Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

јун 2018.

1. [4] Решити систем једначина матричним методом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

2. [6] Нека је дат векторски простор $M_2(\mathbb{R})$ свих квадратних матрица реда 2 над пољем $\mathbb{R}$ и његови подскупови $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0,\ A = A^T\}$ и $V = \left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$.
   - (а) [2] Доказати да су подскупови U и V векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.
   - (б) [4] Одредити барем по једну базу и димензије за U, V, $U+V$, $U \cap V$. Да ли је сума $U+V$ директна?
3. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор на простору полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $L(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x + a_1x^2$. Одредити матрицу оператора L у бази $e = [1, x, x^2]$, затим одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\delta(L)$ и $\rho(L)$. Да ли је L инвертибилан? Ако јесте, наћи L^{-1}.
4. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице A, а затим одредити, ако постоје, инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$ и наћи A^{2018}, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) + p''(2)q''(2)$ и нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] \mid p(0) + p'(1) + p''(2) = 0\}$. Одредити $U^\perp$.
6. [5] Одредити једначину равни која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x + y - z + 14 = 0$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

јун 2018.

1. [4] Решити систем једначина матричним методом:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

2. [6] Нека је дат векторски простор $M_2(\mathbb{R})$ свих квадратних матрица реда 2 над пољем $\mathbb{R}$ и његови подскупови $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0,\ A = A^T\}$ и $V = \left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$.
   - (а) [2] Доказати да су подскупови U и V векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.
   - (б) [4] Одредити барем по једну базу и димензије за U, V, $U+V$, $U \cap V$. Да ли је сума $U+V$ директна?
3. [5] Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор на простору полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $L(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 + a_0x + a_1x^2$. Одредити матрицу оператора L у бази $e = [1, x, x^2]$, затим одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\delta(L)$ и $\rho(L)$. Да ли је L инвертибилан? Ако јесте, наћи L^{-1}.
4. [5] Одредити карактеристични и минимални полином матрице A, а затим одредити, ако постоје, инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $D = P^{-1}AP$ и наћи A^{2018}, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ полинома с реалним коефицијентима степена мањег од 3, који је дат са $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(1)q'(1) + p''(2)q''(2)$ и нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] \mid p(0) + p'(1) + p''(2) = 0\}$. Одредити $U^\perp$.
6. [5] Одредити једначину равни која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x + y - z + 14 = 0$.

Време за рад је 180 минута.