3 = (1,0,0,1)$. Одредити бар једну ортонормирану базу простора U.

6. а) [2] У координатном систему Oxy одредити једначину праве q која садржи тачку $A(1,1)$ и која је ортогонална на праву $p : 2x - 3y + 4 = 0$.

    б) [2] У координатном систему Oxy одредити једначину параболе $\mathcal{P}$ чија је жижа $F(2,2)$, а директриса права $d : x + y - 1 = 0$.

7. [5] Дат је линеарни оператор $A : V \to V$.

    а) [3] Нека су v_1 и v_2 сопствени вектори који редом одговарају сопственим вредностима $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора A. Доказати да $v_1 + v_2$ није сопствени вектор оператора A.

    а) [2] Нека су $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\dim A \geq k \geq 2$) међусобно различите сопствене вредности оператора A, а $v_1, \dots, v_n$ одговарајући сопствени вектори. Доказати да вектор $v = v_1 + \cdots + v_k$ није сопствени вектор оператора A.

Време за рад је 180 минута.