Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
фебруар 2018.

1. [5] Крамеровим методом решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -y+3z+\ t &= 6 \\ -3y+2z+4t &= 7 \\ -2y-\ z+3t &= 1 \end{aligned}$$

2. [5] Нека је $V=\mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4. Нека је $U \leq V$ потпростор генерисан полиномима $p_1(x)=1-x+3x^2-x^3$, $p_2(x)=3+2x+5x^2$ и $p_3(x)=-2-8x+2x^2-4x^3$ и нека је $W \leq V$ потпростор генерисан полиномима $q_1(x)=-1-2x+5x^2+x^3$, $q_2(x)=5+3x+3x^2-2x^3$ и $q_3(x)=7+7x-7x^2-4x^3$. Одредити барем по једну базу и димензије потпростора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

3. [4] Нека је $L: V \to W$ линеарно пресликавање и нека су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ такви да су вектори $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_k) \in W$ линеарно независни. Доказати да су онда и вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линеарно независни вектори.

4. [5] Одредити да ли је матрица A дијагоналног типа, наћи њен карактеристични и минимални полином и, ако је дијагоналног типа, дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P такве да је $D=P^{-1}AP$, ако је

$$A=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V=\mathbb{R}^4$ векторски простор са стандардним скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нека су дати вектори $v_1=(1,2,3,4), v_2=(2,4,0,5), v_3=(4,8,6,-2)$. Наћи векторе u_1,u_2,u_3 такве да је $\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$ и да су вектори u_1,u_2,u_3 јединични и међусобно ортогонални.

6. (а) [3] Одредити једначине правих које су нормалне на правој $p: 4x-3y-3=0$ и налазе се на растојању 4 од тачке $A(1,2)$.

   (б) [3] Одредити једначину параболе чија је оса права $x-2y+1=0$, чије је теме тачка $T(1,1)$ и чија је жижа тачка $F(3,2)$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
фебруар 2018.

1. [5] Крамеровим методом решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -y+3z+\ t &= 6 \\ -3y+2z+4t &= 7 \\ -2y-\ z+3t &= 1 \end{aligned}$$

2. [5] Нека је $V=\mathbb{R}^4[X]$ векторски простор полинома с коефицијентима у $\mathbb{R}$ степена мањег од 4. Нека је $U \leq V$ потпростор генерисан полиномима $p_1(x)=1-x+3x^2-x^3$, $p_2(x)=3+2x+5x^2$ и $p_3(x)=-2-8x+2x^2-4x^3$ и нека је $W \leq V$ потпростор генерисан полиномима $q_1(x)=-1-2x+5x^2+x^3$, $q_2(x)=5+3x+3x^2-2x^3$ и $q_3(x)=7+7x-7x^2-4x^3$. Одредити барем по једну базу и димензије потпростора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

3. [4] Нека је $L: V \to W$ линеарно пресликавање и нека су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ такви да су вектори $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_k) \in W$ линеарно независни. Доказати да су онда и вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линеарно независни вектори.

4. [5] Одредити да ли је матрица A дијагоналног типа, наћи њен карактеристични и минимални полином и, ако је дијагоналног типа, дијагоналну матрицу D и инвертибилну матрицу P такве да је $D=P^{-1}AP$, ако је

$$A=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. [5] Нека је $V=\mathbb{R}^4$ векторски простор са стандардним скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нека су дати вектори $v_1=(1,2,3,4), v_2=(2,4,0,5), v_3=(4,8,6,-2)$. Наћи векторе u_1,u_2,u_3 такве да је $\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$ и да су вектори u_1,u_2,u_3 јединични и међусобно ортогонални.

6. (а) [3] Одредити једначине правих које су нормалне на правој $p: 4x-3y-3=0$ и налазе се на растојању 4 од тачке $A(1,2)$.

   (б) [3] Одредити једначину параболе чија је оса права $x-2y+1=0$, чије је теме тачка $T(1,1)$ и чија је жижа тачка $F(3,2)$.