

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}3x+3y-z+t-5w &= 4 \\4x-4y+6z-2t+2w &= 8 \\3x+3y+3z+3t-3w &= 12 \\-5x+2y-3z+3t+6w &= 5\end{aligned}$$

2. [4] Наћи ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V = \mathbb{R}^4[X]$ векторски простор свих полинома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4 и нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid p(0) = p(1)\}$ његов подскуп.

(а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V .

(б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.

(в) [2] Ако је $W = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$, одредити да ли је $V = U \oplus W$.

4. [8] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $L(a, b, c, d) = (a+2b+7c+4d, -2a-3c-3d, 2a+b+5c+3d, -a-c)$. Доказати да је L линеарни оператор. Затим пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$ и одредити њен инверз, уколико постоји.

5. [6] Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^5$ такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, где је $u_1 = (1, 3, -1, 2, 4)$, $u_2 = (2, 5, -1, 4, 5)$, $u_3 = (1, 2, 1, 5, 3)$, $u_4 = (-1, 1, -4, -5, 6)$ и $v_1 = (-1, 0, 0, 2, 1)$, $v_2 = (2, 4, -1, 3, 8)$, $v_3 = (5, 4, -1, -3, 5)$. Одредити димензије потпростора U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

Време за рад је 180 минута.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}3x+3y-z+t-5w &= 4 \\4x-4y+6z-2t+2w &= 8 \\3x+3y+3z+3t-3w &= 12 \\-5x+2y-3z+3t+6w &= 5\end{aligned}$$

2. [4] Наћи ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 5 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V = \mathbb{R}^4[X]$ векторски простор свих полинома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4 и нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid p(0) = p(1)\}$ његов подскуп.

(а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V .

(б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.

(в) [2] Ако је $W = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$, одредити да ли је $V = U \oplus W$.

4. [8] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $L(a, b, c, d) = (a+2b+7c+4d, -2a-3c-3d, 2a+b+5c+3d, -a-c)$. Доказати да је L линеарни оператор. Затим пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$ и одредити њен инверз, уколико постоји.

5. [6] Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^5$ такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, где је $u_1 = (1, 3, -1, 2, 4)$, $u_2 = (2, 5, -1, 4, 5)$, $u_3 = (1, 2, 1, 5, 3)$, $u_4 = (-1, 1, -4, -5, 6)$ и $v_1 = (-1, 0, 0, 2, 1)$, $v_2 = (2, 4, -1, 3, 8)$, $v_3 = (5, 4, -1, -3, 5)$. Одредити димензије потпростора U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

Време за рад је 180 минута.