Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2017.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x+\ y+3z+5w+9u &= 10 \\ x+2y+\ z-\ w+2u &= 6 \\ 3x-3y+2z-2w+\ u &= 16 \\ -x+\ y-3z+\ w \quad &= 9 \end{aligned}$$

2. [6] Наћи ранг матрице A, њену детерминанту и њен инверз (уколико постоји), ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека је $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ његов подскуп.
   (а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V.
   (б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.
   (в) [2] Ако је $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \;\middle|\; c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$, одредити да ли је $V = U \oplus W$.

4. [6] Нека су U и W потпростори векторског простора $V = \mathbb{R}^4$ такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$ и $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$, где је $u_1 = (1, 1, 2, -3)$, $u_2 = (3, 1, 0, 2)$, $u_3 = (-1, 1, 4, -8)$ и $w_1 = (1, -1, -6, 5)$, $w_2 = (5, 1, -2, 7)$, $w_3 = (2, 1, 2, 1)$. Одредити димензије потпростора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

5. [6] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $L(a, b, c, d) = (2a + b - d, a + c + 2d, -b + 3c + 4d)$. Доказати да је L линеарно пресликавање и наћи матрицу пресликавања L у пару канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
колоквијум 2017.

1. [6] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x+\ y+3z+5w+9u &= 10 \\ x+2y+\ z-\ w+2u &= 6 \\ 3x-3y+2z-2w+\ u &= 16 \\ -x+\ y-3z+\ w \quad &= 9 \end{aligned}$$

2. [6] Наћи ранг матрице A, њену детерминанту и њен инверз (уколико постоји), ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. [6] Нека је $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека је $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ његов подскуп.
   (а) [2] Доказати да је U векторски потпростор простора V.
   (б) [2] Наћи бар једну базу потпростора U и одредити његову димензију.
   (в) [2] Ако је $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \;\middle|\; c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$, одредити да ли је $V = U \oplus W$.

4. [6] Нека су U и W потпростори векторског простора $V = \mathbb{R}^4$ такви да је $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$ и $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$, где је $u_1 = (1, 1, 2, -3)$, $u_2 = (3, 1, 0, 2)$, $u_3 = (-1, 1, 4, -8)$ и $w_1 = (1, -1, -6, 5)$, $w_2 = (5, 1, -2, 7)$, $w_3 = (2, 1, 2, 1)$. Одредити димензије потпростора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

5. [6] Нека је $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $L(a, b, c, d) = (2a + b - d, a + c + 2d, -b + 3c + 4d)$. Доказати да је L линеарно пресликавање и наћи матрицу пресликавања L у пару канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

Време за рад је 180 минута.