Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2018.

1. [4] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x-\ y+3z-2w+\ t &= 5 \\ x+3y+5z+6w-3t &= 7 \\ 2x+4y\qquad -\ w+5t &= 4 \\ 3x+\ y+4z-5w\qquad &= 8 \end{aligned}$$

2. [5] Нека су U и W потпростори векторског простора R^4 такви да је $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$ и $W=\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$, где је $u_1=(2,5,3,1)$, $u_2=(3,9,5,1)$, $u_3=(2,2,2,2)$ и $w_1=(3,1,1,0)$, $w_2=(2,0,2,1)$, $w_3=(4,2,0,1)$. Наћи бар једну базу и димензије простора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

3. [5] Нека је $L:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$, $L(a,b,c,d)=(a+b-c+4d,-a+b-c-3d,2a-4b+c,b+2c-3d)$ линеарни оператор. Пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E=\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$. Одредити ранг и дефект пресликавања L и бар једну базу за $\operatorname{Ker}L$ и $\operatorname{Im}L$.

4. [5] Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и, ако јесте, пронаћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $A=PDP^{-1}$ и одредити A^n, где је

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V=\mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома степена мањег од 4 и нека је скаларни производ дат са $\langle p,q\rangle=p(0)q(0)+p'(0)q'(0)+p''(0)q''(0)+p'''(0)+q'''(0)$. Ако је $U\leq V$ потпростор генерисан полиномима $p(x)=x^3$, $q(x)=x^2$ и $r(x)=x-1$, одредити бар једну ортонормирану базу тог потпростора.

6. [6]
   (а) [3] Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P=(3,2,4)$ у односу на раван $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α.
   (б) [3] Одредити једначине тангенти из тачке $A(3,4)$ на криву $x^2+y^2-2x-3=0$.

Време за рад је 180 минута.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
јануар 2018.

1. [4] Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x-\ y+3z-2w+\ t &= 5 \\ x+3y+5z+6w-3t &= 7 \\ 2x+4y\qquad -\ w+5t &= 4 \\ 3x+\ y+4z-5w\qquad &= 8 \end{aligned}$$

2. [5] Нека су U и W потпростори векторског простора R^4 такви да је $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$ и $W=\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$, где је $u_1=(2,5,3,1)$, $u_2=(3,9,5,1)$, $u_3=(2,2,2,2)$ и $w_1=(3,1,1,0)$, $w_2=(2,0,2,1)$, $w_3=(4,2,0,1)$. Наћи бар једну базу и димензије простора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

3. [5] Нека је $L:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$, $L(a,b,c,d)=(a+b-c+4d,-a+b-c-3d,2a-4b+c,b+2c-3d)$ линеарни оператор. Пронаћи матрицу пресликавања L у бази $E=\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$ простора $\mathbb{R}^4$. Одредити ранг и дефект пресликавања L и бар једну базу за $\operatorname{Ker}L$ и $\operatorname{Im}L$.

4. [5] Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и, ако јесте, пронаћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D такве да је $A=PDP^{-1}$ и одредити A^n, где је

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V=\mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома степена мањег од 4 и нека је скаларни производ дат са $\langle p,q\rangle=p(0)q(0)+p'(0)q'(0)+p''(0)q''(0)+p'''(0)+q'''(0)$. Ако је $U\leq V$ потпростор генерисан полиномима $p(x)=x^3$, $q(x)=x^2$ и $r(x)=x-1$, одредити бар једну ортонормирану базу тог потпростора.

6. [6]
   (а) [3] Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P=(3,2,4)$ у односу на раван $\alpha: 6x+2y-3z-75=0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α.
   (б) [3] Одредити једначине тангенти из тачке $A(3,4)$ на криву $x^2+y^2-2x-3=0$.

Време за рад је 180 минута.