Линеарна алгебра и аналитичка геометрија - теоријски задаци

Урађено на часу:

1. Доказати:
   а) Ако су A и B инверзибилне матрице $\Rightarrow AB$ је инверзибилна и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   б) Ако је A инверзибилна $\Rightarrow A^T$ је инверыибилна и $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T := A^{-T}$.
2. Нека су U и W седмодимензиони потпростори векторског простора V димензије 7. Одредити могуће вредности за $dimU \cap W$. Навести пример за сваку од вредности.
3. Ако је A квадратна матрица, доказати да је $\rho(A^2) \leq \rho(A)$.
4. Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V, $\dim V = n$, $\rho(L - I) = 1$ и $L^2 = I$ (где је I идентичко пресликавање).
   а) Доказати $Ker(L + I) \oplus Ker(Ł - I) = V$.
   б) Израчунати $\det L$ и $\det(L - I)$.
   в) Одредити $\rho(L + I)$.

За писмени:

1. Нека су U и W разни шестодимензиони потпростори векторског простора V димензије 9. Одредити могуће вредности за $dimU \cap W$. Навести пример за сваку од вредности.
2. Нека су A и B матрице такве да је множење AB дефинисано. Доказати да је $\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$.
3. Ако су A и B квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$ такве да је $AB = 0$, доказати да је $\rho(A) + \rho(B) \leq n$. Доказати да за дату квадратну матрицу A реда n и ранга мањег од n, постоји матрица B таква да је $AB = 0$ и $\rho(A) + \rho(B) = n$.
4. Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора V. Ако је $L \neq 0$ и ако $(\exists k \in \mathbb{N})L^k = 0$:
   а) Доказати да је $m_L(\lambda) = \lambda^m, m \in \mathbb{N}$ минимални полином оператора L.
   б) Доказати да за такво $m \in \mathbb{N}$ постоји вектор $u \in V$ такав да је $L^{m-1}(u) \neq 0$.
   в) Доказати да је за такво $u \in V$, $v = L^{m-1}(u) \in KerL \cap ImL$.
5. Нека су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_k$ међусобно ортогонални вектори векторског простора V. Доказати $||v_1 + v_2 + \ldots + v_k||^2 = ||v_1||^2 + ||v_2||^2 + \ldots + ||v_k||^2$.
6. Нека су S,U и W потпростори истог векторског простора. Ако је $S \subseteq U \cup W$, тада је $S \subseteq U$ или $S \subseteq W$